scientiæ studia, São Paulo, v. 10, n. 1, p. 71-104, 2012

Sobre uma fundamentação não reflexiva da mecânica quântica

Newton Carneiro Affonso da Costa
Décio Krause
Jonas Rafael Becker Arenhart
Jaison Schinaider

RESUMO

Este é um artigo de caráter expositivo, no qual discutimos uma variedade de tópicos relacionados aos fundamentos da física quântica, com destaque para os conceitos de identidade e de individualidade das entidades básicas tratadas por essa teoria (ou grupo de teorias). Consideramos que, se se deseja fundamentar a contraparte formal de uma possível visão das entidades quânticas como objetos destituídos de individualidade, há basicamente duas alternativas possíveis: (a) manter-nos no escopo da lógica e da matemática tradicionais, digamos em uma teoria de conjuntos como Zermelo-Fraenkel, e, nesse caso, podemos ou assumir certas condições de simetria que de certo modo nos permitem falar da não individualidade, ou restringir-nos a certas classes nas quais apenas uma relação mais fraca de indistinguibilidade está definida; (b) elaborar uma teoria matemática nova, na qual certa forma de não individualidade está *ab initio* incorporada para algumas das entidades. Discutimos a primeira hipótese apresentando "modelos internos" de ZFU e ZFC, onde a identidade é restrita de alguma forma, e comentamos vantagens e desvantagens dessa abordagem. Motivada pela segunda hipótese, é então desenvolvida, em seus traços principais, o que poderia ser uma mecânica quântica fundamentada em uma das possíveis teorias de conjuntos distintas das clássicas, a teoria de quase conjuntos. Como a lógica subjacente à teoria de quase conjuntos é uma lógica não reflexiva, a mecânica correspondente é denominada de mecânica quântica não reflexiva.

Palavras-chave Identidade. Individualidade. Não individualidade. Objetos quânticos. Teoria de quase conjuntos. Lógica não reflexiva. Mecânica quântica não reflexiva.

Introdução

Na apresentação que escreveu em 1953 para o livro de Max Jammer (2010, [1953]), Albert Einstein disse o seguinte:

> os olhos do cientista voltam-se para os fenômenos que são acessíveis à observação, para sua percepção e formulação conceitual. Na tentativa de chegar a uma

> formulação conceitual, imerso no conjunto imensamente vasto dos dados da observação, o cientista serve-se de um arsenal de conceitos dos quais se imbuiu praticamente junto com o leite materno. Raras vezes ou mesmo nunca tem consciência do caráter eternamente problemático de seus conceitos. Usa esse material conceitual - ou, em termos mais exatos, esses instrumentos conceituais do pensamento - como um dado óbvio e imutável, algo que tem um valor objetivo de verdade, do qual raramente se pode duvidar, ou, pelo menos, não se deve duvidar seriamente (...). No entanto, a bem da ciência, é preciso que nos empenhemos repetidas vezes na crítica desses conceitos fundamentais, para não sermos governados inconscientemente por eles (Einstein, 2010 [1953], p. 15).

No que diz respeito à física quântica,[1] assunto a ser abordado aqui em caráter introdutório, são exemplos desses conceitos fundamentais a noção de individualidade dos objetos básicos com os quais (supostamente) lida a teoria e aqueles que são coligidos na lógica e na matemática tradicionais, que servem de base para as formulações usuais das teorias quânticas, em especial a noção de identidade.

No decorrer do século xx, lógicos e filósofos deixaram o temor de afastar-se das leis da lógica clássica, dando origem ao desenvolvimento de inúmeros sistemas não clássicos de lógica, com os quais alcançaram um enorme número de inusitadas aplicações não somente na discussão filosófica, mas até mesmo na técnica. No entanto, essa coragem nunca se mostrou no que diz respeito ao conceito de identidade, conceito este com o qual estamos imbuídos desde o leite materno. Pouca discussão há sobre a possibilidade de seu questionamento, ou de *dialetização*, como preferimos dizer seguindo Bachelard, conforme se pode constatar na literatura. Primeiramente, talvez porque a noção informal que temos da identidade esteja tão arraigada em nosso modo de pensar, e esta nos pareça tão claro, que aparentemente não teríamos razão para dialetizá-la: a identidade é aquela relação que todo objeto tem consigo mesmo e somente consigo mesmo. Alguns filósofos, como David Lewis e Ludwig Wittgenstein, chegaram a dizer que se trataria de um conceito por demais banal para ser levado a sério. No entanto, em nossa opinião, este não é o caso. Apesar de aparentemente simples, o conceito (ou noção) de identidade é de difícil caracterização. Na verdade, dependendo de como o tratamos formalmente, obteremos algo que podemos denominar de *noção de identidade*, mas via de regra essas diferentes formulações não são equivalentes e, o que é pior, nenhuma delas parece captar o sentido informal que todos acreditam partilhar a seu respeito.

1 A expressão "física quântica" designa, aqui, uma categoria de teorias que compreende formulações variadas da mecânica quântica não relativista (doravante, MQ) e suas interpretações, bem como versões relativísticas (teorias quânticas de campos, QFT). Por vezes, usaremos a expressão "teorias quânticas" para fazer referência a essas teorias, e somente quando necessário faremos a distinção pertinente.

Como o conceito de identidade entra nas teorias quânticas? Qual a sua importância? Se supusermos que a formulação de uma dessas teorias alicerça-se na lógica usual, qual o conceito de identidade que lhe subjaz? Que implicações tem esse conceito para alguns fatos apregoados pela teoria? Neste artigo, discutiremos algumas relações entre as noções de identidade, indistinguibilidade e individualidade em uma possível interpretação das teorias quânticas. Veremos que ao nível específico, ou seja, da teoria física, distintamente dos níveis lógico e matemático que lhe subjazem, há motivações para analisar uma possível distinção entre o que parte da física quântica nos ensina no tocante à identidade e indiscernibilidade (ou indistinguibilidade) das chamadas "partículas" elementares, e os conceitos correspondentes capturados pelo aparato lógico e matemático subjacente. Levando em conta tal possibilidade, que sugere que o comportamento de pelo menos algumas das entidades tratadas pelas teorias quânticas não corresponde exatamente ao que é apregoado pela lógica e matemática usuais (que subjazem à formulação *standard* da teoria quântica) no que diz respeito à identidade, propomos levar a sério a investigação da possibilidade de uma mudança de base matemática para a teoria. Como consequência, passaremos a tratar certos objetos quânticos como objetos destituídos de individualidade (em um sentido a ser explicado abaixo), e então sustentaremos a viabilidade de erigir-se uma mecânica não relativista, que denominamos de *mecânica quântica não reflexiva*, e que será exposta em linhas gerais na última seção.

1 As razões da identidade

Nesta seção, daremos algumas razões pelas quais a identidade, em seu sentido informal, pode ser considerada problemática quando aplicada a certos objetos quânticos em determinadas situações. Historicamente, esse constituiu um dos primeiros passos a partir dos quais se começou a sugerir que esses objetos não são indivíduos, em algum sentido do termo, e que a noção de não indivíduo pode fazer, como de fato faz, sentido. O tema não será explorado em detalhes (cf. French & Krause, 2006, para uma discussão mais completa). Introduziremos uma discussão informal e algo imprecisa sobre alguns dos temas pertinentes ao nosso assunto, mais ou menos nos moldes como se faz usualmente, porém procurando iniciar uma análise mais precisa de tais conceitos.

Seguindo de perto a literatura sobre o tema, o exemplo paradigmático de tal situação é dado pelas "estatísticas quânticas". Considere-se uma coleção de n partículas[2]

2 Neste texto, "partícula" não deve ser associada a nenhuma conotação particular, como "um objeto pequenino", mas antes como um artifício para evitar a monotonia terminológica quando desejamos fazer referência aos itens com os quais trata a mecânica quântica.

sem interação tal que cada uma delas possa estar em um dentre dois estados, que chamaremos de A e B. De acordo com a mecânica quântica não relativista (MQ), se esses estados têm a mesma energia, cada uma das configurações é igualmente provável. Caso possamos distinguir as partículas, elas são assumidas como independentes, havendo então 2*n* configurações distintas possíveis (por exemplo, para três partículas e dois estados, há oito possibilidades); e, em cada uma dessas possibilidades, tem-se estatisticamente que metade das partículas está no estado A e metade no estado B. Chamando tais partículas de *a*, *b* e *c*, denotemos por A*abc*, quando as três partículas estão no estado A, por A*ab*- B--*c*, quando *a* e *b* estão no estado A e *c* está no estado B etc. Assim, os oito estados são:

(1) A*abc* B---;
(2) Aa-- B-*bc*;
(3) A-*b*- Ba-*c*;
(4) A--*c* B*ab*-;
(5) A*ab*- B--*c*;
(6) Aa-*c* B-*b*-;
(7) A-*bc* Ba--;
(8) A--- B*abc*.

Se todos esses estados forem equiprováveis, essa forma de contagem é conhecida como "estatística" de Maxwell-Boltzmann.

Porém, se supusermos que as partículas são indiscerníveis, ou seja, informalmente falando, tais que não possamos distinguir qualitativamente uma da outra, haverá somente *n*+1 configurações distintas. Neste caso, não haveria sentido em nomear as partículas. Para captar essa intuição, usaremos estrelas para representá-las e, como acima, uma barra "-" para denotar a ausência de partícula. Sem que possam ser discernidas, os casos possíveis para três partículas e dois estados são os seguintes: (1) A*** B---, (2) A*-- B-**, (3) A**- B--*, (4) A--- B***. Isso quer dizer o seguinte: no primeiro caso, há três partículas em A e nenhuma em B, no segundo, há uma em A e duas em B, no terceiro, duas em A e uma em B e, no último, nenhuma em A e três em B. Se todos esses estados são considerados como equiprováveis, essa forma de contagem é denominada de "estatística" de Bose-Einstein. Como se trata de partículas elementares, assume-se que as partículas consideradas podem partilhar um mesmo estado, ou seja, que são *bósons* (partículas com spin inteiro). No caso dos *férmions* (partículas com spin semi-inteiro), devido ao princípio de exclusão de Pauli, que impede que mais de uma partícula possa partilhar um mesmo estado, haverá somente uma possibilidade, uma partícula em cada estado, e teremos a "estatística" de Fermi-Dirac.

Em linhas gerais, ainda explorando a situação imaginada, havendo *k* partículas no estado A, haverá *n-k* partículas no estado B, mas, o que é importante, se não podemos identificá-las, *não há como dizer se uma partícula particular está no estado* A *ou no estado* B;[3] deste modo, cada valor de *k* determina um estado único para o sistema como um todo. A indiscernibilidade de partículas de mesmo tipo é uma característica essencial da física quântica. Porém, o que dizer quando, mesmo sendo de mesmo tipo, como elétrons ou prótons, elas têm propriedades distintas, como spin ou posição?

