

# Um Cálculo da Espessura da Camada Limite

A calculation of the boundary layer thickness

G. F. Leal Ferreira

CP 369, 13560-970, São Carlos, SP

Recebido em 15 de janeiro, 2002. Aceito em 1 de fevereiro, 2002.

Revisita-se o problema da camada limite viscosa sobre um perfil plano, derivando-se as equações de Prandtl e depois a de Blasius. Daí, através de procedimento simplificado, uma solução aproximada é obtida cuja precisão ombreia com aquela fornecida pelo conhecido método de von Kármán.

The viscous boundary layer problem over a plane is re-visited and the Prandtl system and the Blasius equation are derived. From the latter, a simplified solution is obtained which shows to be close to that generated by the well known von Kármán method.

## I Introdução

Em artigo recente nesta revista [1], discutiu-se a questão do perfil de velocidade horizontal na camada limite. Para os leitores menos familiarizados com este conceito, ele foi introduzido por Prandtl no início do século passado [2] para descrever a região de contacto entre um fluido incompressível (=líquido, ou fluido simplesmente) em movimento em relação a um sólido. O líquido adere, por viscosidade, ao sólido a partir da linha de contacto e atinge, na direção normal, a distâncias crescentes - a espessura variável da camada limite -, a velocidade do líquido não perturbada,  $U$ . Estamos já imaginando, por simplicidade, que o líquido se desloca em relação a um plano de espessura desprezível em cuja borda de entrada a velocidade é zero. A camada limite é aí também zero, e vai crescendo (direção  $y$ ) à medida que o líquido avança na direção  $x$ . Prandtl [1] admitiu que a velocidade horizontal  $u(x,y)$  é da forma  $Uf(\frac{y}{\delta(x)})$ , em que  $\delta(x)$  é a espessura da camada limite em  $x$ . A função  $f$  satisfaz certas condições de contorno [1], que serão especificadas adiante. O interesse no presente trabalho é a determinação de  $\delta(x)$ .

## II Fluxos horizontal e vertical na camada limite

Como mencionado acima, o perfil de velocidade horizontal  $u(x,y)$  é suposto da forma

$$u(x,y) = Uf(\eta) \quad (1)$$

sendo  $\eta = \frac{y}{\delta(x)} = a(x)y$ , ou seja,  $a(x) = \frac{1}{\delta(x)}$ , com  $f(0) = 0$  e  $f(1) = 1$ .

A Fig. 1 mostra esquematicamente o fluido se aproximando da placa plana, fixa, P, com velocidade uniforme  $U$  e atingindo-a em O, a partir de onde se mede a abscissa  $x$ . A curva (em verdade, superfície) C delimita a região do fluido fortemente perturbado, contemplado na aproximação, sendo  $\delta(x)$ , a espessura da camada limite, a grandeza que queremos calcular. No elemento  $dx$ , a velocidade horizontal do fluido  $u(x,y)$  obedece a Eq.1. É interessante notar que para  $y$  constante, a velocidade  $u$  diminui para  $x$  crescente (derivada de  $u$  para  $y$  constante) e sendo o fluido incompressível, isto significa que há também um movimento vertical,  $v(x,y)$ , que em  $\delta(x)$  atravessa C. Pela equação da continuidade

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

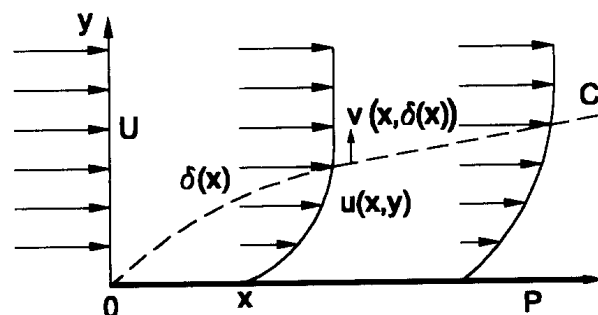


Figura 1. O líquido, com velocidade  $U$  atinge a placa OP. A curva C delimita a camada limite.  $u(x,y)$  é a velocidade horizontal e  $v(x,\delta(x))$  indica, genericamente, a velocidade vertical ao longo de C.

e da Eq.1

$$\frac{\partial u}{\partial x} = Uyfa' \quad (3)$$

em que o ponto significa derivada em relação a  $\eta$  e a linha, derivada em relação a  $x$ . Na maioria dos casos, as variáveis  $\eta$  e  $x$  não serão mostradas explicitamente. Da Eq.2

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -Uy\dot{f}a' \quad (4)$$

ou

$$\partial v = -Uy\dot{f}a'\partial y \quad (5)$$

Mas para  $x$  constante, temos  $y = \frac{x}{a}$  e  $\partial y = \frac{dx}{a}$  e a Eq.5 integrada dá

$$\begin{aligned} v &= -U\frac{a'}{a^2} \int_0^\eta \dot{f}\eta d\eta = -U\frac{a'}{a^2} \int_0^\eta \eta df \\ &= -U\frac{a'}{a^2} (\eta f - \int_0^\eta f d\eta) \end{aligned} \quad (6)$$

