Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 26, n. 3, p. 247 - 250, (2004)
www.sbfisica.org.br

Uma discussão sobre as densidades de energia em ondas mecânicas unidimensionais

(A discussion on the energy densities in one-dimensional mechanical waves)

Alexys Bruno-Alfonso [1] e Alexandro Silveira Florêncio

Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Paulista, Bauru, SP, Brasil

Recebido em 18/06/04; Aceito em 01/09/04

Estudam-se as médias temporais das densidades das energias cinética e potencial em ondas mecânicas unidimensionais. Demonstra-se que o movimento harmônico simples dos elementos do meio não é condição suficiente nem necessária para que aquelas médias sejam iguais. Isso contradiz as abordagens em textos de Halliday *et al.* e Nussenzveig.
Palavras-chave: onda mecânica, densidade de energia, valor médio, movimento harmônico simples.

The mean values (in time) of the kinetic and potential energy densities in one-dimensional mechanical waves are studied. It is shown that the simple harmonic motion of the particles is neither a sufficient nor a necessary condition for those mean values to be the same. This contrasts with the approaches in textbooks by Halliday *et al.* and Nussenzveig.
Keywords: mechanical wave, energy density, mean value, simple harmonic motion.

1. Introdução

O presente trabalho originou-se em uma discussão em sala de aula na Universidade Federal de São Carlos (Brasil), como parte do curso de Física B ministrado no ano 2000 por um dos autores (A.B.A.) às turmas de calouros de Física e Engenharia Física. No curso discutiram-se com detalhes matemáticos os fundamentos de Mecânica dos Fluidos, Oscilações e Ondas, e serviram como referências principais os excelentes textos de Halliday *et al.* [1] e Nussenzveig [2]. A discussão citada referiu-se à análise das médias temporais da energia cinética e da energia potencial na propagação de ondas harmônicas em uma dimensão, e deu-se em dois encontros. No primeiro, veio à tona a contradição entre desenvolvimentos matemáticos realizados em sala de aula e as abordagens nos livros de referência [1, 2]. No segundo, foi resolvida a questão e foi verificada a inconsistência do raciocínio apresentado nos textos utilizados. Pela relevância que essa discussão pode ter para a comunidade de estudantes e professores de Física, ela é apresentada, com vários melhoramentos, neste trabalho.

As densidades médias da energia cinética e da energia potencial em ondas mecânicas em uma dimensão podem ser calculadas mediante uma análise do movimento dos elementos do meio, a partir das leis de Newton e a lei de Hooke [3, 4]. Porém, textos muito utilizados nos cursos de Física Básica apresentam uma analogia que poupa o cálculo da energia potencial elástica média [1, 2]. Essa analogia é estabelecida entre o sistema bloco-mola [5] em oscilações livres (sistema S1) e um infinitésimo do meio unidimensional em que se propaga uma onda harmônica progressiva (sistema S2). Dessa maneira, S1 e S2 realizam Movimento Harmônico Simples (MHS). De um lado, Halliday *et al.* [1] expõem "*A taxa média na qual a energia cinética é transportada é... A energia potencial também é transportada pela onda e na mesma taxa média... Apesar de não se fazer a demonstração, você deve se lembrar que num sistema oscilante, tal como um pêndulo ou um sistema massa-mola, a ener-*

[1] Enviar correspondência para Alexys Bruno-Alfonso. E-mail: alexys@fc.unesp.br

gia cinética média e a energia potencial média são de fato iguais". Do outro lado, Nussenzveig [2] explica "*Como o elemento dx executa um MHS na direção y, a energia potencial média é igual à energia cinética média* ...". Em outras palavras, esses textos sugerem que se uma partícula realiza MHS então as médias das suas energias cinética e potencial são iguais. É importante salientar que esse raciocínio pode parecer correto porque, no caso de S2, tanto as hipóteses quanto a tese são verdadeiras.

Para compreender que esse raciocínio é incorreto basta analisar o sistema S3, que consiste de um infinitésimo do meio unidimensional em que se propaga uma onda harmônica estacionária. Nesse caso, as médias das energias cinética e potencial dependem da partícula considerada e, em geral, não coincidem apesar de que o sistema S3 realiza MHS. Essa questão é discutida neste trabalho, mediante abordagens físicas e matemáticas do fenômeno de propagação de ondas mecânicas em uma dimensão.

