

Uma bifurcação sela-centro em campos Hamiltonianos planares

(A saddle-center bifurcation in planar Hamiltonian vector fields)

Luis Fernando Mello¹ e Grasiela Batista dos Santos

Instituto de Ciências, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, MG, Brasil
Recebido em 03/05/2004; Revisado em 02/09/2004; Aceito em 22/09/2004

Neste trabalho estudamos um modelo de bifurcação sela-centro encontrado em uma família a um parâmetro de campos de vetores planares Hamiltonianos. Este estudo é feito através da análise da mudança qualitativa dos retratos de fase destes campos. Neste cenário bastante particular, o conhecimento da família a um parâmetro das funções Hamiltonianas é suficiente para a determinação dos retratos de fase dos campos envolvidos.

Palavras-chave: Efeito Aharonov-Bohm, campos Hamiltonianos, retrato de fase, singularidades, bifurcações, laços homoclínicos.

In this paper we use the qualitative theory of planar differential equations to study a saddle-center bifurcation in one-parameter family of planar Hamiltonian vector fields. In particular, we show that the one-parameter family of Hamiltonian functions determines the phase portraits of these vector fields.

Keywords: Aharonov-Bohm effect, Hamiltonian, vector fields, phase portrait, equilibrium points, singularities, bifurcations, homoclinic loops.

1. Introdução

Neste trabalho fazemos um estudo sistemático da seguinte família de equações diferenciais ordinárias planares

$$\begin{cases} x' = -1 + \frac{\delta}{k} \frac{y}{x^2 + y^2} \\ y' = -\frac{\delta}{k} \frac{x}{x^2 + y^2} \end{cases} \quad (1)$$

que dependem dos parâmetros δ e k , satisfazendo $0 \leq \delta \leq \frac{1}{2}$ e $0 < k < \infty$.

As Eqs. (1) aparecem no modelamento matemático do chamado *efeito Aharonov-Bohm* [1] e [2].

Considere, inicialmente, um solenóide de pequena seção transversal ao longo do qual mantém-se um fluxo magnético. Uma *corda magnética* é definida como sendo a configuração limite quando a seção

transversal do solenóide tende a zero, mantendo-se o fluxo magnético constante. Um interessante problema aparece: estudar o espalhamento de um feixe de partículas carregadas causado por uma corda magnética infinitamente longa.

Visto que o problema acima é essencialmente bidimensional, não dependendo da coordenada ao longo da corda magnética, podemos representá-lo no espaço de configuração (plano de fase) xy . Do ponto de vista clássico as partículas são livres, visto que não existe força de Lorentz. Isto quer dizer que as trajetórias das partículas (linhas de corrente) são paralelas ao eixo x , simétricas, portanto, a este eixo.

No entanto, há um espalhamento não trivial do ponto de vista quântico. As trajetórias das partículas (linhas de corrente) perdem a simetria com relação ao eixo x , surgindo trajetórias fechadas em torno da origem. Veja Fig. 3.

¹Enviar correspondência para Luis Fernando Mello. E-mail: lfmelo@unifei.edu.br.

Esta passagem do ponto de vista clássico ao ponto de vista quântico é manifestada no modelo (1) pelo parâmetro δ . No primeiro caso $\delta = 0$ e no segundo $\delta > 0$. Vale ressaltar o papel desempenhado pelo parâmetro δ : uma pequena variação no valor $\delta = 0$, por menor que seja, mas positiva, causa uma mudança drástica na topologia das linhas de corrente perto da origem.

As Eqs. (1) para $\delta \geq 0$ foram estudadas no trabalho [1] e seus retratos de fase foram determinados por métodos numéricos. A análise feita em [1] para $\delta > 0$ mostra a existência de um ponto tipo centro na origem, de modo que as curvas soluções de (1) que passam por pontos suficientemente próximos de $(0, 0)$ são curvas fechadas percorridas no sentido horário. Essas curvas fechadas estão limitadas a uma região do plano cujo bordo é formado por um ponto de sela em $(0, \frac{\delta}{k})$ e um laço homoclínico deste ponto de sela. Veja Fig. 3 a seguir. Destacamos também que esta análise está em concordância com resultados obtidos em [2], onde foi utilizada uma metodologia diferente.