É razoavelmente intuitivo que  $v(x, \delta(x))$  deve ser bem menor que  $U$  na aproximação proposta. De outra forma, isto é, se  $u$  e  $v$  fossem da mesma ordem, nenhuma aproximação poderia ser tentada. Supondo-se ser este o caso, e 1) considerando-se os termos no parêntesis da Eq.6 como da ordem da unidade, e 2) que  $a(x) = \frac{1}{\delta(x)}$ , vê-se que

$$v \simeq U\delta'(x) \quad (7)$$

e, então, concluímos que

$$\delta'(x) \ll 1 \quad (7')$$

### III A Equação de Prandtl

Tratando-se de escoamento viscoso, devemos usar a Equação de Navier-Stokes. Notemos, porém, que pela Eq.3

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -U\eta\dot{f}\frac{\delta'(x)}{\delta(x)} \quad (8)$$

é da ordem de  $U\frac{\delta'(x)}{\delta(x)}$ , de ordem inferior a  $\frac{\partial u}{\partial y}$ , que é da ordem de  $\frac{U}{\delta(x)}$ . Portanto as derivadas horizontais de  $u$  podem ser desprezadas em frente às suas derivadas verticais.

Com isso, a Equação de Navier-Stokes (sem gradiente horizontal de pressão) se simplifica, havendo no termo de força viscosa somente a derivada segunda de  $u$  em relação a  $y$ . Ela é

$$\rho \frac{du(x(t), y(t))}{dt} \equiv \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v \right) = -\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (9)$$

sendo  $\rho$  a densidade do líquido e  $\mu$  a viscosidade. Apesar de  $v$  ser bem menor que  $u$ , os dois termos no parêntesis da Eq.9 são da mesma ordem de grandeza. Isto porque, por compensação,  $\frac{\partial u}{\partial x}$  é bem menor que  $\frac{\partial u}{\partial y}$ . A Eq.9 foi proposta por Prandtl [3].

## IV A Equação de Blasius

Blasius transformou a Eq.9 numa equação diferencial em  $\eta$ . Para isto, da Eq.3 temos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = U\eta\dot{f}\frac{a'}{a} \quad (10)$$

Da Eq.1

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Ufa \quad (11)$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = U\dot{f}a^2 \quad (12)$$

resultando para a Eq.9, com  $\mu_c = \mu/\rho$  o coeficiente de viscosidade cinemática,

$$U^2\eta\dot{f}\frac{a'}{a} - U^2\frac{a'}{a}\dot{f}(\eta f - \int_0^\eta f d\eta) = -\mu_c U\dot{f}a^2 \quad (13)$$

usando-se as Eqs.1,6,10-12. Notemos que ocorre cancelamento dos dois primeiros termos do lado esquerdo e que

$$\frac{Ua'}{\mu_c a^3} = -\frac{U\delta'(x)\delta(x)}{\mu_c} = -\frac{U}{2\mu_c} \frac{d\delta^2(x)}{dx} = -\frac{1}{K(x)} \quad (14)$$

em que se definiu  $K(x)$  uma função de  $x$ . Após um certo re-arranjo, a Eq.13 pode ser escrita assim

$$\frac{\dot{f} \int_0^\eta f d\eta}{\dot{f}} = K(x) \quad (15)$$

de onde se conclui que o lado esquerdo, função de  $\eta$ , e o lado direito, função de  $x$ , são iguais a uma constante, que chamaremos de  $K$ . Com

$$g(\eta) = \int_0^\eta f d\eta \quad (16)$$

a Eq.15 torna-se

$$\ddot{g} = K \ddot{g} \quad (17)$$

equação que Blasius procurou resolver [3]. Na verdade, por uma redefinição de  $g$ , o fator  $K$  na Eq.17 pode ser eliminado. Tomaremos, porém, aqui um outro rumo mais simples, procurando determinar  $K$  de uma forma aproximada pela Eq.17 e retornando depois à Eq.14 para a determinação de  $\delta(x)$ .