Insistamos em um dos casos. Usualmente, a localização espaço-temporal é tida como um elemento fundamental na distinção de objetos, tanto na mecânica quântica tradicional quanto nas teorias quânticas de campos. Na física clássica, podemos ter partículas indistinguíveis, no sentido de que partilham suas propriedades essenciais, mas não a localização espaço-temporal: elas são *impenetráveis*. Duas partículas jamais podem ocupar o mesmo local no espaço ao mesmo tempo; têm trajetórias bem definidas e, em princípio, se soubermos a equação dessas trajetórias e certas condições iniciais, podemos localizá-las em qualquer instante de tempo. Na gravitação quântica, no entanto, a situação é aparentemente distinta. Há autores que sustentam que, na escala microscópica, os próprios conceitos de espaço e de tempo necessitam qualificação. Este ponto é destacado por Max Jammer em seu livro já mencionado acima, quando ele faz referencia a outros importantes resultados que apontam para essa conclusão. Por exemplo, diz que o "resultado obtido por Salecker e Wigner com respeito às limitações que cercam as medidas de intervalos espaço-temporais na mecânica quântica, (...) priva as noções tradicionais de espaço e tempo de qualquer significado operacional na microfísica" (2010 [1953], p. 290).[4] Segundo ele, alinhando-se a Eddington e outros, as noções tradicionais de espaço e tempo só seriam aplicáveis a sistemas macroscópicos.[5]

Assim, a discernibilidade física via espaço *e* tempo deve ser colocada sob suspeita, principalmente por causa da existência, na física quântica, de uma possibilidade que não encontra paralelo na física clássica, e que Schrödinger qualificou não de *uma*, mas de *a* característica da física quântica, a existência de estados de *superposição*

3 E, como tem sido amplamente sustentado por muitos autores, isso não se deveria a alguma espécie de limitação epistemológica de não termos acesso àquilo que poderia diferenciá-las, mas a seu aspecto ontológico, sua natureza. Alguns filósofos chegam a dizer que talvez estejamos perante um tipo diferente de entidade, à qual dão o nome de *quanton* (cf. Lévy-Leblond & Balibar, 1990, p. 69).

4 No referido artigo, Selecker e Wigner apontam para limitações que a natureza quântica dos sistemas microscópicos imporiam para a medição de distâncias entre eventos espaço-temporais. Tal resultado, porém, foi contestado por Amelino-Camelia em um artigo que pode ser visto em <http://arxiv.org/abs/gr-qc/9910023>.

5 Esta posição é comum entre os defensores da chamada *gravitação quântica em loop*. O leitor interessado pode consultar o artigo de Carlo Rovelli (1999). Isso nos traz outra questão interessante: se as noções de espaço e tempo merecem qualificação nesse domínio, que noções substituiriam as usuais que conhecemos da mecânica clássica e das teorias da relatividade? Voltaremos a este ponto mais adiante.

(cf. Seção 2). Falando sem muito rigor, considere duas partículas rotuladas 1 e 2 e dois estados possíveis, A e B. Se queremos considerar o estado conjunto, de acordo com a formulação padrão da mecânica quântica, devemos escrever uma *função simétrica* (sinal +) ou *antissimétrica* (sinal -), conforme elas sejam respectivamente bósons ou férmions:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{1A}\psi_{2B} \pm \psi_{2A}\psi_{1B}) \qquad (1),$$

onde $\frac{1}{\sqrt{2}}$ é uma constante que torna unitário o vetor (função). Este estado é um *estado puro*, ou seja, contém o máximo de informação que podemos obter sobre o estado conjunto das duas partículas. A função (1) não é *fatorável*, o que nos permitiria obter cada uma das parcelas isoladamente e determinar *qual* partícula está em qual estado.[6] O que temos é o sistema conjunto, descrito pela função ψ acima, e ela simplesmente nos diz que temos *uma* partícula no estado A e *outra* no estado B, mas jamais poderemos saber qual é qual.

2 O papel da lógica subjacente e os princípios de individualidade

Como o formalismo matemático da teoria quântica, que estamos considerando, pode ser erigido com base na lógica e na matemática usuais, devemos atentar para certas questões relacionadas ao que se disse no último parágrafo da seção anterior e à matemática subjacente. Sem perda de generalidade, vamos assumir que nossa discussão tem por base a lógica elementar clássica e a teoria de conjuntos ZFC (Zermelo-Fraenkel com o axioma da escolha), que nos fornece o aparato matemático de que necessitamos. Vamos chamar tal base lógico-matemática simplesmente de "lógica". Ora, a lógica nos diz que, dadas quaisquer duas entidades a e b, vale o princípio do terceiro excluído: $a=b$ ou $a \neq b$. Por vezes, podemos não saber qual é o caso, mas uma das disjunções é teorema da teoria considerada. O que isso significa? Se a teoria da identidade for a "clássica" (de ZFC), significa simplesmente que, no primeiro caso, não há duas entidades, mas somente uma, que por acaso recebe dois nomes distintos. No segundo caso, que elas são *diferentes* e então (e isso é importante) *apresentam alguma diferença*, ainda que, por vezes, não possamos apontar para essa diferença. Que diferença(s) poderia(m) ser

6 A mecânica quântica na formulação de David Bohm merece uma atenção à parte, que no entanto não será dada aqui. A ontologia dessa mecânica é bastante similar à da mecânica clássica: as entidades são *indivíduos*, tendo em particular uma posição bem determinada, ainda que a variável "posição" seja uma *variável oculta* e não possa ser experimentalmente determinada. Essa mecânica tem muitos adeptos (cf. Goldstein, 2006), e é empiricamente equivalente às demais formulações da mecânica quântica não relativista.

essa(s) entre a e b no caso de $a \neq b$? A literatura filosófica sobre o assunto sugere várias opções, entre elas a possibilidade de que essa diferença seja um fato bruto, ou seja, a individualidade de a e b é entendida como metafisicamente primitiva, ou a utilização da separação de a e b no espaço e tempo, que, no entanto, traz outras questões complexas. Para mencionarmos apenas uma dessas questões, além do que já foi dito acima sobre a possibilidade de estados em superposição, apontamos para o fato de que, na mecânica quântica, existem determinadas situações em que não é possível distinguir entre dois caminhos possíveis de uma partícula e ainda manter o padrão de interferência. Uffink & Hilgevoord (1988) ainda elencam esse fato como vindicando antigas afirmações de Bohr nesse sentido em suas disputas com Einstein; lembramos ademais que na mecânica quântica de Bohm a situação é distinta.[7]

Outras duas opções para assinalar a diferença entre a e b – e que, em geral, estão em destaque nesse tipo de discussão – são as teorias do substrato e as teorias dos feixes. O principal fator de interesse sobre essas teorias está em que possibilitam que a individualidade seja definida. No caso das teorias do substrato, as entidades possuem alguma forma de *quid*, um substrato que subjaz suas qualidades (essenciais e acidentais). Vários nomes consagraram-se para designar esse substrato, como *haecceity* (Duns Scotus), *bare particular* ou *primitive thisness* (na literatura recente). Uma partícula física, em particular, segundo essa abordagem, seria uma entidade "composta" por dois ingredientes: um *bare particular* mais suas propriedades. Nesta forma de entender a individuação, o *bare particular*, além de funcionar como o portador das propriedades também é aquilo que, afinal, conferiri-lhe-a individualidade (cf. Adams (1979); Moreland, 1998).[8]

Na teoria de feixes, por sua vez, um indivíduo é "definido" pela coleção total de suas propriedades.[9] Esta era, dentre várias outras, a noção empregada por Bertrand Russell em certa etapa de sua vida. A coleção das propriedades de uma entidade conferiri-lhe-a individualidade, caracterizaria um determinado objeto. Essa visão, no entanto, não está isenta de problemas. Como no caso das teorias de substrato, que têm dificuldade em dizer do que se trata esse substrato, já que não pode ser reduzido a propriedades, as teorias de feixes aliam-se com determinados princípios que tendemos a

7 A mecânica quântica bohmiana assume pontos de vista similares aos da física clássica no que concerne à identidade das partículas elementares. Nesta mecânica, as partículas são *indivíduos*, na acepção que estamos empregando esse termo.

8 Estamos aqui ignorando as diferenças entre as teorias que envolvem um componente adicional na composição do indivíduo, como é o caso dos *bare particulars*, e as teorias que entendem esses componentes próprios em termos de propriedades não qualitativas, como no caso da *primitive thisness*. Neste segundo caso, não há comprometimento com um componente adicional na composição do indivíduo, nem mesmo com alguma forma de composição ontológica dos indivíduos.

9 Estamos usando a palavra "propriedade", e "atributo" seria sinônima, em sentido amplo, que pode envolver relações.

assumir (junto com o leite materno) como válidos, mas que são problemáticos sob vários pontos de vista. No caso, trata-se principalmente do princípio da identidade dos indiscerníveis, uma hipótese metafísica evidenciada por Leibniz e que se incorporou à lógica clássica. Em linhas gerais, diz o seguinte: se certas entidades são distintas, há uma propriedade que as diferencia. A contrapositiva diz que se duas entidades concordam em todas as suas propriedades, elas não são entidades distintas, mas *idênticas*. A questão, portanto, é: pode haver entidades que não sejam a mesma entidade mas que partilhem todas as suas propriedades? Se formos leibnizianos, como deveremos de certo modo ser se aceitarmos ZFC, assumiremos que não. Informalmente, as propriedades (características) de um indivíduo são, de certo modo, *descobertas* por nós; por exemplo, observamos Sócrates, e dizemos que ele "é filósofo", "é humano" etc. Empregando uma terminologia antiga vinda de Aristóteles, algumas dessas propriedades são *essenciais*, como o fato de ele ser humano, sem a qual ele não seria *aquele* indivíduo que estamos observando, enquanto que outras são *acidentais*, como ser filósofo, já que Sócrates poderia ter sido um pescador. Um indivíduo, em sua acepção usual, tem suas características próprias, se formos leibnizianos, e todo *outro* indivíduo difere dele em algum aspecto. Por exemplo, Platão é também humano e filósofo, mas é jovem. O problema com os seres humanos e com os objetos complexos é que não dispomos de uma lista de todas suas propriedades. No entanto, se assumirmos a tese de Leibniz, ficaremos comprometidos com o fato de que há uma diferença entre quaisquer dois deles, e podemos usar uma analogia para enfatizar, dizendo que uma entidade onisciente sempre seria capaz de apontar para uma qualidade que distingue duas entidades distintas, sendo apenas nossas limitações epistemológicas que nos impediriam de apontar alguma diferença. Essa, no entanto, não é a única possibilidade, pois pode-se supor que, como ocorre na física quântica, pelo menos em determinadas situações e interpretações da teoria, duas entidades podem ser *absolutamente* indiscerníveis, ou seja, tais que nenhum mecanismo provido pela teoria possa estabelecer uma distinção entre elas.[10]

Com efeito, na mecânica quântica padrão, as chamadas partículas elementares são objetos simples no sentido de que possuem relativamente poucas propriedades essenciais descritas de modo preciso pela teoria. Elétrons, por exemplo, são caracterizados por possuírem uma certa massa, uma certa carga elétrica, um certo valor de

10 Alguns filósofos, como van Fraassen, apregoam exatamente este ponto, mas ele faz a ressalva de que "mesmo assim [a distinção] é possível" (van Fraassen, 1998, p. 73). Não entraremos nesta discussão aqui, mas ressalvamos que a afirmativa de van Fraassen tem a ver com a sua interpretação modal, que assume a distinção entre estados dinâmicos e eventos experimentais, os primeiros sendo descritos *internamente* à teoria, ao passo que os segundos não (cf. Krause & Bueno, 2007). Assim, os objetos quânticos poderiam permanecer indiscerníveis "do ponto de vista da teoria", mas discerníveis por algum mecanismo extrateórico.

spin (em valor absoluto, igual a ½) etc., e, de certo modo, podemos listar todas as suas propriedades essenciais, ditas *intrínsecas* pelos físicos, contrariamente à maioria dos objetos macroscópicos que nos cercam, tal como nós mesmos. Se tivessem as mesmas propriedades essenciais resultaria, pelo princípio de Leibniz, que todos os elétrons do universo seriam idênticos, pois têm exatamente as mesmas propriedades. Isso tem levado alguns filósofos a questionar a validade do princípio de Leibniz em física quântica.

O fato é que, contrariamente ao modo mais comum de conduzir a discussão filosófica, não podemos levar a investigação a bom termo sem que os conceitos envolvidos, tais como "propriedade", "identidade", sejam adequadamente definidos, além de que os conceitos lógicos, como os quantificadores, necessitam igualmente de qualificação. Ou seja, temos que discutir a lógica. Como estamos interessados primordialmente na noção de identidade e em sua relação com a noção de individualidade, este é o primeiro conceito que abordaremos aqui. Nossa investigação, na seção seguinte, focará nas tentativas de tornar-se mais rigorosa a noção intuitiva de identidade com o uso de sistemas de lógica.