Uma situação bastante interessante ocorre quando δ tende a zero pela direita. De fato, quando isto acontece o ponto de sela em $(0, \frac{\delta}{k})$ aproxima-se do ponto tipo centro em $(0, 0)$, de modo que a área da região limitada pelo laço homoclínico tende a zero. Na situação limite a sela colide com o ponto tipo centro, cancelando as singularidades de (1) e o retrato de fase correspondente é trivial, formado por linhas horizontais paralelas ao eixo x , percorridas da direita para a esquerda no plano de fase. Veja Fig. 4 a seguir.

Os retratos de fase qualitativamente diferentes para $\delta > 0$ e $\delta = 0$ sugerem a existência de algum tipo de bifurcação de (1). Isto, de fato, é verdadeiro e esta bifurcação, denominada *bifurcação sela-centro*, será estudada aqui do ponto de vista da teoria qualitativa das equações diferenciais. Nossa abordagem no estudo dos retratos de fase de (1), diferente das apresentadas em [1] e [2], é mais simples e direta, tornando o entendimento de (1) imediato.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira:

Na seção 2 apresentamos os campos Hamiltonianos planares e as equações diferenciais definidas por esses campos. Tais campos desempenham papel central no desenvolvimento deste trabalho. A seção 3 é dedicada ao estudo qualitativo dos retratos de fase de campos Hamiltonianos planares. A análise dos retratos de fase de (1) é feita com detalhes na seção 4. Na seção 5 apresentamos comentários a respeito de como a bifurcação estudada aqui se insere num contexto mais

geral.

2. Campos Hamiltonianos planares

O estudo global das equações diferenciais ordinárias planares

$$\begin{cases} x' = P(x, y) \\ y' = Q(x, y) \end{cases} \quad (2)$$

iniciou-se com Poincaré [3]. Inaugurou-se com este trabalho uma linha de pensamento e de contribuições conhecida como *Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias*. Faremos a seguir um breve relato de elementos desta teoria. Para maiores informações veja [4].

Iremos assumir que o campo de vetores $X(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$, que define (2), seja de classe C^1 , ou seja, que as funções $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ tenham derivadas parciais primeiras contínuas em todo ponto (x, y) . Esta hipótese garante a existência e a unicidade da solução de (2) em cada ponto (x, y) do plano.

Por uma *solução* de (2) queremos dizer uma curva diferenciável $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde I é um intervalo aberto da reta real, tal que $\phi'(t) = X(\phi(t))$, para todo $t \in I$. Geometricamente uma solução de (2) é uma curva ϕ tal que em cada ponto $\phi(t)$ seu vetor velocidade $\phi'(t)$ coincide com o campo X dado.

Uma *órbita* ou uma *trajetória* de (2) nada mais é do que a imagem em \mathbb{R}^2 de uma solução de (2). É usual orientarmos as órbita com uma seta, indicando assim o sentido de percurso, quando t cresce. Chamamos de *retrato de fase* de (2) a decomposição do plano em suas trajetórias orientadas.

Na descrição dos retratos de fase de (2) os *pontos de equilíbrio*, que são os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $X(x, y) = (0, 0)$, e as soluções periódicas têm papéis de destaque. Chamamos de uma *órbita periódica* a imagem de uma solução periódica de (2).