2. O sistema bloco-mola

O sistema S1 é bem conhecido dos cursos de Física Básica. Consiste de um bloco de massa m ligado a uma mola de massa desprezível e constante elástica k, que está fixa no outro extremo. Considere-se que o movimento do bloco leva em deformações longitudinais da mola, e que não há outras forças que ajam sobre o bloco nessa direção. Então, o deslocamento do bloco a partir da sua posição de equilíbrio é descrito pela função

$$y(t) = A\cos(\omega t + \delta), \tag{1}$$

onde A é a amplitude, $\omega = \sqrt{k/m}$ é a freqüência angular e δ é a fase inicial. A energia cinética do sistema S1 é

$$K_1(t) = \frac{m}{2}[y_t(t)]^2 = \frac{kA^2}{2}\sin^2(\omega t + \delta), \tag{2}$$

onde a velocidade instantânea da partícula é a derivada temporal $y_t(t)$, e a energia potencial elástica é

$$U_1(t) = \frac{k}{2}\,y^2(t) = \frac{kA^2}{2}\cos^2(\omega t + \delta). \tag{3}$$

Então, $K_1(t)$ e $U_1(t)$ são funções periódicas de período $2\pi/\omega$, e a energia mecânica do sistema S1 é a constante

$$E_1 = K_1(t) + U_1(t) = \frac{kA^2}{2}, \tag{4}$$

de modo que é estabelecida uma gangorra entre as energias cinética e potencial. Isto é, no sistema bloco-mola a energia cinética aumenta enquanto a energia potencial diminui, e vice-versa.

Agora, segundo o Cálculo Integral, a média temporal de uma certa função periódica $f(t)$ de período T é

$$\bar{f} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\;dt. \tag{5}$$

Assim, a energia cinética média é

$$\overline{K_1} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{kA^2}{2}\sin^2\left(\frac{2\pi t}{T} + \delta\right)\,dt = \frac{kA^2}{4}, \tag{6}$$

a energia potencial elástica média é

$$\overline{U_1} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{kA^2}{2}\cos^2\left(\frac{2\pi t}{T} + \delta\right)\,dt = \frac{kA^2}{4}, \tag{7}$$

e chega-se no resultado

$$\overline{K_1} = \overline{U_1} = \frac{kA^2}{4} = \frac{E_1}{2}. \tag{8}$$

Isto é, as médias temporais das energias cinética e potencial de S1 são iguais.

3. Ondas em uma dimensão

Seja $y(x,t)$ a função que descreve o deslocamento do ponto x no instante t num meio linear e homogêneo. Essa função satisfaz a equação de ondas

$$y_{tt}(x,t) = V^2 y_{xx}(x,t), \tag{9}$$

onde V é a velocidade de fase das ondas, e as derivadas parciais são denotadas mediante índices. A energia cinética de um infinitésimo dx do meio na posição x é [1, 2, 3, 4]

$$dK = \frac{\lambda}{2}\,y_t^2(x,t)\;dx, \tag{10}$$

onde λ é a densidade linear de inércia, enquanto a energia potencial é [3, 4]

$$dU = \frac{\kappa}{2}\,y_x^2(x,t)\;dx, \tag{11}$$

onde $\kappa = \lambda V^2$ é uma medida da elasticidade do meio. No caso de ondas transversais numa corda, κ é a tensão da corda, e para ondas longitudinais numa barra, κ é o produto do módulo de elasticidade do material vezes a área da seção transversal. Se a barra é modelada por uma mola de constante elástica k e comprimento L, então $\kappa = kL$. Assim, para compreender a Eq. (11) basta levar em conta que o elemento dx é como uma mola de constante elástica κ/dx que está deformada em $y(x+dx,t) - y(x,t) = y_x(x,t)\ dx$.

Note-se que, dividindo as Eqs. (10) e (11) pelo comprimento dx, obtem-se $\lambda y_t^2\ (x,t)/2$ e $\kappa y_x^2\ (x,t)/2$. Essas são as densidades das energias cinética e potencial, respectivamente. Porém, para fazer mais claras as comparações com as energias do sistema S1, prefere-se lidar com os infinitésimos dK e dU.

Para analisar o sistema S2, que é um infinitésimo do meio unidimensional em que se propaga uma onda harmônica progressiva, considera-se a função

$$y_2(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \delta), \qquad (12)$$

onde $k = \omega/V$ é o número de onda. Note-se que cada ponto x realiza MHS com período $T = 2\pi/\omega$. De acordo com as Eqs. (10) e (11),

$$dK_2 = dU_2 = \frac{\lambda\omega^2 A^2}{2}\ \text{sen}^2(\omega t - kx + \delta)\, dx. \quad (13)$$

Assim, as energias cinética e potencial de S2 são iguais para qualquer valor de t, o que contrasta com a gangorra que ocorre entre essas energias no sistema S1. De acordo com a Eq. (5), os valores médios de dK_2 e dU_2 também são iguais, ou seja,

$$\overline{dU_2} \equiv \overline{dK_2} = \frac{\lambda\omega^2 A^2}{4}dx.$$

Também, a energia mecânica de S2 é

$$dE_2 = dK_2 + dU_2 =$$

$$\lambda\omega^2 A^2\ \text{sen}^2(\omega t - kx + \delta)\, dx, \qquad (14)$$

de modo que a energia mecânica do sistema S2 não se conserva.