3 A noção de identidade

Iniciaremos com uma afirmação: *não há maneira alguma de caracterizar a identidade axiomaticamente.* Deixaremos de fora da discussão as razões bastante óbvias sobre a necessidade de que se use aqui o método axiomático. Assim, o que importa é a seguinte questão: o que é a identidade? O que é isso que dizemos não ser possível axiomatizar? Iniciemos com a noção intuitiva já delineada acima. Os objetos são somente idênticos a eles mesmos e distintos de todos os outros. Claro que isso é apenas uma caracterização informal, totalmente redundante, pois como podemos entender o que significam "eles *mesmos*", "todos os *outros*", sem a noção de identidade? Por isso, uma sugestão consiste em empregar-se sistemas formais que tentem captar essa noção. No entanto, como não dispomos de uma definição precisa do que seja a identidade informal, não sabemos bem onde queremos chegar. Assim, o melhor é analisar o que dizem sobre o conceito as teorias usuais com as quais lidamos.

Começaremos analisando o caso de uma linguagem L de primeira ordem. Neste caso, temos duas opções para introduzir a relação de identidade, simbolizada por "=":[11] (a) como um símbolo primitivo para o qual os axiomas usuais de reflexividade e substi-

11 Atribui-se a Robert Recorde o primeiro uso desse sinal. Em 1557, teria dito ele: "para evitar a tediosa repetição das palavras 'é igual a", estabelecerei (como faço usualmente) um par de barras paralelas de mesmo comprimento (portanto, =), porque nunca duas coisas podem ser iguais". (Saint Andrews, 2002).

tuição são fornecidos; (b) como um símbolo definido, seguindo a proposta de Hilbert-Bernays defendida por Quine. A dificuldade com essas propostas é que nenhuma das duas consegue captar a noção intuitiva de identidade referida acima, segundo a qual a identidade é algo que todo objeto tem apenas consigo mesmo. Vejamos isso com um pouco mais de detalhe, analisando o que se faz na lógica clássica, assumindo igualmente a semântica "clássica", ou seja, feita em uma teoria de conjuntos padrão como ZFC.

No caso (a), em que assumimos a identidade como um símbolo primitivo da linguagem, o procedimento usual em uma axiomatização ao estilo Hilbert consiste em adotar-se os seguintes postulados. Note-se que (A2) é um esquema de axiomas:

(A1) $\forall x(x=x)$.
(A2) $\forall x \forall y(x=y \rightarrow (P(x) \rightarrow P(y)))$, onde P(y) é uma fórmula que resulta de P(x) ao substituirmos algumas ocorrências livres de x por y, com y livre para x em P(x).

Utilizando os postulados, podemos provar que a relação "=" é simétrica e transitiva, o que nos garante que a identidade será sempre interpretada como uma relação de equivalência. Semanticamente, ao símbolo, ou predicado binário, de identidade deveríamos associar a diagonal do domínio D da interpretação considerada, ou seja, o conjunto

$$\mathrm{Diag}(D) = \{\langle x,x \rangle : x \in D\}$$

No entanto, os axiomas (A1) e (A2) não fixam esta interpretação, como seria desejável. Para falarmos mais tecnicamente, podemos expressar essa incapacidade dos axiomas afirmando que a identidade, no sentido expresso pela diagonal do conjunto domínio, não é axiomatizável em lógica de primeira ordem, ou seja, não existe um conjunto de fórmulas de primeira ordem que tenha como modelos exatamente as estruturas nas quais essa relação vale (cf. French & Krause, 2006, p. 251 ss.). O que então esses axiomas nos dão, além de uma relação de equivalência?

Falando muito brevemente, eles garantem que o símbolo de identidade será interpretado em uma relação de congruência em qualquer estrutura $e = \langle D, R_i \rangle$. Uma relação $\approx$ sobre D é uma relação de congruência em *e* se for uma relação de equivalência compatível com todas as relações de *e*. Por exemplo, se R é uma relação binária em *e*, então $\approx$ é compatível com R, se as seguintes condições forem satisfeitas:

(i) Se $x \approx y$ e xRz, então yRz;
(ii) Se $x \approx y$ e zRx, então zRy.

Então, o predicado binário de identidade deve satisfazer essas condições para todas as relações da estrutura em questão. A identidade, conforme expressa pela diagonal do domínio, é ela mesma uma relação de congruência sobre qualquer estrutura *e*. A dificuldade é que, para muitas estruturas, a diagonal não é a única relação de congruência, pois podem existir outras relações que igualmente satisfaçam os axiomas acima. O que os axiomas (A1) e (A2) nos garantem é que o símbolo de identidade *sempre* será interpretado na relação de congruência em uma estrutura. Nos casos em que há apenas uma tal relação, esta será a diagonal e, assim, não há problemas na caracterização da relação; no entanto, nos casos em que há mais de uma congruência sobre *e*, o símbolo "=", dado pelos axiomas anteriores, não denotará necessariamente a relação expressa pela diagonal, mas será interpretada em uma relação de congruência que não será necessariamente a identidade, entendida agora como a diagonal do domínio (cf. Béziau, 2004). A estratégia usualmente adotada para evitar essa situação consiste em postular, na metamatemática, que o símbolo da relação de identidade da linguagem L receberá sempre uma interpretação fixa para cada estrutura, a diagonal do domínio. Assim, a interpretação desejada é garantida por decreto; que raramente aparece devidamente justificado nas discussões sobre o assunto.

Como veremos, a proposta de Quine, originalmente apresentada por Hilbert e Bernays, também enfrenta dificuldades. Neste caso, a identidade é apresentada como um símbolo definido. Para tanto, Quine assume que a linguagem L possui um número finito de símbolos de predicados e, por simplicidade, também é conveniente assumir que não possui constantes individuais nem símbolos funcionais. A proposta aqui é definir a identidade de dois objetos como a possibilidade de que valha a substitutividade para todas as propriedades expressas pela linguagem (cf. Ketland, 2006, p. 306-7). Assim, por exemplo, se L possui apenas um símbolo de predicado unário P e um símbolo binário de relação R, podemos definir a identidade sintaticamente do seguinte modo:

$$x = y := (Px \leftrightarrow Py) \wedge \forall z((Rxz \leftrightarrow Ryz) \wedge (Rzx \leftrightarrow Rzy)).$$

Esta definição sofre das mesmas dificuldades que a identidade, quando assumida como uma relação primitiva na linguagem. Sempre podemos apresentar uma estrutura na qual dois objetos distintos estão relacionados pela identidade assim definida. Em tal caso, novamente a interpretação da identidade não coincide com a diagonal do domínio e, assim, não é capturada pela definição proposta. Na verdade, tal tipo de definição introduz apenas uma forma de *indiscernibilidade com respeito aos predicados primitivos de* L.

Para entendermos como isso limita a abordagem, podemos apresentar uma das principais dificuldades que a envolvem, que consiste no fato de que, para qualquer estrutura $e = \langle D, R_i \rangle$, na qual a linguagem L é interpretada, sempre podemos encontrar uma estrutura e', elementarmente equivalente a e, tal que a identidade não é interpretada na diagonal em e'. Apenas esboçaremos o argumento. Tome-se qualquer elemento fixo a do domínio D de e, e seja ele substituído pelos pares ordenados $\langle a, 1 \rangle$ e $\langle a, 2 \rangle$, obtendo assim um novo conjunto D'. Agora, podemos definir por indução sobre as fórmulas da linguagem as condições que devem ser satisfeitas por elementos de D' para que eles satisfaçam as fórmulas da linguagem. Para quaisquer objetos distintos dos pares introduzidos acima, postulamos que eles satisfazem os predicados e relações na linguagem em e' se e somente se satisfazem esses predicados e relações em e. Para os objetos recém introduzidos, dizemos ainda que esses pares satisfazem uma fórmula em e' se e somente se a satisfaz essa fórmula em e. Desse modo, onde antes havia apenas um objeto, agora existem dois, diferentes, mas que não podem ser diferenciados nessa estrutura por nenhuma fórmula da linguagem L. Dito de outro modo, não há nenhuma fórmula da linguagem tal que um dos pares ordenados a satisfaz, mas o outro não e, assim, na definição de identidade apresentada acima, seguindo Hilbert e Bernays, teremos que os dois objetos distintos do domínio satisfarão a fórmula que define a identidade, sem que, no entanto, sejam o mesmo objeto. O mesmo argumento poderia ser generalizado para n novos objetos.

Vamos assumir agora que nossa linguagem L é de ordem superior, por exemplo, a da teoria simples de tipos. Nesse caso, a identidade pode ser definida através da chamada lei de Leibniz, adaptando a definição proposta por Whitehead e Russell nos *Principia mathematica*:

$$x = y := \forall F(Fx \leftrightarrow Fy).$$

Aqui, estamos assumindo que as fórmulas respeitam as restrições da linguagem da teoria de tipos, e também aquilo que Russell chamava de *typical ambiguity*, ou seja, o fato de que para cada tipo teremos uma relação de identidade valendo entre objetos daquele tipo. Assim, x e y representam variáveis de determinado tipo e F é uma variável que percorre todas as propriedades de objetos desse tipo. Um interessante ponto a ser notado é que essa definição engloba tanto a lei da substituição, que captura tanto o chamado princípio da indiscernibilidade dos idênticos, expresso pela implicação $x = y \rightarrow \forall F(Fx \leftrightarrow Fy)$, quanto o Princípio da identidade dos indiscerníveis, expresso pela implicação $\forall F(Fx \leftrightarrow Fy) \rightarrow x = y$; (cf. French & Krause, 2006, cap. 6).

Na linguagem da teoria de tipos, com a formulação proposta acima, conseguimos escapar da principal dificuldade das linguagens de primeira ordem, qual seja, o fato de que os axiomas para a identidade apenas axiomatizam uma relação de congruência que nem sempre é a diagonal do domínio. No entanto, para garantir que a definição acima capte os aspectos intuitivos da noção de identidade, devemos aparentemente assumir que estamos trabalhando naquilo que se chama de modelo *standard* para a teoria de tipos. Nesse tipo de modelo, levamos em conta *todos* os subconjuntos de objetos de um determinado tipo Church (cf. 1956, p. 307) chama tais modelos de *principais*. A dificuldade, nesse caso, é que não se tem um teorema de completude para a semântica standard. Podemos tentar remediar tal problema utilizando uma semântica de Henkin, na qual os modelos, chamados *modelos de Henkin*, são tais que os quantificadores percorrem apenas determinados subconjuntos de objetos de determinado tipo. Nesse caso, garantimos uma forma "fraca" de completude, mas a definição da identidade segundo a lei de Leibniz deixa de ser a identidade intuitiva; de fato, podemos apresentar um contraexemplo no qual objetos *distintos* satisfazem a definição de identidade (lei de Leibniz). Para um exemplo simples, vamos considerar um domínio D = {1, 2, 3, 4}, e que a linguagem possui três símbolos de predicados unários para indivíduos, interpretados em {1, 2}, {1, 2, 3} e {1, 2, 4}, respectivamente. Vamos supor ainda que os quantificadores, para as propriedades de indivíduos, estão restritos a esses subconjuntos. Se a denota 1 e b denota 2, então é claro que a e b partilham todas as mesmas propriedades, pois pertencem aos conjuntos escolhidos, mas não são o mesmo objeto.