Um ponto de equilíbrio $p_0 = (x_0, y_0)$ é chamado

1. *centro*, se existir uma vizinhança U de p_0 tal que toda solução de (2) em $U - \{p_0\}$ é uma solução periódica;
2. *poço*, se existir uma vizinhança U de p_0 tal que toda solução de (2) em U tende para p_0 . Tal equilíbrio ocorre quando os autovalores da derivada do campo X no ponto p_0 , $DX(p_0)$, têm partes reais negativas;

3. *fonte*, se existir uma vizinhança U de p_0 tal que toda solução de (2) em $U - \{p_0\}$ deixa U . Ocorre quando os autovalores de $DX(p_0)$ têm partes reais positivas;
4. *sela*, quando os autovalores de $DX(p_0)$ são reais e de sinais opostos.

Os retratos de fase locais para estes pontos de equilíbrio são bastante conhecidos e podem ser obtidos em [4], página 66.

Os métodos desenvolvidos na Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias tratam de responder, entre outras, as seguintes questões:

- Quais soluções $\phi(t)$ de (2) são periódicas?
- Quais soluções $\phi(t)$ de (2) são constantes?
- Quais soluções $\phi(t)$ de (2) permanecem em uma região limitada do plano?
- Quais soluções $\phi(t)$ de (2) convergem para um ponto de equilíbrio?
- Quais soluções $\phi(t)$ de (2) convergem para uma órbita periódica?

O entendimento do retrato de fase de (2) é uma interessante alternativa à procura por soluções exatas ou aproximadas de (2), visto que, para muitos campos de vetores $X(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ não lineares, soluções explícitas são impossíveis de serem obtidas enquanto que, por outro lado, soluções aproximadas, via métodos numéricos, convergem para as soluções verdadeiras somente em intervalos finitos.

Dentro da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias destacam-se ainda a estabilidade estrutural e as bifurcações. O estudo da estabilidade estrutural das Eqs. (2), ou equivalentemente, dos campos de vetores planares $X(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$, trata de caracterizar aqueles cujos retratos de fase não se alteram qualitativamente por pequenas perturbações de suas componentes, as funções P e Q [5].

A compreensão dos campos estruturalmente estáveis, sua caracterização em termos de elementos essenciais do campo (pontos de equilíbrio, órbitas periódicas e separatrizes), constitui ponto de partida para o estudo das mudanças estruturais (bifurcações) nos retratos de fase das equações diferenciais ordinárias planares

$$\begin{cases} x' = P(x, y, \lambda) \\ y' = Q(x, y, \lambda) \end{cases} \quad (3)$$

que dependem de parâmetros (λ) .

De fato, estas mudanças acontecem somente para valores λ_0 , chamados *valores de bifurcação*, para os quais a equação encontra o complementar das equações estruturalmente estáveis.

Para sermos um pouco mais precisos, seja $\lambda \in [a, b]$. Um valor $\lambda_0 \in [a, b]$ chama-se *valor de bifurcação* da Eq. (3) se em toda vizinhança de λ_0 em $[a, b]$, existirem valores λ_1 tais que (3) com $\lambda = \lambda_0$ não é topologicamente equivalente a (3) com $\lambda = \lambda_1$, ou seja, não existe uma função contínua $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, com inversa contínua, que aplique arcos de trajetórias de (3) com $\lambda = \lambda_0$ sobre arcos de trajetórias de (3) com $\lambda = \lambda_1$, preservando a orientação.

Neste trabalho estamos interessados numa classe de equações diferenciais planares do tipo

$$\begin{cases} x' = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \\ y' = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) \end{cases} \quad (4)$$

onde $H(x, y)$ é uma função real definida num conjunto aberto do plano xy chamada *função Hamiltoniana*. As Eqs. (4), chamadas *equações diferenciais planares Hamiltonianas*, têm sua origem em sistemas mecânicos sem atrito e, de uma maneira geral, a energia total do sistema mecânico pode ser tomada como a Hamiltoniana do sistema.

As Eqs. (4) surgem de maneira natural no estudo das equações diferenciais ordinárias de segunda ordem $x'' + f(x) = 0$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ao tomarmos o sistema equivalente

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -f(x). \end{cases}$$

Aqui a Hamiltoniana é dada por

$$H(x, y) = \int_0^x f(s) ds + \frac{y^2}{2}.$$

Exemplo desta situação é a equação do oscilador harmônico simples $x'' + b^2x = 0$.