## V Determinação aproximada de $K$ e de $\delta(x)$

Vamos determinar  $K$  impondo um perfil aproximado para  $f(\eta)$ . Para a solução exata, a Eq.17 é satisfeita para todos os valores de  $\eta$ ,  $0 < \eta < 1$ . Com um perfil aproximado, vamos impor que a igualdade entre o lado esquerdo e direito da Eq.17 se dê em média, ou seja

$$\int_0^1 (\ddot{g}g - K \ddot{g}) d\eta = 0 \quad (18)$$

No tratamento usual do problema devido a von Kármán, no qual se iguala a perda de momento do líquido com o atrito viscoso sobre a placa, usa-se o perfil proposto por Prandtl, dado por

$$f(\eta) = \frac{1}{2}(3\eta - \eta^3) \quad (19)$$

que satisfaz as condições especificadas abaixo da Eq.1 (isto é,  $f(0) = 0$  e  $f(1) = 1$ ) e, adicionalmente,  $f'(1) = 0$ , ou seja, a velocidade horizontal, Eq.1, atinge suavemente o valor  $U$  em  $C$ . Das Eqs.16 e 19 obtêm-se

$$g = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2}\eta^2 - \frac{1}{4}\eta^4 \right) \quad (20)$$

$$\ddot{g} = \frac{3}{2}(1 - \eta^2) \quad (21)$$

$$\ddot{\ddot{g}} = -3\eta \quad (22)$$

e substituindo-se as Eqs.20-22 na Eq.16, obtém-se

$$K = \frac{13}{140} \quad (23)$$

e retornando-se à Eq.14, tem-se agora

$$\frac{d\delta^2(x)}{dx} = \frac{280\mu_c}{13U} \quad (24)$$

ou seja,

$$\delta(x) = 4,64 \sqrt{\frac{\mu_c x}{U}} \quad (25)$$

O fato de  $\delta(x)$  ser inversamente proporcional a  $U$  e a  $\rho$ , este através de  $\mu_c$ , mostra que as forças inerciais têm um papel preponderante na formação da camada, ou seja, uma maior densidade de momento do líquido impõe camada limite mais fina. A força viscosa sobre a placa deve ser, grosso modo, diretamente proporcional a  $U$  e inversamente proporcional a  $\delta(x)$ . Vemos, então, que a força de arraste sobre a placa, de acordo com Eq.25, vai com  $U^{\frac{3}{2}}$ .

## VI Comentários

A solução de von Kármán [2] leva ao coeficiente numérico 4,65 na Eq.25 (não sabemos se ela é matematicamente equivalente àquela dada acima e a diferença, 4,65 e 4,64 adviriam de aproximações diferentes). Por outro lado, a de Blasius, a partir da equação diferencial da Eq.17 [3], por solução em série, dá o valor convencionalizado de 4,52.

Mesmo para escoamentos turbulentos, há formação de camada limite viscosa na região próxima de  $x = 0$  [2]. Tomando-se escoamento de água, com  $\mu_c \simeq 1,2 \cdot 10^{-2}$  cm<sup>2</sup>/s, com velocidade de 1 m/s, para a qual já há turbulência, a Eq.25 dá para  $\delta(x) \approx 5 \cdot 10^{-2} \sqrt{x}$  cm, isto é, uma camada bem estreita.

O que aconteceria se usássemos para o perfil de velocidades  $f(\eta)$ , Eq.19, um polinômio de ordem superior a três, mantendo-se as mesmas três condições de contorno abaixo da Eq.19, como determinado em [1]? Evidentemente, o perfil dependeria agora de um parâmetro extra,  $b$ ,  $f(\eta, b)$ . Obtidos, então, os correspondentes  $g$ ,  $\dot{g}$ ,  $\ddot{g}$ , a Eq.18 forneceria uma função, vamos dizer,  $H(K, b) = 0$ . Impondo-se agora um mínimo (na verdade um extremo) para  $H(K, b)$ , isto é,  $\partial H / \partial b = 0$ ,  $K$  poderá ser determinado. Quer dizer, a eventual arbitrariedade na definição do perfil pode ser eliminada 'dinamicamente' pela Eq.18 e imposição de um mínimo em relação aos parâmetros excedentes.

Por fim, vamos testar se a condição de validade da aproximação na Eq.7' de fato se verifica. Temos

$$\delta'(x) = 2,33 \sqrt{\frac{\mu_c}{Ux}} \ll 1 \quad (26)$$

mostrando que para pontos próximos à borda de entrada (ponto O na Fig.1) a aproximação não é boa. Para o caso do escoamento considerado acima, isto ocorreria para  $x \ll 6,5 \cdot 10^{-4}$  cm. Como a perturbação causada pela própria borda não foi considerada, isto parece não prejudicar muito a solução, que seria válida para  $x$  suficientemente grande, eventualmente transicionando para a camada limite turbulenta, para  $x$  ainda maiores [2].

### Agradecimentos

O autor agradece ao CNPq a bolsa de produtividade.

### Referências

- [1] Katia B. de Lacerda e A. E. A. Amorim, Rev. Brasil. Ensino Física, textbf23, 196 (2001).
- [2] Victor L. Streeter, *Mecânica dos Fluidos*, Editora McGraw-Hill do Brasil, Ltda., 1974, Cap.V.
- [3] J. W. Daily e D. R. F. Harleman, *Fluid Dynamics*, Addison-Wesley Publ. Co. Inc., 1973, Cap.10.