Outra maneira de entendermos a identidade e que nos permite vislumbrar sua relação com aquela que pode ser entendida como indiscernibilidade, diz respeito novamente a uma estrutura $e = \langle D, R_i \rangle$. Como discutimos brevemente antes, nas estatísticas de Bose-Einstein e Fermi-Dirac para objetos quânticos, uma permutação não era contada como dando origem a um estado distinto. Como estamos vendo, existem muitas situações em que objetos distintos de uma mesma estrutura podem ser substituídos um pelo outro sem alteração do valor de verdade das fórmulas envolvidas. Isso significaria que esses objetos podem ser considerados como indiscerníveis? Será que a permutação de objetos do domínio é um sinal de sua indiscernibilidade? Vejamos com mais cuidado o que está envolvido neste argumento.

Consideremos o grupo dos inteiros com adição $Z = \langle Z, + \rangle$. Esta estrutura, como se pode verificar, possui dois automorfismos, ou seja, bijeções de Z em Z que preservam as operações da estrutura: a função identidade e a função g que mapeia cada inteiro x no seu oposto –x. Uma forma possível de entender a indiscernibilidade consiste em tomar como indiscerníveis objetos de uma estrutura que podem ser mapeados um no outro por automorfismos dessa estrutura, ou seja, a e b são indiscerníveis em uma estrutura e, se existe um automorfismo f em e, tal que $f(a) = b$. No caso da estrutura de grupos dos inteiros apresentada acima, 2 e -2 são indiscerníveis nessa estrutura, já que $g(2) = -2$. Isso reflete o fato de que a estrutura em questão não distingue entre 2 e -2, ou seja, apenas com as relações da estrutura, no caso, uma só operação binária, não podemos discernir 2 de -2. No entanto, 2 é distinto de -2. Podemos ampliar Z com a relação de ordem padrão <, obtendo $Z' = \langle Z, +, < \rangle$. Nesse caso, a função g deixa de ser um automorfismo, 2 não é mais indiscernível de -2 e, de fato, para a estrutura Z', a função identidade é o único automorfismo. Estruturas com esta característica são ditas *estruturas rígidas* (cf. Ketland, 2006, p. 305). A estrutura apresentada no exemplo é uma estrutura *de primeira ordem*, ou seja, as relações envolvidas aplicam-se unicamente a elementos do domínio, e não a seus subconjuntos, subconjuntos dos subconjuntos etc., que dariam as estruturas *de ordem superior*. No entanto, o resultado apontado pode ser estendido também para essas estruturas de ordem superior, de modo que o que dissemos é bastante geral (cf. da Costa & Rodrigues, 2007). Desse modo, constatamos que, no escopo da matemática e da lógica usuais, o conceito de indiscernibilidade, entendido como permutação dos elementos de um domínio de interpretação através de automorfismos, é sempre relativo a uma determinada estrutura.

Outro fato que não deve passar despercebido é que estamos trabalhando sempre em uma teoria de conjuntos, que poderia ser uma teoria de categorias, ou lógica de ordem superior, como já dito antes. Em nossa discussão, estivemos supondo que estamos utilizando ZFC, como é usual, ainda que a discussão feita pudesse ser realizada em outra teoria de conjuntos, como ZFU, NBG ou KM. No entanto, esta hipótese carrega suas próprias consequências para a abordagem da indiscernibilidade relativa a estruturas. A grande dificuldade, nesse caso, é que mesmo para aquelas estruturas com vários automorfismos distintos da identidade, sempre podemos enriquecer a estrutura de modo a obter novas estruturas, como no caso acima do grupo aditivo dos inteiros, as quais são rígidas. De fato, em ZFC, sempre se tem que dois objetos quaisquer são idênticos ou são distintos, o que implica que, no caso de serem distintos, terão alguma diferença, expressa na teoria de conjuntos em questão, mesmo que a diferença não possa ser expressa em algumas das estruturas nas quais esses elementos fazem parte do conjunto domínio, como, por exemplo, no caso de 2 e -2 acima.

Seguindo nossa proposta de fundamentar uma mecânica quântica não reflexiva, discutiremos duas possibilidades: a primeira, de construir um modelo interno de ZFU e outro modelo em ZFC, nos quais podemos simular a relação de indistinguibilidade, que queremos que seja distinta da identidade para os objetos quânticos, a segunda, a teoria de quase conjuntos, na qual a não reflexividade de certos objetos é assumida desde o princípio.

4 Não reflexividade e não indivíduos

Agora que já discutimos brevemente os modos como a identidade pode manifestar-se na lógica e na matemática, que estão na base da *formulação padrão* da teoria quântica, será interessante relacionar esses conceitos com nossa discussão anterior sobre a mecânica quântica e a não individualidade. Como vimos, podemos supor uma interpretação do formalismo da mecânica quântica, na qual os objetos com os quais a teoria trata podem ser considerados fisicamente indiscerníveis em certas situações, a ponto de que desaparecem as principais características que nos permitiriam classificar certos objetos como indivíduos. Nessas situações, eles não podem ser rotulados, identificados, reidentificados temporalmente, não possuem certo tipo de continuidade espaço-temporal, nem trajetórias determinadas (cf. Uffink & Hilgevoord, 1988). Nesse caso, uma abordagem ao problema da individualidade segundo uma teoria de feixes de propriedades parece ser completamente descartada desde o princípio.

No entanto, como estivemos discutindo, apesar de os axiomas da lógica de primeira ordem com identidade não nos garantirem que a relação de identidade será sempre interpretada como a diagonal do domínio, a qual representaria formalmente nossa noção intuitiva de identidade, podemos assumir uma interpretação que garanta que a identidade seja interpretada na diagonal, por exemplo, quando assumimos uma estrutura rígida. Isso garantiria que na estrutura em questão não existem objetos distintos que sejam indiscerníveis, no sentido definido acima, qual seja, empregando a noção de automorfismos da estrutura. Nesse sentido, uma visão leibniziana dos objetos, que compreende o domínio de interpretação, parece completamente justificada. A dificuldade surge quando percebemos que a mecânica quântica está construída precisamente em uma teoria de conjuntos clássica, cuja interpretação intuitiva pretendida é uma estrutura rígida, com o universo conjuntista bem fundado.

Como escapar dessas dificuldades? Como conciliar essas visões antagônicas que surgem da lógica subjacente e de algumas interpretações da mecânica quântica que estamos considerando? Aparentemente, um dos lados deve ceder. Uma das alternativas propostas na literatura consiste em rejeitar o argumento apresentado acima em favor de que as entidades quânticas são melhor compreendidas se forem tomadas como certo tipo de não indivíduos. Nesse caso, explicações alternativas terão que ser buscadas para o fato de que essas entidades obedeceriam princípios de simetria e, aparentemente, não poderiam ser distinguidas por nenhuma grandeza física, pelo menos em certas circunstâncias. Para aqueles que seguem essa opção, a lógica e a matemática usuais podem ser mantidas sem prejuízo, mas a contraparte filosófica aparentemente deverá ser desenvolvida com o uso de substratos ou relações não supervenientes, tópicos que não abordaremos aqui (cf. French & Krause, 2006, cap. 4).

A segunda alternativa, aquela que nos interessa aqui, consiste em propor mudanças no nível da lógica subjacente à teoria. De fato, conforme discutimos brevemente na introdução, durante o século xx, lógicos e filósofos não encontraram limites para derrogar as diversas proposições consideradas tradicionalmente como intocáveis, dentre elas os célebres princípios da não contradição e do terceiro excluído. O conceito de identidade, no entanto, e em particular o princípio da identidade na forma $\forall x(x=x)$, jamais foi questionado ou, pelo menos, enfraquecido, admitido-se a possibilidade de haver entidades para as quais o conceito intuitivo de identidade não pudesse ser aplicado irrestritamente. Se supusermos, por exemplo, como apregoou Schrödinger, que esse é de fato o caso no que concerne às partículas elementares, em se tratando de fundamentos, será que não poderíamos encontrar, dentre os sistemas não clássicos, algum que se mostre mais adequado a esse tipo de entidade, cuja existência é compatível com uma possível interpretação da mecânica quântica? Como vimos acima, a dificuldade parece consistir em compatibilizar o comportamento das entidades quânticas, conforme apontadas por nossa interpretação, com formalismo próprio da teoria – representação em estados simétricos e antissimétricos – e com a *teoria da identidade* subjacente. Assim, uma sugestão plausível indica-nos que é, dentre outras coisas, no tratamento da identidade que devemos buscar alterações, se desejamos prosseguir sustentando que as entidades quânticas não têm individualidade, que são *não indivíduos*.

Como podemos representar formalmente a noção de não individualidade? Que tipo de características deve ter uma lógica como a que estamos buscando? Uma abordagem interessante pode ser vista como tendo origem no próprio nascimento das estatísticas quânticas, quando muitos dos próprios físicos responsáveis pelo desenvolvimento da teoria começaram a reparar no comportamento aparentemente anormal das entidades descritas por ela. Segundo muitos desses físicos, as partículas quânticas haviam "perdido sua individualidade", no sentido de que elas já não eram mais indivíduos na mesma acepção que as partículas clássicas podem ser ditas serem indivíduos, e esta ausência de individualidade era entendida, grosso modo, como caracterizada pela falta de sentido da afirmação da identidade ou da diferença dessas partículas em determinadas ocasiões. Para citar um exemplo, Erwin Schrödinger sugeriu que para as partículas quânticas, em determinadas circunstâncias, o conceito de identidade carecia completamente de sentido (cf. French & Krause, 2006, cap. 3).

Assim, a sugestão parece ser a de que a não individualidade das partículas quânticas poderia ser traduzida como uma forma de violação das leis usuais da identidade. Não indivíduos, nessa abordagem, seriam entidades que não obedeceriam às leis tradicionais da identidade. Claro que, com isso não queremos dizer que para elas vale alguma forma de negação das leis da identidade, mas sim que essas leis simplesmente não se aplicariam. Aqui, é pertinente a questão: o que estamos chamando de leis da identidade? Como já discutimos anteriormente, conforme o tipo de linguagem que empreguemos e o tipo de sistema formal utilizado, a identidade e aquilo que se compreende por "leis da identidade" poderão ser entendidas de formas diversas, com algumas delas relacionadas entre si.

Para falarmos daquela que talvez seja a forma mais simples de derrogação das leis da identidade, podemos considerar um sistema formal ao estilo de Hilbert. Nesse sistema, como discutimos, a identidade, tomada como conceito primitivo, deve obedecer a duas condições, a saber, propriedade da reflexividade e a lei da substituição, correspondentes aos postulados (A1) e (A2) apresentados acima. Derrogar a identidade, em um sistema envolvendo esses postulados, compreenderia alguma limitação a sua validade, no sentido de que pelo menos um desses postulados não se aplicaria a todas as entidades das quais trata o sistema. Assim, como estamos sugerindo, não indivíduos são objetos para os quais a noção usual de identidade não se aplica, e podem simplesmente ser representados por termos individuais na linguagem que não satisfaçam essas mencionadas leis por alguma imposição, seja na sintaxe, seja na semântica.

Um exemplo simples de um sistema englobando essas noções é a chamada lógica de Schrödinger, inspirada em seus escritos, que, como enfatizamos acima, propunha que a identidade deixaria de fazer sentido em muitas circunstâncias para as partículas quânticas (cf. da Costa & Krause, 1994, 1997; French & Krause, 2006, cap. 8). Falando por alto apenas dos sistemas de primeira ordem, nessas lógicas temos uma linguagem bisortida, com dois tipos de termos; um dos termos, em sua interpretação pretendida, denota objetos usuais, obedecendo aos postulados da identidade vistos acima, enquanto que os termos da outra espécie denotam objetos quânticos, e a identidade, assume-se, simplesmente não pode ser aplicada para eles, o que se reflete quando se diz que uma sequência de símbolos do tipo "x=y" não é fórmula do sistema, quando "x" ou "y" forem termos da segunda espécie. Assim, para os objetos denotados por termos dessa espécie, a identidade de certa forma deixa de fazer sentido e, simplesmente, não podemos expressar em nossa linguagem que objetos desse tipo são iguais ou diferentes.