Chamaremos de *campo Hamiltoniano planar* o campo de vetores

$$X_H(x, y) = \left(\frac{\partial H}{\partial y}(x, y), -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) \right)$$

que define (4).

O estudo da estabilidade estrutural das equações diferenciais planares Hamiltonianas, ou equivalentemente, dos campos Hamiltonianos planares é assunto de pesquisa recente e está longe o seu entendimento definitivo. A Ref. [6] traz um estudo da estabilidade estrutural dos campos Hamiltonianos planares polinomiais.

Neste trabalho nossa atenção está voltada para as bifurcações nos retratos de fase das equações diferenciais planares Hamiltonianas

$$\begin{cases} x' = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y, \lambda) \\ y' = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y, \lambda) \end{cases} \quad (5)$$

que dependem de parâmetros. Em (5) a Hamiltoniana H é da forma $H(x, y, \lambda)$.

3. Análise qualitativa

Uma importante propriedade dos campos Hamiltonianos planares é a seguinte: o conhecimento da Hamiltoniana H implica no conhecimento do retrato de fase de (4). Em outras palavras, do ponto de vista qualitativo basta conhecer a Hamiltoniana H para um total conhecimento de (4). Para mostrarmos isso necessitamos de alguns preliminares.

Uma *singularidade* de (4) é um ponto onde o campo Hamiltoniano é nulo (ponto de equilíbrio) ou onde ele não está definido. Mas os pontos onde o campo Hamiltoniano se anula são exatamente os pontos críticos de H . Pode-se mostrar [6] que os mínimos locais não degenerados de H são centros de X_H e que os pontos de sela de H são selas de X_H .

Como a divergência de um campo Hamiltoniano é nula, segue que o fluxo de (4) preserva área no plano de fase. Esta é a versão para dimensão dois do Teorema de Liouville ([7], p. 74). Portanto, não há a possibilidade de termos singularidades tipo poço ou tipo fonte, nem órbitas periódicas atratoras ou repulsoras. Assim, se existe uma órbita periódica γ para (4) deve existir um anel de órbitas periódicas contendo γ .

Como

$$\langle \nabla H(x, y), X_H(x, y) \rangle = 0,$$

para todo (x, y) que não seja uma singularidade, segue que o campo Hamiltoniano é perpendicular ao campo gradiente de H . Mas, o campo gradiente de H é, por

sua vez, perpendicular às curvas de nível de H . Portanto, podemos concluir que o campo Hamiltoniano é tangente às curvas de nível da Hamiltoniana H .

Deste modo, as curvas soluções de (4) estão contidas nas curvas de nível de H , e assim, para determinarmos o retrato de fase de (4), basta encontrarmos um mapa de nível da Hamiltoniana H e orientar as curvas convenientemente.

Observamos ainda que toda a análise acima continua válida para (5).

4. Estudo dos retratos de fase

Nesta seção faremos um estudo qualitativo da família a um parâmetro de equações diferenciais planares definida por

$$\begin{cases} x' = -1 + \lambda \frac{y}{x^2 + y^2} \\ y' = -\lambda \frac{x}{x^2 + y^2} \end{cases} \quad (6)$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$. Notemos que as Eqs. (6) correspondem às Eqs. (1), fazendo $\lambda = \frac{\delta}{k}$ e restringindo λ convenientemente, em vez de deixá-lo assumir qualquer valor real.

Observemos que (6) é uma família a um parâmetro de equações diferenciais planares Hamiltonianas. De fato, através de um cálculo simples podemos determinar a Hamiltoniana

$$H(x, y, \lambda) = \lambda \ln \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right) - y.$$

Quando $\lambda = 0$, as Eqs. (6) não têm singularidade. Neste caso $X_H(x, y) = (-1, 0)$. Quando $\lambda \neq 0$, as Eqs. (6) têm duas singularidades: uma na origem $(0, 0)$ onde o campo Hamiltoniano não está definido e uma outra onde o campo Hamiltoniano se anula. Neste ponto devemos ter $x = 0$ e $y = \lambda$, conforme cálculo imediato. É simples a verificação de que a Hamiltoniana H tem um ponto de sela em $(x, y) = (0, \lambda)$. Portanto, as Eqs. (6) têm uma singularidade tipo sela neste ponto.

