

Um Cálculo Aproximado do Poder das Pontas

An approximate treatment for the strenght of the points

G. F. Leal Ferreira

FCM, IFSC, USP

CP 369, 13560-970, São Carlos, SP

Recebido em 27 de fevereiro, 2002. Aceito em 3 de abril, 2002.

Cálculo aproximado do potencial e da densidade de carga de um condutor quase cilíndrico eletrizado é realizado seguindo método desenvolvido por Maxwell em seu *Treatise* para condutores quase esféricos. Com isso, é possível obter relações diretas entre densidade de carga e curvatura para casos simples. O plano carregado, levemente corrugado, é também abordado.

An approximate treatment of the potential and of the charge density of a quasi-circular conducting cylinder is carried out along the line proposed by Maxwell in his 'Treatise' for quasi-spherical conductors. This allows us to establish relations between charge density and curvature in simple cases. The slightly corrugated charged plane is also treated.

I Introdução

Antigamente, o ensino da Eletrostática dava muita atenção ao estudo dos condutores eletrizados. Ilustrando o que se chama de 'o poder das pontas' figurava mesmo o torniquete elétrico em que, à semelhança do torniquete hidrodinâmico, que gira com a ejeção de água, aquele gira ao ser ligado a uma fonte de tensão. A eletricidade se acumula nas pontas, o campo elétrico ioniza o ar e a repulsão entre as cargas da ponta e as ionizadas de mesmo sinal faz o torniquete girar em sentido oposto ao da ponta, como se fosse movido, pela reação ao 'vento elétrico' [1] criado pela ponta.

Mais geralmente, o 'poder das pontas' significa a preferencial acumulação de carga nas regiões de maior curvatura da superfície do condutor eletrizado, fato que pode ser constatado experimentalmente com o auxílio do 'plano de prova' [2,3]- um disco maleável, manuseado com um isolante, que se aplica à superfície do condutor, em variadas regiões da mesma. Do ponto de vista teórico, a justificação do poder das pontas é mais difícil porque exige correlacionar em geral a função potencial nas vizinhanças do condutor com as propriedades geométricas da superfície. Aqui faremos uma abordagem bem mais modesta ao problema, aproveitando uma solução aproximada dada por Maxwell em seu *Treatise* [4] do potencial de um condutor quase esférico, adaptada aqui para o caso de cilindros quase circulares, procurando obter a densidade de carga e relacionando-a

com a curvatura, que, no presente caso, é única.

II Solução aproximada: o potencial

A solução aproximada proposta no *Treatise* [4], adaptada ao nosso caso, é a seguinte.

Seja o cilindro 'quase circular de equação polar, r e θ , $-\pi < \theta < \pi$,

$$r = a(1 + \varepsilon f(\theta)) \quad (1)$$

em que ε é pequeno comparado com 1 e a é o raio médio (ou seja, $\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta = 0$). Admitiremos que $f(\theta)$ é suficientemente regular e que é representado por uma série de Fourier

$$f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (h_n \cos n\theta + g_n \sin n\theta) \quad (2)$$

Como solução geral da Equação de Laplace, o potencial criado pelo condutor carregado pode ser expresso por

$$V(r, \theta) = V_0 + A_0 \log \frac{r}{a} + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta}{r^n} \quad (3)$$

em que V_0 é o potencial do condutor e ε marca aqueles termos que se anulam quando o condutor é perfeitamente circular. Desejamos determinar A_n e B_n .

Na superfície do condutor (e no seu interior), $V(r, \theta) = V_0$ e também podemos escrever

$$\log \frac{r}{a} = \log(1 + \varepsilon f(\theta)) \simeq \varepsilon f(\theta) \quad (4)$$

Como o somatório da Eq. 3 já contém ε , o denominador r^n pode ser aproximado para a^n e obtém-se

$$0 = \varepsilon A_0 f(\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{a^n} (A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{sen} n\theta); \quad (5)$$

ou tendo em conta a Eq.2

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} [(A_0 h_n + \frac{A_n}{a^n}) \cos n\theta + (A_0 g_n + \frac{B_n}{a^n}) \operatorname{sen} n\theta] \quad (6)$$

de onde, por argumentos conhecidos, obtém-se

$$\frac{A_n}{a^n} = -A_0 h_n \quad (7)$$

e

$$\frac{B_n}{a^n} = -A_0 g_n \quad (8)$$

Em duas dimensões, o potencial do condutor não determina a solução no espaço: é a densidade de carga, A_0 , que o faz.