Os sistemas de lógica com essa característica foram batizados de "lógicas não reflexivas", pois, em particular, violam a propriedade reflexiva da identidade. Devemos lembrar que usualmente em contextos de discussões filosóficas, a propriedade reflexiva da identidade é mencionada como "lei da identidade", um dos três grandes princípios da lógica, juntamente com a não contradição e o terceiro excluído. Assim, como esses sistemas de lógica violam, em particular, essa formulação do princípio, é conveniente englobar em seu nome esta característica, lembrando sempre que se trata de uma caracterização bastante vaga, como costuma acontecer com os sistemas de lógica alternativos, e até mesmo os clássicos, pois é tarefa complicada caracterizar precisamente o que seja a lógica clássica. Se desejássemos uma definição mais rigorosa de lógicas não reflexivas, poderíamos classificá-las como um sistema de lógica que satisfaz alguma das seguintes características: (a) derrogam algumas das leis da identidade, ou (b) limitam a aplicação da identidade a certos objetos, ou (c) limitam a aplicação da identidade a objetos em certas circunstâncias, ou (d) não encerram a identidade, ou (e) utilizam uma relação que substitui a identidade em vários contextos, sem necessariamente pressupor que ela não tenha sentido, ou (f) *fuzzificam* a identidade ao permitir diferentes graus de identidade.

Seguindo nossa proposta de fundamentar uma mecânica quântica não reflexiva, discutiremos duas possibilidades de captar formalmente formas de não reflexividade que podem servir para uma fundamentação de versões não reflexivas da mecânica quântica. Em ambos os casos, construiremos modelos internos de teorias de conjuntos nos quais uma relação de indistinguibilidade pode ser definida. Além disso, não introduziremos nos modelos uma relação específica de identidade, de modo que, quando considerado isoladamente, o modelo poderá representar, de certo modo, entidades que podem ser indistinguíveis mas não idênticas, captando, assim, uma forma de não reflexividade. Essas entidades, conforme discutimos, são as candidatas a representar os objetos com os quais trata a mecânica quântica, sob determinada interpretação. Por fim, discutiremos as limitações desse tipo de projeto quando considerado de um ponto de vista estritamente filosófico.

5 Não reflexividade em um modelo interno de ZFU

A partir de agora, estamos assumindo ZFU, ou seja, Zermelo-Fraenkel com átomos (cf. Suppes, 1960; Brignole & da Costa, 1971). Nosso objetivo é construir um modelo interno para ZFU no qual podemos simular o comportamento das partículas como se a identidade não valesse para elas; no entanto, vale uma relação mais fraca de indistinguibilidade. Começamos com três conjuntos disjuntos m_1, m_2 e M. Definindo $m := m_1 \cup m_2$, e assumimos que $m \cap M = \varnothing$. Intuitivamente, m_1 e m_2 representarão dois conjuntos de objetos da mecânica quântica não relativista (prótons e elétrons, por exemplo), e para eles, a identidade no universo que construiremos não estará definida. Nosso exemplo será feito com somente dois tipos de microobjetos, mas poderíamos considerar mais conjuntos m_3, m_4 etc. para os demais tipos de partículas. Os objetos em M representam objetos comuns, macroscópicos, para os quais a identidade é assumida valer e é, de fato, a mesma relação que a indistinguibilidade, tal como na lógica usual. Começamos nossa construção seguindo o procedimento padrão, exceto pelo fato de que nossas hierarquias não serão cumulativas, pois não precisamos disso aqui. Por recursão transfinita, pomos:

$$V_0 = m \cup M$$
$$V_1 = \wp(V_0)$$
$$\vdots$$
$$V_{n+1} = \wp(V_n), \text{ para n número natural;}$$
$$\vdots$$
$$V_\omega = \cup V_n, \text{ para todo n natural;}$$
$$V_{\omega+1} = \wp(V_\omega)$$
$$\vdots$$
$$V_{\omega+n+1} = \wp(V_{\omega+n})$$
$$\vdots$$
$$V_{\omega+\omega} = \cup V_\beta, \text{ para todo } \beta \text{ tal que } \beta < \omega+\omega$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{V} = \cup V_\beta, \text{ para todo } \beta \text{ ordinal.}$$ [12]

V é o que se chama de *modelo interno* de ZFU. Devemos notar que a construção acima pode ser generalizada para começar com *n* conjuntos disjuntos quaisquer, mas aqui por simplicidade consideraremos apenas o caso de *n* = 3. Podemos também definir, como usualmente:

Definição. Chamamos de rank x ao menor ordinal α tal que $x \in V_\alpha$.

Temos então facilmente o seguinte teorema:

Teorema. Se $x \in y$ então rank x < rank y.

Definiremos agora um novo modelo interno **U**, representando aquilo que poderíamos considerar uma restrição à parte clássica de **V**.

$$U_0 = M$$
$$U_1 = \wp(U_0)$$
$$\vdots$$
$$U_{n+1} = \wp(U_n)$$
$$\vdots$$
$$U_\omega = \cup U_n, \text{ para todo n natural;}$$
$$U_{\omega+1} = \wp(U)$$
$$\vdots$$

12 Usualmente, toma-se $V_{n+1} = V_n \cup \wp(V_n)$, mas aqui não precisamos que a hierarquia seja *cumulativa*.

$U\omega_{+n+1} = \wp(U\omega_{+n})$
$\vdots$
$U\omega_{+}\omega = \cup\, U$, para todo β tal que $\beta < \omega+\omega$
$\vdots$
$\mathbf{U} = \cup\, U\beta$, para todo β ordinal.

Claramente, **U** também é um modelo interno de ZFU. Segue imediatamente da definição o seguinte metateorema:

Metateorema.[13] $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{V}$.

Por enquanto, temos duas "super-estruturas", T = <**V**, ∈> e T' = <**U**, ∈>, lembrando que T e U não são conjuntos de ZFU. Ainda não dissemos nada acerca das relações de identidade ou indistinguibilidade entre os elementos dos universos aqui definidos. Intuitivamente, queremos que a indistinguibilidade, quando restrita aos objetos clássicos, colapse na relação de identidade, ou seja, que objetos indistinguíveis de M sejam, de fato, *o mesmo* objeto, captando formalmente uma versão da tese de Leibniz. Para tanto, definimos por indução em **V** a relação binária ≡ da seguinte forma:

Definição:
(i) Em V_o, pomos:
a. Se $x, y \in m_i$, então $x \equiv y$.
b. Se $x \in m_i$ e $y \in m_j$, com $i \neq j$, então $\sim(x \equiv y)$.
(ii) Em U_o, definimos:
a. Se $x \equiv y$, então $x = y$.
(iii) Estendemos essas definições por recursão transfinita para todos os objetos das hierarquias **V** e **U**.

Com esta relação assim definida, é fácil provar os seguintes teoremas:

Teorema. ≡ é uma relação de equivalência.[14]

Teorema. Quando restrita a **U**, ≡ é a relação de identidade em T' = $\langle \mathbf{U}, \in \rangle$.

13 Estamos distinguindo esta proposição, chamando-a de metateorema, porque ela não pode ser provada em ZFU, uma vez que as estruturas envolvidas não são *conjuntos* de ZFU.
14 Isto é obviamente um abuso de linguagem, pois uma relação de equivalência deve ser definida sobre um conjunto, e nem **V** e nem **U** são conjuntos de ZFC ou de ZFU.

Assim, temos um *framework* conceitual no qual podemos, de certo modo, simular um discurso acerca de objetos indistinguíveis mas não idênticos, a saber, no interior da hierarquia **V**. Mas devemos observar que um tal esquema, ainda que eventualmente possa servir aos propósitos da física, é filosoficamente interessante, pois a noção de identidade continua a valer nos bastidores, pois vale em ZFC e em ZFU. De fato, os objetos indistinguíveis mas não idênticos, do ponto de vista de **V**, poderiam ainda assim ser de algum modo considerados indivíduos na teoria de fundo, bastando para isso que fossem individualizados por algo como um *bare particular*. Para capturar o sentido de não individualidade que desejamos aqui, precisamos que a identidade não seja válida de forma alguma para os objetos, valendo apenas a indistinguibilidade, e esses conceitos não devem colapsar um no outro. Isso é conseguido com uma teoria diferente, a teoria de quase conjuntos.[15]

Insistamos um pouco. A identidade, na verdade, está presente o tempo todo para todas as entidades das quais estamos tratando, até mesmo para os elementos de m_1 e de m_2. De fato, é importante lembrar que estamos trabalhando dentro de ZFU e, como nesta teoria vale a negação da tese da não reflexividade, ou seja, a identidade se aplica a todos os objetos com os quais trata a teoria, temos então apenas dois níveis conceituais distintos. Essa situação pode ser explicada mais claramente do seguinte modo. Podemos distinguir entre uma abordagem local e uma abordagem global. Se nos restringirmos a **V**, olhando apenas para o tratamento dado aos elementos deste último domínio, então vale uma forma local de não reflexividade, e, se nos restringirmos ainda mais a **U**, vale a reflexividade. Por outro lado, podemos abordar esses modelos internos de um ponto de vista global, de modo que consideramos o ambiente no qual tudo isso é desenvolvido e no qual **U** e **V** estão mergulhados. Nesse caso, teremos que a identidade pode aplicar-se irrestritamente.

O pano de fundo global, ZFU, permanece sempre presente nessa abordagem. Podemos introduzir noções como cardinalidade em **V**, mas também podemos aplicar diretamente alguma definição de cardinalidade de ZFU e trabalharmos como se esse fosse o aparato conceitual utilizado. Podemos considerar que os elementos de *m* obedecem apenas à relação de indistinguibilidade, mas podemos também olhá-los como

15 Cabe ressaltar aqui um ponto interessante, que, no entanto, não será discutido neste artigo. Como salientado em da Costa (1980, p. 56 ss.), a atividade científica, mesmo em lógica e em matemática, depende de uma intuição intelectual, a qual forjamos tendo em vista nosso contato com o contorno. Essa atividade é construtiva, pressupondo algo comparável à aritmética intuicionista e, desse modo, pressupõe o conceito intuitivo de identidade. De fato, mesmo para escrevermos uma linguagem como a da teoria de quase conjuntos, segundo a qual a noção de identidade não vale em geral, necessitamos discernir símbolos, saber que certos símbolos são distintos de outros, etc. Porém, não devemos confundir os dois níveis de discurso, o lógico (da linguagem objeto) e o metalógico (da metalinguagem). No caso, a identidade é usada como conceito metamatemático, intuitivo, e não pode ser confundida com o conceito formalizado (cf. da Costa, 1980, p.57).

elementos de ZFU, para os quais a identidade está perfeitamente definida. Essa dualidade permite dar um tratamento claro a uma das alegadas dificuldades de qualquer lógica não reflexiva: o uso de quantificadores. Em linhas gerais, o problema consiste no fato de que a compreensão dos quantificadores parece pressupor a identidade, o uso de quantificadores *parece* só fazer sentido se as entidades sobre as quais quantificamos podem ser diferenciadas umas das outras. Um exemplo simples vem do uso do quantificador universal. Ao afirmarmos que todos os objetos possuem certa propriedade, estamos afirmando também que cada um deles possui essa propriedade. Mas devemos observar que, aparentemente, "cada um" pressupõe que seja possível diferenciar os objetos. Assim, a identidade deve fazer sentido para eles. Observações similares aplicam-se para o caso da quantificação existencial (cf. da Costa & Bueno, 2009).

Como essa abordagem em dois níveis pode superar a dificuldade? Basta notar que a não reflexividade está restrita apenas ao nível local, e que os quantificadores, por sua vez, por fazerem parte da linguagem de ZFU, estão quantificando sempre sobre objetos para os quais a identidade faz completo sentido. Ou seja, a estratégia aqui consiste em considerar os quantificadores no nível global, mesmo quando aplicados aos elementos de **V**. Desse modo, não há dificuldades para entender a quantificação, já que ela funciona precisamente como na lógica clássica.