É importante esclarecer que a igualdade $dK = dU$ não é exclusividade das ondas harmônicas progressivas. De fato, para a onda progressiva

$$y(x,t) = f(x - Vt), \qquad (15)$$

onde o perfil inicial $f(x)$ é uma certa função derivável, as Eqs. $\kappa = \lambda V^2$, (10) e (11) levam em

$$dU = dK = \frac{\kappa}{2}\left[f_{\ x}(x - Vt)\right]^2 dx. \qquad (16)$$

Portanto, os valores instantâneos das densidades de energia cinética e potencial são iguais, independentemente do perfil da onda progressiva unidimensional, e as médias temporais correspondentes são iguais, mesmo que os elementos do meio não realizem MHS.

Para refutar a idéia de que a igualdade das médias é devida ao MHS, analisa-se o sistema S3, que consiste de um infinitésimo do meio unidimensional em que se propaga uma onda harmônica estacionária. Nesse caso, considera-se a função

$$y_3(x,t) = A\ \text{sen}(kx + \gamma)\cos(\omega t + \delta), \qquad (17)$$

onde $k = \omega/V$ é o número de onda. Assim, cada ponto x realiza MHS com período $T = 2\pi/\omega$. De acordo com as Eqs. (10) e (11),

$$dK_3 = \frac{\lambda\omega^2 A^2}{2}\ \text{sen}^2(kx + \gamma)\,\text{sen}^2(\omega t + \delta)\, dx, \quad (18)$$

e a Eq. (5) leva a

$$\overline{dK_3} = \frac{\lambda\omega^2 A^2}{4}\ \text{sen}^2(kx + \gamma)\, dx. \qquad (19)$$

Analogamente,

$$dU_3 = \frac{\lambda\omega^2 A^2}{2}\ \cos^2(kx + \gamma)\cos^2(\omega t + \delta)\, dx \quad (20)$$

conduz a

$$\overline{dU_3} = \frac{\lambda\omega^2 A^2}{4}\ \cos^2(kx + \gamma)\, dx. \qquad (21)$$

Conseqüentemente, $\overline{dK_3} \neq \overline{dU_3}$ exceto quando $\text{sen}^2(kx + \gamma) = \cos^2(kx + \gamma) = 1/2$. As exceções são os valores de x tais que $kx + \gamma = (2n+1)\pi/4$, onde n é um número inteiro.

Finalmente, basta considerar os ventres da onda harmônica estacionária, os quais correspondem aos elementos do meio que oscilam com amplitude máxima. Os ventres ocorrem, segundo a Eq. (17), nos valores de x que satisfazem $kx + \gamma = (n + 1/2)\pi$, com n inteiro. Nesse caso $dK_3 = \lambda\omega^2 A^2\ \text{sen}^2(\omega t + \delta)\, dx/2$ enquanto $dU_3 = 0$ em todo instante t, pois o elemento dx não sofre contrações nem dilatações relevantes. Portanto, os valores médios $\overline{dK_3} = \lambda\omega^2 A^2 dx/4$ e $\overline{dU_3} = 0$ são diferentes, apesar de que o sistema S3 realiza MHS.

4. Discussão

Halliday *et al.* [1] e Nussenzveig [2] sugerem que se uma partícula realiza MHS então as médias das suas energias cinética e potencial são iguais. Dessa maneira, pretendem simplificar o tratamento matemático da energia potencial elástica em ondas mecânicas através de uma analogia com um outro problema já resolvido. Porém, foi demonstrado na seção anterior que o MHS não é condição suficiente nem necessária para que as médias temporais das energias cinética e potencial das partículas sejam iguais.