III A densidade de carga

A densidade de carga, σ , no CGS, é obtido de

$$4\pi\sigma = -\frac{\partial V}{\partial n} \quad (9)$$

n designando aqui a normal ao condutor. A direção de n e a direção de r diferem de um ângulo que, em radianos, é da ordem de ε , e como $\cos \varepsilon \simeq 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}$, para ε pequeno, e, então, podemos tomar a direção de n como sendo a de r . Então, aproximadamente,

$$4\pi\sigma = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{A_0}{r} + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{r^{n+1}} (A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{sen} n\theta) \quad (10)$$

Desenvolvendo-se $1/r$, com r dado na Eq. 1, como $a(1 - \varepsilon f(\theta))$ e no somatório fazendo-se $r^n \rightarrow a^n$, vem

$$4\pi\sigma = \frac{-A_0}{a} [1 - \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} (h_n \cos n\theta + g_n \operatorname{sen} n\theta)] + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a^{n+1}} (A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{sen} n\theta) \quad (11)$$

e substituindo-se os valores de A_n e B_n dados nas Eqs. 7 e 8, vem

$$4\pi\sigma = -\frac{A_0}{a} [1 - \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} (1 - n)(h_n \cos n\theta + g_n \operatorname{sen} n\theta)], \quad (12)$$

equação que mostra que o somatório efetivamente se inicia em $n = 2$, ou seja, que o termo para $n = 1$ 'que dá a posição do centro de massa do condutor, suposto de densidade uniforme, em relação à origem' [4] poderia ser eliminado *a priori* da Eq. 2. A Eq. 11 também mostra que para uma densidade de carga positiva, σ_0 , A_0 é negativo. Reescrevemos a Eq. 11 como

$$\sigma = \sigma_0 [1 + \varepsilon \sum_{n=2}^{\infty} (n - 1)(h_n \cos n\theta + g_n \operatorname{sen} n\theta)] \quad (13)$$

com $\sigma_0 = -A_0/4\pi a$.

IV O raio de curvatura

O raio de curvatura, R , em coordenadas polares é dado por [5]

$$R = \frac{(r^2 + r'^2)^{3/2}}{r^2 + 2r'r'' - rr'''} \quad (14)$$

onde r' e r'' significam derivadas primeira e segunda em relação a θ . Para a aproximação de 1a. ordem do nosso cálculo, vamos tomar $r^2 \simeq a^2(1 + 2\varepsilon f(\theta))$, $r' \simeq \varepsilon a f'(\theta)$, $r'' \simeq 0$, $rr' \simeq a(1 + \varepsilon f(\theta))\varepsilon a f''(\theta) \simeq \varepsilon a^2 f''(\theta)$, de maneira que R é

$$R = \frac{a(1 + 3\varepsilon f(\theta))}{1 + 2\varepsilon f(\theta) - \varepsilon f''(\theta)} \simeq a[1 + \varepsilon(f(\theta) + f''(\theta))] \quad (15)$$

ou tendo em conta a Eq. 2

$$R = a[1 - \varepsilon \sum_{n=2}^{\infty} (n^2 - 1)(h_n \cos n\theta + g_n \operatorname{sen} n\theta)] \quad (16)$$

A curvatura K igual a $1/R$ é

$$K = K_0 [1 + \varepsilon \sum_{n=2}^{\infty} (n^2 - 1)(h_n \cos n\theta + g_n \operatorname{sen} n\theta)] \quad (17)$$

com $K_0 = 1/a$, a curvatura média.