6 A não reflexividade em um modelo interno de ZF

A partir de agora, estaremos trabalhando em ZF. Nosso objetivo é construir mais uma vez um modelo interno no qual possamos obter alguma forma de não reflexividade. Uma das principais características desse modelo será o fato de que ele é adequado para interpretar em ZF os axiomas da teoria de quase conjuntos Q. Assim, tendo esse objetivo em mente, queremos um universo com dois tipos de objetos, os chamados objetos *clássicos* e os objetos *não* clássicos, estes últimos irão representar, no nosso modelo interno, as partículas quânticas, para os quais vale alguma forma de não reflexividade, exatamente a exposta anteriormente.

Começamos com um conjunto não vazio m e uma relação de equivalência R definida sobre m. Denotaremos as classes de equivalência sobre m módulo R por C_1, C_2, ..., C_n,... . Para cada $\mathbf{a}\in m$, definimos $\hat{a} := \langle \mathbf{a}, C_A \rangle$, onde C_A denota a classe de equivalência à qual **a** pertence. Definimos **m** como o conjunto de todos os pares $<\mathbf{a}, C_A>$ para todo $\mathbf{a}\in m$.

Agora, dado um conjunto M de mesmo rank que **m** e tal que $M\cap\mathbf{m} = \emptyset$, definimos $X := M\cup\mathbf{m}$. X será o conjunto base de um novo universo **Q** que construiremos em ZF. A definição, novamente por indução, é como segue:

$$Q_0 = X$$
$$Q_1 = X \cup \wp(Q_0)$$
$$\vdots$$
$$Q_{n+1} = Q_n \cup \wp(Q_n)$$
$$\vdots$$
$$Q_\omega = \cup Q_n, \text{ para todo n natural;}$$
$$Q_{\omega+1} = Q_\omega \cup \wp(Q_\omega)$$
$$\vdots$$
$$Q_\lambda = \cup Q_\beta, \text{ com } \beta < \lambda, \text{ para todo } \lambda \text{ ordinal limite.}$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{Q} = \cup Q_\beta, \text{ para todo } \beta \text{ ordinal.}$$

Para mantermos a terminologia de acordo com a utilizada nas discussões da teoria de quase conjuntos e que está servindo de guia intuitivo para nossos desenvolvimentos aqui, chamaremos os elementos de M de M-objetos ou M-átomos. Aos elementos de **m** chamaremos de m-objetos ou m-átomos. Nosso objetivo, assim como fizemos anteriormente, é mostrar que certa forma de não reflexividade vale para os objetos de **m**, enquanto que para os elementos de M a identidade se aplica da maneira usual. Antes de passarmos a este tipo de desenvolvimento, no qual introduziremos uma relação de indistinguibilidade, vamos notar que podemos definir um subuniverso $\mathbf{Q}^S$, contendo apenas M como conjunto base. Em $\mathbf{Q}^S$ temos, por assim dizer, um modelo interno de ZF. Podemos obter resultados semelhantes aos anteriores, tais como $\mathbf{Q}^S$ está contido em $\mathbf{Q}$.

Podemos definir uma relação de indistinguibilidade ~ entre os elementos de **m** da seguinte forma. Para â e ô em **m**, â ~ ô se e somente se $C_A = C_O$. Intuitivamente, esta relação garante que os objetos de um mesmo tipo, no sentido de pertencerem à mesma classe de equivalência, são indistinguíveis, enquanto que, por definição, os objetos que não são do mesmo tipo, isto é, que não pertencem à mesma classe de equivalência não estão relacionados. É fácil provar que essa é uma relação de equivalência sobre **m**.

Com o que temos até aqui, já podemos interpretar os axiomas da teoria de quase conjuntos em **Q** e mostrar que **Q** é um "modelo" para essa teoria. Isso garante que, se ZF for consistente, então a teoria de quase conjuntos também será. Nosso objetivo aqui, no entanto, não é entrar nesses detalhes, mas, assim como fizemos anteriormente, discutir a natureza desse modelo e em que sentido podemos afirmar que ele incorpora alguma forma de não reflexividade (cf. French & Krause, 2006, cap. 7, 2010).

O primeiro ponto a ser notado diz respeito à utilização, em nossa construção, de classes de equivalência de elementos de *m*, e não dos próprios elementos. Notemos que no desenvolvimento de **Q**, começamos com o conjunto base X a partir do rank de

$\mathbf{m}_2$ que está acima do rank de *m*. Desse modo, os elementos de *m* não fazem parte do universo construído e, assim, de certa forma, "mascaramos" sua individualidade dentro de **Q**, ao utilizarmos os pares ordenados da forma $\langle \mathbf{a}, C_A \rangle$. Intuitivamente, o que interessa com respeito aos elementos de **m** é o tipo de elementos que eles são, o que é definido pela classe à qual pertencem, e apenas isso. Sendo assim, dentro das classes de equivalência C_n, podemos ter um cardinal mas não podemos ordenar os elementos desse conjunto, já que não faz sentido a ordenação de elementos indiscerníveis.

Esta discussão nos remete novamente ao que já observamos acima na construção de nosso modelo interno em ZFU. Conforme observamos naquele caso, apesar de ser possível simular dentro de ZF uma forma de não reflexividade, quando nos restringimos ao universo **Q**, não podemos esquecer que estamos em ZF, e que, de um ponto de vista global, a identidade em ZF sempre faz sentido para todos os elementos nessa teoria de conjuntos. Ou seja, mesmo que nada se fale sobre isso em **Q**, pelo simples fato de serem objetos de ZF, até mesmo os elementos de **m** possuem uma relação de identidade definida, ainda que esteja "escondida", a identidade em ZF.

Mas, se podemos interpretar até mesmo a teoria de quase conjuntos no universo **Q**, que está dentro de ZF, isso significa que a tese da não reflexividade não passaria de uma artimanha conceitual que podemos sempre dispensar? De fato, as coisas não se passam desse modo. Da mera possibilidade de interpretarmos uma forma de tese da não reflexividade em ZF não decorre que essa tese deixe de ser uma opção legítima. Notemos, em primeiro lugar, que um argumento de mesmo teor, mas a favor da não reflexividade, também poderia ser formulado, dado que a teoria de conjuntos clássica ZFU também pode ser vista como um caso particular de uma teoria de quase conjuntos.

A não reflexividade é, sobretudo, uma posição metafísica sobre a natureza das entidades com as quais temos a possibilidade de comprometer-nos segundo uma interpretação da versão usual da mecânica quântica, que não pode ser falsificada desse modo. Se quisermos comprometer-nos com essa tese, então o mais interessante seria buscar erigir e defender um sistema que, como dito, incorpore a revogação do princípio da identidade e as principais características da referida tese da não reflexividade, quais sejam, a ausência de identidade para algumas entidades e a proposta de haver uma relação de indistinguibilidade que não colapsa na identidade usual. Assim, mesmo que esse aparato conceitual seja interpretável em uma teoria de conjuntos clássica, ele também pode ser visto como conceitualmente irredutível a ela. A situação é semelhante ao que ocorre, por exemplo, com a lógica proposicional intuicionista. Mesmo que de um ponto de vista formal ela possa ser vista como um subsistema da lógica proposicional clássica, excetuando-se o axioma clássico que corresponde ao princípio do terceiro excluído, do ponto de vista dos intuicionistas, os dois sistemas são completamente diferentes. Do mesmo modo, uma lógica não reflexiva, por englobar certas teses de natureza metafísica, não pode ser vista como uma parte da lógica clássica, mesmo que formalmente essa interpretação tenha sentido. Conceitualmente, são sistemas muito diferentes, que englobam concepções bastante diferentes acerca da natureza dos objetos com os quais estão tratando.

7 A não reflexividade e a mecânica quântica

As últimas discussões podem ser vistas em diferente perspectiva também se trouxermos aqui novamente o dilema apresentado anteriormente em nosso trabalho, dilema que consiste no seguinte: diante de uma dificuldade conceitual na qual a lógica clássica, em sentido amplo, por um lado, aparece garantindo a individualidade de todas as entidades com as quais ela trata, e a mecânica quântica, baseada nessa lógica, por outro lado, pode ser interpretada como apontando em direção diversa, isto é, sugerindo uma ontologia de não indivíduos, temos duas escolhas possíveis. Podemos manter a lógica clássica e esforçarmo-nos para tornar as principais características das entidades quânticas compatíveis com ela, fazendo os ajustes em outros lugares, ou podemos mudar a lógica e começar com uma linguagem aparentemente mais adequada para expressar esse tipo de compromisso. Nesta segunda opção, então, estaríamos englobando já no nível da lógica aquilo que a teoria, segundo nossa interpretação, parece demandar.

Uma primeira observação a ser feita é que, como vimos, a linguagem da teoria de conjuntos clássica, ZFC e ZFU, é poderosa o suficiente para nela simularmos certa forma de não reflexividade. Nesse sentido, "mudar de lógica" também é algo que deve ser propriamente esclarecido, pois, no caso das construções que acabamos de apresentar, a lógica permaneceu a mesma. A questão, no entanto, é que, conforme discutimos brevemente, é inegável o fato de que, de um ponto de vista filosófico, o compromisso com não indivíduos não pode ser expresso nessas teorias, isto é, preservando-se a intuição a seu respeito, apesar de que podemos interpretar certa forma de discurso acerca de não indivíduos. Claro, conforme a discussão feita nas seções anteriores, esse fenômeno é uma simples consequência do fato de que a lógica subjacente nessas construções permanece sendo a lógica clássica, e esta, mesmo que localmente nos permita falar de não indivíduos, globalmente é uma lógica tratando de objetos individualizáveis no sentido já discutido. Isso levanta a questão acerca, não apenas da adequação deste e outros tipos de representação de uma ontologia de não indivíduos, mas também, das diferentes formas que a não reflexividade pode assumir em diferentes contextos e acerca do interesse filosófico que se pode originar com esse tipo de estudo.

Tratemos primeiramente da questão que poderia surgir no que diz respeito ao fato de não haver uma única forma de fundamentação não reflexiva para a mecânica quântica. Como já mencionamos anteriormente, a não reflexividade, conforme a estamos entendendo aqui, é principalmente uma tese metafísica acerca da natureza de certas entidades. O fato de que existem diversas formas de representar formalmente esse tipo de posição é simplesmente um reflexo da vagueza que tradicionalmente acomete os termos cruciais para esse tipo de debate filosófico e que, consequentemente, por sua vez, podem ser tornados mais precisos de diversas formas. Se entendermos ainda que uma lógica não reflexiva pode ser caracterizada como um sistema que viola alguma forma do princípio da identidade, outras tantas formas de lógicas não reflexivas poderiam ser erigidas, cada uma delas podendo ser utilizada para diferentes propósitos. No caso em questão, como estamos buscando nossas motivações na mecânica quântica, temos que muitas dessas formas não serão adequadas para nossos propósitos.

Começando agora a tratar da questão sobre o interesse filosófico das construções aqui desenvolvidas, mesmo tendo sido realizadas utilizando-se o aparato conceitual clássico, e, assim, sem expressar compromisso com não indivíduos no sentido desejado, servem propósitos que extrapolam uma mera curiosidade matemática. Ambas fornecem um quadro conceitual no qual uma formulação não reflexiva da mecânica quântica pode ser erigida. Mesmo que nesses universos conjuntistas (referimo-nos, em particular, aos apresentados acima) a identidade dos objetos tratados possa sempre ser utilizada quando consideramos as entidades de um ponto de vista global, *dentro* dos universos vale uma forma de não reflexividade, e a construção de uma formulação não reflexiva, utilizando apenas os recursos desses universos, possui grande interesse filosófico, por ser testemunha de que esse tipo de empreendimento pode efetivamente ser levado a cabo. Assim, em vez de depor contra a possibilidade de tal formulação pelo fato de respeitar a identidade globalmente, esse tipo de trabalho serve, no mínimo, como um caso particular evidenciando que a identidade não é indispensável em geral.