Adicionalmente, vale a pena ressaltar que aquela analogia [1, 2] ignora que a energia mecânica do sistema bloco-mola é constante, enquanto os elementos infinitésimos do meio em que se propaga a onda intercambiam energia com o restante do meio. Note-se que, se o deslocamento das partículas do meio linear é dado pela função $y\,(x,t)$, então a força resultante sobre um infinitésimo dx no ponto x é

$$dF = \kappa\, y_x\,(x+dx,t) - \kappa\, y_x\,(x,t) = \kappa\, y_{xx}\,(x,t)\ dx, \qquad (22)$$

pois, de acordo com a lei de Hooke, a força que age no lado esquerdo é $-\kappa\, y_x\,(x,t)$, enquanto a força que age no lado direito é $\kappa\, y_x\,(x+dx,t)$. Aplicar o símile [1, 2] significa aceitar que a energia potencial elástica devida à deformação do elemento dx está associada à força dF, o que não é correto.

Na verdade [3, 4], a energia de deformação vem dada pela Eq. (11) e responde a interações internas no elemento dx, enquanto a força externa dF encarrega-se de mudar a energia cinética do centro de massa do elemento dx. De fato, segundo a Eq. (10), a taxa de variação temporal da energia cinética do elemento dx é

$$(dK)_t = \lambda\, y_t\,(x,t)\, y_{tt}\,(x,t)\ dx. \qquad (23)$$

Mas, de acordo com a equação de ondas (9), obtem-se

$$(dK)_t = \kappa\, y_t\,(x,t)\, y_{xx}\,(x,t)\, dx = y_t\,(x,t)\, dF, \quad (24)$$

que coincide com a potência da força resultante dF que age sobre o elemento dx.

Por outro lado, a taxa de variação da energia mecânica de dx é [6]

$$\begin{aligned}(dE)_t &= (dK)_t + (dU)_t = \\ &= \kappa\ [y_t\,(x,t)\ y_{xx}\,(x,t)\ +\ y_x\,(x,t)\ y_{xt}\,(x,t)]\ dx = \\ &= (\kappa\, y_x\,(x,t)\ \ y_t\,(x,t))_x\ dx, \qquad (25)\end{aligned}$$

e coincide com a soma das potências das forças externas que agem sobre o elemento dx. Essa soma é

$$\begin{aligned}&\kappa\, y_x\,(x+dx,t)\ \ y_t\,(x+dx,t) - \kappa\, y_x\,(x,t)\ \ y_t\,(x,t) = \\ &= (\kappa\, y_x\,(x,t)\ \ y_t\,(x,t))_x\ dx. \qquad (26)\end{aligned}$$

Fica evidenciada assim a necessidade de se estudar com detalhes matemáticos a energia potencial elástica em ondas mecânicas.

5. Conclusões

Apresentou-se um estudo das médias temporais das densidades de energia cinética e potencial na propagação de ondas harmônicas num meio unidimensional. Viu-se que, no caso de uma onda harmônica progressiva, essas médias são iguais, como apresentado em textos de Física Básica [1, 2, 3, 4]. Porém, em contraste com dois desses textos [1, 2], demonstrou-se que isso não é conseqüência do movimento harmônico simples dos elementos do meio e ressaltou-se a necessidade de se fazer um tratamento específico e detalhado da energia potencial elástica em ondas mecânicas. Também foi mostrado que a igualdade daquelas médias não é exclusividade das ondas harmônicas progressivas.

O presente trabalho originou-se numa discussão em sala de aula que evidenciou e superou limitações da bibliografia consultada [1, 2]. Isso confirma a necessidade do estudo crítico, por parte de estudantes e professores, da literatura utilizada.

Agradecimentos

A.B.A. agradece aos calouros 2000 dos cursos de Física e Engenharia Física da UFSCar e ao Prof. Dr. José Marques Póvoa pelas úteis discussões. O trabalho recebeu apoio financeiro da PROEX/UNESP.

Referências

[1] D. Halliday, R. Resnick e J. Walker, *Fundamentos de Física 2 - Gravitação, Ondas e Termodinâmica* (Ed. LTC, Rio de Janeiro, 1996), p. 120.

[2] H.M. Nussenzveig, *Curso Básico de Física 2 - Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor* (Ed. Edgard Blücher Ltda., São Paulo 1999), p. 108.

[3] P.A. Tipler, *Física para cientistas e engenheiros 1 - Mecânica, Oscilações e Ondas, Termodinâmica*, Ed. LTC, Rio de Janeiro (2000), p. 420.

[4] F.J. Keller, W.E. Gettys, M.J. Skove, *Física 2*, Makron Books do Brasil Editora Ltda., São Paulo (1999).

[5] Considera-se uma mola de massa desprezível.

[6] Supõe-se que as derivadas parciais mistas y_{tx} e y_{xt} são contínuas e, conseqüentemente, iguais.