V Discussão

V.1 Casos “puros”

Casos “puros” são aqui definidos como aqueles em que um único n comparece na deformação do cilindro, seja ele m . Discutiremos o caso em que ela é do tipo $\cos m\theta$ com m par. $\cos m\theta$ tem m períodos angulares, cada um compreendendo ângulo de $\theta_p = 2\pi/m$. As pontas estarão em $\theta_{pk} = \pm 2\pi k/m$ e, entre elas, os vales (depressões) em $\theta_{vk} = \pm \pi(2k + 1)/m$, $0 \leq k \leq (m - 1)/2$. Com

$$r = a(1 + \varepsilon \cos m\theta) \tag{18}$$

tem-se para a densidade de carga e para a curvatura

$$\sigma = \sigma_0[1 + \varepsilon(m-1) \cos m\theta] \text{ e } K = K_0[1 + \varepsilon(m^2-1) \cos m\theta] \tag{19}$$

Escrevemos também a expressão do potencial $V(z)$, sendo $z = r - a$,

$$V(z, \theta) = V_0 - 4\pi\sigma_0 a \left[\log\left(1 + \frac{z}{a}\right) - \varepsilon \left(\frac{1}{1 + \frac{z}{a}}\right)^m \cos m\theta \right] \tag{20}$$

Na verdade, a curva $z(\theta)$ que faz $V(z)$ na Eq. 20 igual a V_0 só é dada pela Eq.17 na ordem de ε . Em ordens superiores de ε , ε^2 , ε^3 , etc., aparecerão harmônicos de ordem $m \pm 1$, $m \pm 2$, etc. Permaneceremos em primeira ordem.

Comparando-se a dependência angular de r , σ e K com m , vê-se que ela é mais forte para K , depois para σ e, em geral, mais fraca para r . Do valor de σ nas Eq. 19 vê-se que a diferença entre as densidades de carga nas pontas e nos vales é de $2\sigma_0\varepsilon(m-1)$, isto é, aumenta com o estreitamento do período, quando as pontas ficam, relativamente, mais aguçadas. Também das Eq. 19 vê-se que, aproximadamente, vale a relação

$$\frac{\sigma(\theta)}{\sigma_0} = \left(\frac{K(\theta)}{K_0}\right)^{\frac{1}{m+1}} \tag{21}$$

mostrando que para o caso puro pode-se escrever uma relação direta entre a densidade e a curvatura. Por exemplo, para $m = 2$, quando o cilindro é elíptico, temos $\sigma(\theta) \approx \sqrt[3]{K(\theta)}$ e $\sigma(\theta) \approx r(\theta)$. Na Fig. 1 mostramos r/a , σ/σ_0 e K/K_0 para esse caso, $m = 2$, com $\varepsilon = 0,1$ e na Fig. 2, para $m = 4$, com $\varepsilon = 0,05$.

V.1.1 Placa plana levemente corrugada

Para um dado valor de m , o período angular é $\theta_p = 2\pi/m$, como visto acima, e o arco correspondente, l , é

$$l = \frac{2\pi a}{m} \tag{22}$$

Como em 1ª ordem todas as grandezas tem esse único período, só necessitamos do que ocorre no período

em torno da origem, $-\pi/m \leq \theta \leq \pi/m$, para descrever as grandezas tomemos nele o arco x , correspondendo a $\theta = x/a$. Teremos

$$m\theta = \frac{mx}{a} = \frac{2\pi x}{l} \tag{23}$$

Façamos, agora, o raio a crescer e nos mantenhmos nas vizinhanças da superfície do cilindro. Devemos fazer também m crescer para que l se mantenha finito, Eq. 22. Teremos uma superfície praticamente plana, levemente corrugada, isto é, $\varepsilon a = b_0 \ll l$. A Eq.20 para o potencial, na aproximação $z \ll a$, é

$$V(z, \theta) = V_0 - \frac{4\pi a \sigma_0 z}{a} + \frac{4\pi \sigma_0 a \varepsilon \cos m\theta}{1 + m \frac{z}{a}} \tag{24}$$