De fato, argumentar em favor da dispensabilidade de determinadas ferramentas conceituais é um aspecto crucial de qualquer empreendimento que busca violar alguma lei da lógica clássica. No caso da lógica não reflexiva, pelo fato haver derrogação da teoria da identidade, a qual parece uma relação tão fundamental em qualquer esquema conceitual que busque dar conta da realidade, temos que a própria inteligibilidade do projeto poderia ser questionada. No entanto, como estivemos argumentando, o fato de podermos apresentar uma possível construção da teoria quântica em um *framework* não reflexivo parece opor-se a qualquer contra-argumento nesse sentido. O que nos interessa, ao apresentarmos tais formulações, e, de fato, o que aparentemente seria um núcleo mínimo de exigências para formulações distintas da usual para uma teoria física, é simplesmente que seja empiricamente equivalente às formulações tradicionais da teoria e que não seja trivial, no sentido de que todas as fórmulas da teoria, na formulação em questão, sejam deriváveis. Assim, se uma formulação não reflexiva satisfizer esses requisitos, teremos assegurado que, por direito, uma versão não reflexiva da mecânica quântica está em pé de igualdade com a formulação clássica, mesmo que não seja aquela que é utilizada de fato pelos físicos, e poderemos tranquilamente nos concentrar no estudo de seus aspectos metafísicos, que são aqueles que motivaram a construção de qualquer modo.

8 A mecânica quântica não reflexiva

Nesta seção, daremos uma idéia de como podemos "erigir uma mecânica quântica" usando a teoria de quase conjuntos, seguindo Domenech e colaboradores (2008). A idéia básica dessa teoria, repitamos aqui, é a de possibilitar a consideração de coleções, quase conjuntos, de objetos indiscerníveis, para os quais não se aplica o conceito usual de identidade. Com isso, ainda que tais coleções tenham um cardinal, denominado de quase cardinal, não terão um ordinal corresponde. Em outras palavras, os elementos de tais quase conjuntos não poderão ser ordenados, identificados e nomeados. Isso está em perfeita sintonia com a interpretação usual de Copenhague do formalismo quântico, como já tivemos a oportunidade de comentar acima. A teoria é forte o suficiente para que ZFC possa ser nela interpretada, como vimos, de forma que todo o aparato da matemática clássica que precisamos (espaços de Hilbert, probabilidades etc.) esteja disponível. A novidade é exatamente no tocante à possibilidade da existência de não-indivíduos, e é precisamente nesse quesito que a nossa interpretação se faz presente. Portanto, assumiremos o formalismo standard da mecânica quântica ortodoxa, mas modificaremos adequadamente algumas pressuposições, como veremos, de modo a inserirmos *ab initio* a noção de indiscernibilidade.

Consideremos o quase conjunto $\underline{e}=[e_i]_{i\in I}$ onde I é um conjunto arbitrário de índices e os e_i são conjuntos - logo, $\underline{e}$ é um conjunto -,[16] ou seja, satisfazem o predicado Z da linguagem da teoria de quase conjuntos. Para nós, os elementos e_i representarão os autovalores de algum operador hermitiano que, por sua vez, representa alguma magnitude física de interesse. Por exemplo, podem ser os valores de energia do hamiltoniano H do sistema considerado, isto é, $H|\psi_i = e_i|\psi_i\rangle$, com $|\psi_i\rangle$ sendo os autovetores correspondentes.

Tomemos agora uma coleção de quase funções $f : \underline{e} \rightarrow \Gamma_p$ onde Γ_p é um quase conjunto formado, por uma coleção suficientemente ampla de quase conjuntos finitos e

16 Na teoria de quase conjuntos, as coleções em geral (quase conjunto) são escritas com "[" e "]", e reservamos o usuais parênteses ("{" e "}") para conjuntos estrito senso.

puros, isto é, seus elementos são m-átomos. Os elementos de uma de tais funções são pares ordenados, no sentido da teoria de quase conjuntos, $\langle e_i,x\rangle$, com $e_i \in \underline{e}$ e $x\Gamma_p$. Ademais, escolhemos essas funções de forma que, se $\langle e_i,x\rangle \in f$ e $\langle e_j,y\rangle \in f$, com $i \neq j$, então x e y não têm elemento comum. Outra hipótese que fazemos é que o quase cardinal de x é zero, exceto para uma quantidade finita de elementos na imagem de cada f. Seja agora $\mathfrak{I}$ o quase conjunto de todas as funções f especificadas como acima. Se $\langle e_i,x\rangle \in f \in \mathfrak{I}$, interpretamos este par ordenado dizendo que o nível de energia e_i tem número de ocupação qc(x). Isso posto, podemos representar as quase funções f escrevendo $fe_{i1}e_{i2}\ldots e_{in}$, e isso indica que os níveis $e_{i1},\ldots,e_{in}$ estão ocupados; não representamos os níveis não ocupados. Convencionamos que, se o símbolo e_j aparece k vezes, então o nível e_j tem número de ocupação k. Por exemplo, em $fe_{i1}e_{i1}e_{i1}e_{i2}e_{i2}e_{i3}$, o nível e_{i1} tem número de ocupação 3, o nível e_{i2} tem número de ocupação 2, e o nível e_{i3} tem número de ocupação 1. Obviamente, os níveis que não figuram têm número de ocupação igual a zero. Essas quase funções serão utilizadas para representar estados quânticos em nosso formalismo.

A importância de considerarmos esse esquema dentro da teoria de quase conjuntos reside no fato de que, tendo em vista a possível indiscernibilidade dos objetos quânticos, podemos restringir-nos a considerar unicamente os números de ocupação, sem que precisemos recorrer, como no formalismo usual, a índices para os objetos quânticos, o que lhes proporciona uma forma de individualidade, pois, conforme discutimos anteriormente, a possibilidade de ser rotulado e nomeado pressupõe, de certa forma, um princípio de individuação. Consideremos a função $fe_{i1}e_{i1}e_{i1}e_{i2}e_{i2}e_{i3}$ uma vez mais. Fica patente que nenhuma permutação de objetos que pertençam ao nível e_{i1} ocasiona qualquer alteração na função, e o mesmo se dá com os demais níveis que contenham mais de um objeto. Ou seja, a ordenação dos objetos em um mesmo nível não tem aqui qualquer significado físico. Porém, as ordenações são por vezes necessárias. Chamaremos de Sup(f) o *suporte* de f, ou seja, ao quase conjunto, cujos elementos são os pares $\langle e_i,x\rangle$, com $qc(x) \neq 0$. Consideremos agora funções $o : \{e_1,\ldots,e_n\} \to \{1,\ldots, n\}$ - lembremos que os e_i são conjuntos, portanto, a definição faz perfeito sentido. Essas funções definem uma ordem em Sup(f). Seja $O\mathfrak{I}$ o quase conjunto de todos os pares da forma $\langle o,f\rangle$, com o e f como antes. Por abuso de linguagem, continuaremos a escrever coisas como $fe_{i1}e_{i2}\ldots e_{in} \in O\mathfrak{I}$, para indicar que temos uma f com uma determinada ordenação entre seus índices.

De acordo com o formalismo padrão, que supomos conhecido, necessitamos de espaços de Hilbert para representar os estados dos sistemas físicos. Como ficaremos restritos ao caso de dimensão finita, basta que levemos em conta espaços vetoriais com produto interno. Assim, construiremos na teoria de quase conjuntos um tal espaço - na verdade, dois deles, um para bósons e outro para férmions - a partir das noções introduzidas acima nesta seção. Para tanto, seja C a coleção de todas as quase funções que associam um número complexo a cada quase função em $\Im$ ou em $O\Im$, e seja λ um número complexo. Seja ainda $C_o \subseteq C$ tal que, se $c_o \in C_o$, então $c_o(f)=0$, exceto para um número finito de quase funções. Definiremos sobre C_o operações compatíveis com a estrutura de espaço vetorial e posteriormente os produtos internos.

Definição. Sejam α, β, γ quase funções em C e sejam c, c_1, c_2 em C_o. Pomos:
i. $(\lambda \bullet c)(f) := \lambda.(c(f))$, onde no segundo membro aparece o produto de números complexos, e
ii. $(c_1+c_2)(f) := c_1(f) + c_2(f)$.

É simples constatar, por exemplo, que a quase função c_o definida por $c_o(f)=0$ para toda f é elemento neutro para a adição definida. Com efeito,

$$(c_o+c)(f)=c_o(f)+c(f)=0+c(f)=c(f)=c(f)+0=c(f)+c_o(f)=(c+c_o)(f), \text{ para toda } c\in\Im).$$

É um exercício bastante simples mostrar que, com as operações acima, $\langle C_o, C, +, \bullet\rangle$ é um espaço vetorial complexo, sendo C o corpo dos números complexos. A interpretação a ser dada para as quase funções em C_o é a seguinte. Se $c\in C_o$ é uma quase função distinta (discernível) de c_o que cumpre $c(f_i)=\lambda_i\neq 0$, podemos representá-la escrevendo $\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\ldots+\lambda_n f_n$. A idéia subjacente é a de que a quase função c representa um estado puro que é a combinação linear dos estados representados pelas quase funções f_i. Por exemplo, se $c_j(f_i)=\delta_{ij}$ – isto é, o delta de Kronecker –, então cada c_j pode ser representada pela correspondente f_j. De forma similar, representamos os produtos $\lambda\bullet c_j$ por λf_j. Fica patente que os "vetores" c_j formam uma base para o espaço vetorial definido acima. Mas, o que dizer do produto interno?

Definição. Sejam $fe_{i1}\ldots e_{in}$ e $fe_{i'1}\ldots e_{i'm}$ duas quase funções em C_o. Pomos

$$\langle fe_{i1}\ldots e_{in} \mid fe_{i'1}\ldots e_{i'm}\rangle_B := \delta_{nm}\Sigma_p(\delta_{i1pi'1}\delta_{i2pi'2}\ldots\delta_{inpi'n})$$

onde pi'j denota uma permutação de i'j. Fica patente que o produto interno de duas funções quaisquer tem como resultados possíveis apenas 0 e 1, e será 0 sempre que $n\neq m$ ou se o número de ij for distinto do número de i'j. Por exemplo, $\langle fe_{i1}e_{i2} \mid fe_{i'1}e_{i'2}e_{i'3}\rangle_B=\langle fe_{i1}e_{i1}e_{i2} \mid fe_{i'1}e_{i'2}\rangle_B=0$, enquanto $\langle fe_{i1}e_{i1}e_{i2} \mid fe_{i'1}e_{i'1}e_{i'2}\rangle_B=1$. O subíndice "B" refere-se a bósons.

Para representar os estados de férmions, temos o seguinte produto interno.

Definição. Nas condições anteriores, pomos

$$\langle fe_{i1}\ldots e_{in} \mid fe_{i'1}\ldots e_{i'm}\rangle_F := \delta_{nm}\Sigma_p\sigma_p(\delta_{i1pi'1}\delta_{i2pi'2}\ldots\delta_{inpi'n})$$

onde σ_p é 1ou -1 conforme a permutação seja par ou ímpar.

Obviamente, para que esses produtos sejam bem definidos, é necessário que as quase funções pertençam a $O\mathfrak{I}$, este foi o principal motivo pelo qual introduzimos a ordenação acima. Como consequência, $\langle\ |\ \rangle_B$ é simétrico, enquanto $\langle\ |\ \rangle_F$ é antissimétrico, e ambos, definidos para as quase funções base, podem ser estendidos para quase funções quaisquer nos espaços considerados (cf. Domenech *et al.*, 2008). Por outro lado, pode-se mostrar que, se os números de ocupação de uma quase função, no sentido definido acima, é maior ou igual a 2, então a norma dessa quase função, a norma induzida pelo produto interno correspondente, é nula e, portanto, uma tal quase função é ortogonal a qualquer outra.

O objetivo de introduzirmos esses dois espaços de Hilbert, que chamaremos de Q-espaços – todo espaço vetorial com produto interno e de dimensão finita é um espaço de Hilbert, ou seja, é completo relativamente à norma induzida pelo produto interno –, é possibilitar a referência a objetos quânticos sem que precisemos rotulá-los, como se faz no formalismo usual e, então, para que possam ser indiscerníveis, introduz-se postulados de simetria. Vejamos, em linhas gerais, como isso pode ser feito.

Comecemos mudando novamente a notação para uma mais conveniente. Escreveremos $|e_{i1}\ldots e_{in})$ para $fe_{i1}\ldots e_{in}$. Esta notação é próxima da que se usa no formalismo dos espaços de Fock, que é um tipo de espaço de Hilbert, da qual nos aproximaremos. Por meio de espaços de Fock, podemos considerar os fenômenos de criação e de aniquilação de partículas, e o número de partículas pode também ser variável, o que não é possível no formalismo padrão. Os espaços de Fock são a primeira porta, dentre várias que há, para que se adentre à teoria quântica de campos, ainda que permita tratar somente de campos livres, que não interagem (cf. French & Krause, 2006, cap.9; Merzbacher, 1974, p.508 ss.).

Definições.
(a) [Operadores de Aniquilação] $a_j|\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_j,\ldots,\alpha_n) := \sqrt{\alpha_j}|\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{j-1},\ldots,\alpha_n)$
(b) [Operadores de Criação] $a^+_j|\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_j,\ldots,\alpha_n) := \sqrt{(\alpha_j+1)}|\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{j+1},\ldots,\alpha_n)$
(c) [Comutação] $[a_i,a^+_j] := a_ia^+_j - a^+_ja_i$

Os seguintes resultados advêm (Domenech *et al.*, 2008):

Teorema.
(a) $[a_i, a^+_j] = \delta_{ij} I$ onde I é o operador identidade. Isso permite que usemos a notação $(a_i a^+_j - a^+_j a_i)|\psi\rangle = \delta_{ij}|\psi\rangle$.
(b) $[a_i, a_j] = [a^+_i, a^+_j] = 0$

Esses resultados permitem provar que as conhecidas relações de comutação e anticomutação (cf. Domenech *et al.*, 2008; Merzbacher, 1974, p. 515) podem ser derivadas em nosso formalismo, e daí todo o formalismo dos espaços de Fock. Importante salientar, ainda que não tenhamos providenciado aqui todos os detalhes, que as partículas - nome abreviado para nossos objetos quânticos, mas sem qualquer conotação para com o termo "partícula" tal como usado na física clássica - são tratadas sem qualquer referência a elas individualmente, uma vez que estamos lidando com quase funções. No formalismo padrão, não há como evitar referências a "partícula 1", "partícula 2" etc., e esses rótulos são depois mascarados, como já se disse, pela introdução de postulados de simetria. Há algum tempo, Michael Redhead e Paul Teller (cf. 1991, 1992; Teller, 1995, cap. 2, 3) sugeriram que o formalismo usual dos espaços de Fock serviria para eliminar essa não desejável rotulação das entidades quânticas. No entanto, a construção que fazem dos espaços de Fock é a padrão, que inicia com um determinado espaço de Hilbert que descreve os estados de uma determinada partícula. Ora, isso acarreta que está havendo uma identificação, o que evitamos no nosso formalismo elaborado na teoria de quase conjuntos. Com efeito, os vetores nos Q-espaços referem-se somente a números de ocupação, e os operadores de permutação funcionam como operadores de identidade, refletindo no formalismo a não observabilidade de permutações no sentido da teoria de quase conjuntos (cf. French & Krause, 2010, teorema 3.1). Em nosso formalismo, podemos representar quantidades observáveis como combinações lineares de operadores de criação e de aniquilação, evitando, desse modo, a indexação das partículas nas expressões de tais observáveis. Apesar de nosso formalismo ser equivalente ao usual, via espaços de Fock, para todos os propósitos físicos, conceitualmente há diferenças acentuadas. Com efeito, nossa construção evita a rotulação das entidades e, dessa forma, podemos tratar de indiscerníveis sem o recurso de postulados de simetria. Como na teoria de quase conjuntos a noção de identidade não vale em geral, em especial não é universalmente válido o princípio da identidade na forma $\forall x(x=x)$, temos uma legítima fundamentação de uma mecânica quântica em uma lógica alternativa, mais precisamente, em uma lógica nãoreflexiva.

Newton Carneiro Affonso da Costa
Professor do Programa de Pós-Graduação em Filosofia,
Universidade Federal de Santa Catarina.
Bolsista de Produtividade em Pesquisa, Conselho Nacional de
Desenvolvimento Científico e Tecnológico, Brasil.
ncacosta@terra.com.br

Décio Krause
Professor do Programa de Pós-Graduação em Filosofia,
Universidade Federal de Santa Catarina.
Bolsista de Produtividade em Pesquisa, Conselho Nacional de
Desenvolvimento Científico e Tecnológico, Brasil.
deciokrause@gmail.com

Jonas Rafael Becker Arenhart
Professor Doutor do Programa de Filosofia,
Universidade Federal da Fronteira Sul,
Campus de Chapecó, Brasil.
jonas.becker2@gmail.com

Jaison Schinaider
Doutorando do Programa de Pós-Graduação em Filosofia,
Universidade Federal de Santa Catarina.
Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento
de Pessoal de Nível Superior, Brasil
jaisonsc@gmail.com

ABSTRACT

This is an expository article in which we discuss a cluster of topics related to the foundations of quantum physics, mainly regarding the concepts of identity and of individuality of the basic entities dealt with by the theory (or group of theories). We propose that, if one wants to ground the formal counterpart of a possible view of quantum entities as objects devoid of individuality, there are basically two possible alternatives: (a) to maintain classical logic and standard mathematics, say by using a set theory such as the Zermelo-Fraenkel system – in this case we can either assume certain symmetry conditions that enable us to speak about the non-individuality of the quantum entities, or restrict ourselves to certain classes in which only a weaker relation of indistinguishability is defined; (b) to elaborate a new mathematical theory, in which the non-individuality of certain objects is assumed *ab initio*. After discussing the first alternative by presenting "inner models" of ZFU and of ZFC set theories, in which identity is restricted in some way, we comment on its advantages and disadvantages. Then, motivated by the second hypothesis, we sketch the main aspects of what could be taken as a quantum mechanics grounded on a possible set theory, quasi-set theory, that departs from the standard systems. Since the underlying logic of quasi-set theory is a non-reflexive logic, we call the corresponding mechanics non-reflexive quantum mechanics.

Keywords • Identity. Individuality. Non-individuality. Quantum objects. Quasi-set theory. Non-reflexive logic. Non-reflexive quantum mechanics.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Adams, R. Primitive thisness and primitive identity. *Journal of Philosophy*, 76, p. 5-26, 1979.

Béziau, J. Y. What is the principle of indentity? (Identity, congruence and logic). In: Sautter, F. T. & Feitosa H. A. (Org.). *Lógica: teoria, aplicações e reflexões.* Campinas: UNICAMP, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, 2004. p. 163-72.

Brignole, D. & da Costa N. C. A. On supernormal Ehresmann-Dedecker universes. *Mathematische Zeitschrift*, 122, p. 342-50, 1971.

Cao, T. Y. (Ed.). *Conceptual foundations of quantum field theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

Castellani, E. (Org.). *Interpreting bodies: classical and quantum objects in modern physics*. Princeton: Princeton University Press, 1998.

Church, A. *Introduction to mathematical logic*. Princeton: Princeton University Press, 1956. v. 1.

Corsi, G. et al. (Org.). *Bridging the gap: philosophy, mathematics, physics*. Dordrecht: Kluwer Academy Press, 1993.

da Costa, N. C. A. *Ensaio sobre os fundamentos da Lógica*. São Paulo: Hucitec/EdUSP, 1980.

da Costa, N. C. A. & Bueno, O. Non reflexive logics. *Revista Brasileira de Filosofia*, 232, p. 181-96, 2009.

da Costa, N. C. A. & Krause, D. Schrödinger logics. *Studia Lógica*, 53, 4, p. 533-50, 1994.

____. An intensional Schrödinger logic. *Notre Dame Journal. of Formal Logic*, 38, 2, p. 179-94, 1997.

da Costa, N. C. A. & Rodrigues, A. M. N. Definability and invariance. *Studia Logica*, 86, p. 1-30, 2007.

Domenech, G. et al. D. Quasi-spaces and the foundations of quantum mechanics. *Foundations of Physics*, 38. p. 969-94, 2008.

Goldstein, S. Bohmian mechanics, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2009 Edition)*, 2006. Disponível em: <http://plato.stanford.edu/archives/spr2009/ entries/qm-bohm>. Acesso em: 17/ jan./2012.

Einstein, A. Apresentação. In: Jammer, M. *Conceito de espaço: a história das teorias do espaço na física*. São Paulo, 2010 [1953], p. 15-20.

French, S. & Krause, D. *Identity in physics: a historical, philosophical, and formal analysis.* Oxford: Oxford University. Press, 2006.

____. Remarks on the theory of quasi-sets. *Studia Lógica*, 95, 1-2, p.101-24, 2010.

Jammer, M. *Conceito de espaço: a história das teorias do espaço na física*. São Paulo: Livraria da Física Editora, 2010 [1953].

Ketland, J. Structuralism and the identity of indiscernibles. *Analysis*, 66, 4 p. 303-15, 2006.

Krause, D. & Bueno, O. Scientific theories, models, and the semantic approach. *Principia*, 11, 2, p. 187-201, 2007.

Lévy-Leblond, J. M. & Balibar, F. *Quantics: rudiments of quantum physics*. Amsterdam: North-Holland/ Elsevier, 1990.

Merzbacher, E. *Quantum mechanics*. New York: John Wiley & Sons, 1974.

Moreland, J. P. Theories of individuation: a reconsideration of bare particulars. *Pacific Philosophical Quarterly*, 79, p. 51-63, 1998.

Redhead, M. & Teller, P. Particles, particle labels, and quanta: the toll of unacknowledged metaphysics. *Found. Physics*, 21, p. 43–62, 1991.

____. Particle labels and the theory of indistinguishable particles in quantum mechanics. *British Journal of Philosophy of Science*, 43, p. 14-22, 201–18, 1992.

Rovelli, C. "Localization" in quantum field theory: how much of QFT is compatible with what we know about space-time? In: Cao, T. Y. (Ed.). *Conceptual foundations of quantum field theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. p. 207-32.

Saint Andrews University. *MacTutor's biography of Robert Recorde.* 2002. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Recorde.html>. Acessado em: 12/dez./2012.

Sautter, F. T. & Feitosa H. A. (Org.). *Lógica: teoria, aplicações e reflexões.* Campinas: UNICAMP, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, 2004.

Suppes, P. *Axiomatic set theory*. New York: Dover., 1960.

Teller, P. *An interpretive introduction to quantum field theory*. Princeton: Princeton University Press, 1995.

Uffink, J. E. & Hilgevoord, J. Interference and indistinguishability in quantum mechanics. *Physica B*, p. 309-13, 1988.

Van Fraassen, B. The problem of indistinguishable particles. In: Castellani, E. (Org.). *Interpreting bodies: classical and quantum objects in modern physics*. Princeton: Princeton University Press, 1998. 73-92.