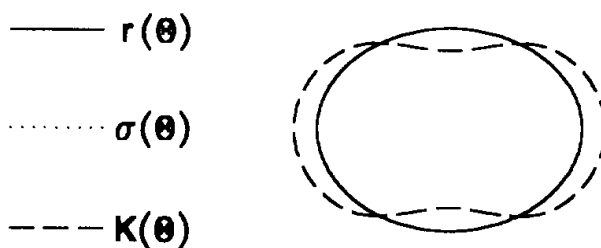


Figura 1. Gráfico polar para $r(\theta)$, $\sigma(\theta)$ e $K(\theta)$, normalizados à unidade, para $r(\theta) = 1 + 0,1 \cos 2\theta$. Traço cheio para $r(\theta)$, pontilhado para $\sigma(\theta)$ - que nesse caso coincide com o de $r(\theta)$ -, e tracejado para $K(\theta)$.

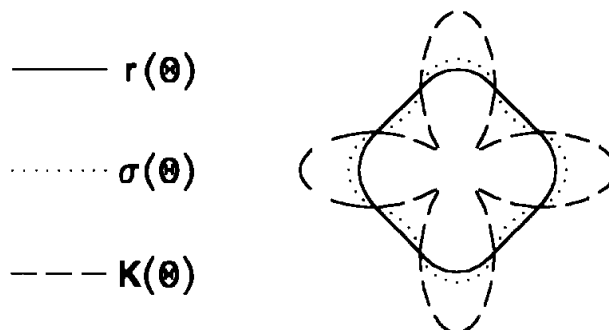


Figura 2. O mesmo que na Fig.1, para $r(\theta) = 1 + 0,05 \cos 4\theta$.

Em primeiro lugar, notemos, ao passarmos da solução cilindro à solução plano, que esta herda daquela a condição de campo nulo no interior do cilindro (essencialmente z negativo). Para corrigirmos isso, devemos pôr 2π em vez de 4π na Eq.23, com o que subtraímos o campo $2\pi\sigma_0$ ao primeiro termo da Eq.23 e obrigamos que o segundo cancele o primeiro para z na superfície do cilindro. Fazendo-se as substituições válidas para o caso $a \rightarrow \infty$, que são $a\varepsilon \rightarrow b_0$, $m\theta \rightarrow 2\pi x/l$, $m/a \rightarrow 2\pi/l$, tem-se finalmente

$$V(z, x) = V_0 - 2\pi\sigma_0 z + \frac{2\pi\sigma_0 b_0 \cos 2\pi \frac{x}{l}}{1 + \frac{2\pi z}{l}} \tag{25}$$

para a qual vale a observação do tipo feita abaixo da Eq.19.

V.2 Caso geral

Nas Figs. 3 e 4 mostramos $\sigma(\theta)$ e $K(\theta)$, normalizados, para $r/a = 1 + 0,05 \cdot (\cos 2\theta + 0,5 \cdot \cos 3\theta)$ e nas Figs.5 e 6, para $r/a = 1 + 0,05 \cdot (\cos 2\theta + 0,5 \cdot \cos 3\theta + 0,25 \cdot \cos 4\theta)$. Figs.3 e 5 são gráficos polares, incluindo-se também os de $r(\theta)/a$, enquanto as Figs. 4 e 6 são gráficos cartesianos. Vê-se que máximos e mínimos de $\sigma(\theta)$ e $K(\theta)$ se correlacionam perfeitamente, sempre com $K(\theta)$ mais proeminente. Aliás, $\sigma(\theta)$ está, em geral, mais próximo de $r(\theta)$ do que de $K(\theta)$, porém, a determinação de $r(\theta)$ depende da locação da origem e é, em termos práticos, menos acessível.

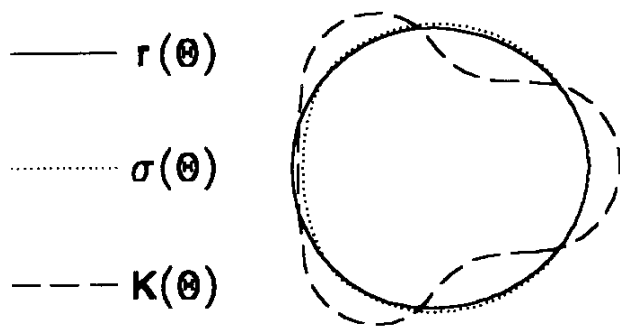


Figura 3. Mesmas convenções, para $r(\theta) = 1 + 0,05 \cdot (\cos 2\theta + 0,5 \cos 3\theta)$.

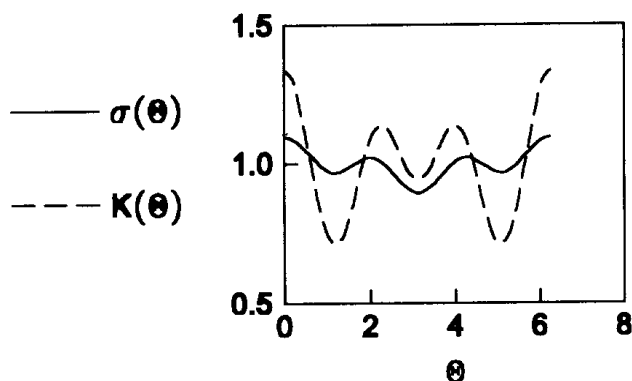


Figura 4. Gráfico cartesiano para comparação entre $\sigma(\theta)$ e $K(\theta)$, normalizados, para $r(\theta)$ da Fig.3. Traço cheio para $\sigma(\theta)$ e tracejado para $K(\theta)$.

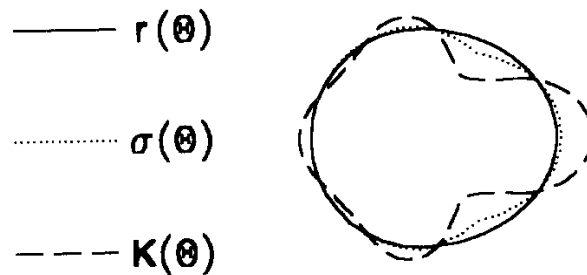


Figura 5. Mesmas convenções dos outros gráficos polares, para $r(\theta) = 1 + 0,05 \cdot (\cos 2\theta + 0,5 \cos 3\theta + 0,25 \cos 4\theta)$.

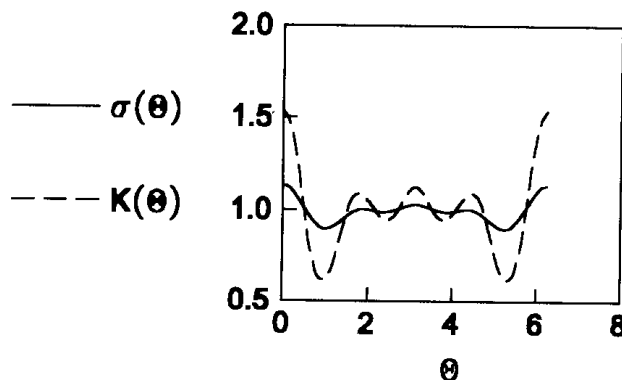


Figura 6. Como na Fig.4, para $r(\theta)$ da Fig.5.

Agradecimentos

O autor agradece a bolsa de produtividade do CNPq, e, muito especialmente, ao árbitro deste que, pacientemente, corrigiu inúmeros enganos em fórmulas na versão originalmente submetida.

Referências

1. G. Castelfranchi, *Fisica Sperimentale e Applicata*, Vol.II, Editore Ulrico Hoepli Milano, 1948, Cap.XVI
2. P. Fleury e J.-P. Mathieu, *Électrostatique, Courants Continues, Magnétostatique*, Éditions Eyrolles, 1962, Cap. III.
3. E. Perucca, *Física General y Experimental*, Tomo II, Editorial Labor, 1953, Cap. IV.
4. J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Dover Publ., 1954, Cap.9, seção 145 a.
5. André Delachet, *Géométrie Différentielle*, coleção *que sais-je?* n°.1104, Presses Universitaires de France, Cap.6.