A singularidade $(0, 0)$ é do tipo centro, uma vez que as curvas soluções de (6) que passam por pontos suficientemente próximos da origem são curvas fechadas, conforme as Figs. 3 e 5.

Vejamos agora os retratos de fase de (6) para $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ e $\lambda < 0$. Pelo que vimos acima, basta o conhecimento da Hamiltoniana $H(x, y, \lambda)$ para $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ e $\lambda < 0$, respectivamente.

Na Fig. 1 apresentamos o gráfico da Hamiltoniana H para $\lambda = 1$ e para x e y próximos da origem (centro). Já na Fig. 2 apresentamos o gráfico de H para $\lambda = 1$ e para x e y próximos de 0 e 1, respectivamente. Na Fig. 2 aparece claramente o ponto de sela de H em $(0, 1)$. Os gráficos de H para outros valores de $\lambda > 0$ são qualitativamente iguais aos apresentados.

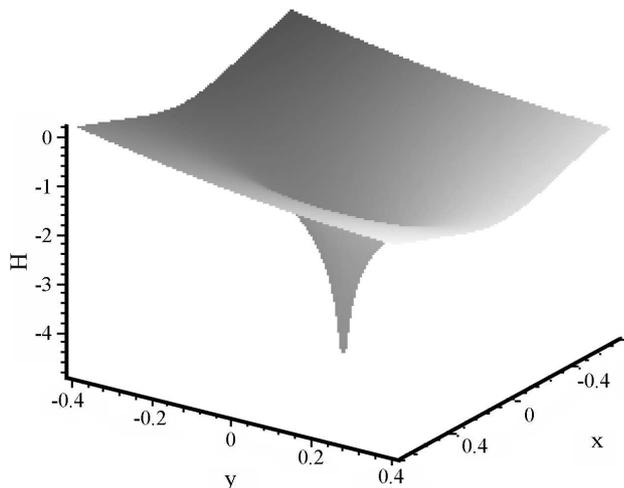


Figura 1 - Gráfico de H para $\lambda = 1$, x e y próximos da origem.

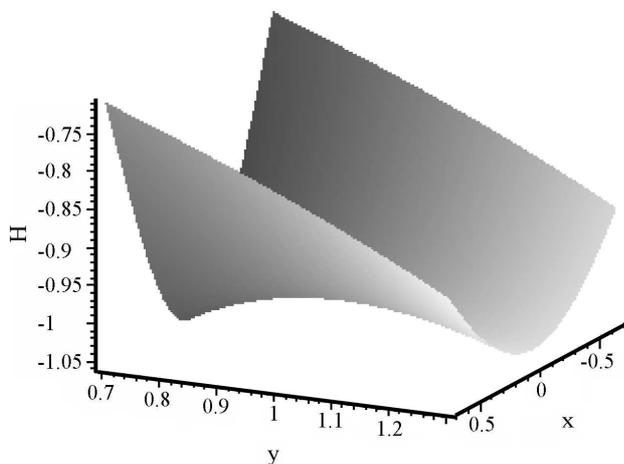


Figura 2 - Gráfico de H para $\lambda = 1$, (x, y) próximos de $(0, 1)$.

Apresentamos as curvas de nível para os valores $-0.8, -0.9, -1, -1.1, -1.2, -1.5, -2$ e o retrato de fase de (6) para $\lambda = 1$ na Fig. 3. Vale observar que para qualquer $\lambda > 0$ o retrato de fase de (6) correspondente é topologicamente equivalente a este apresentado na Fig. 3.

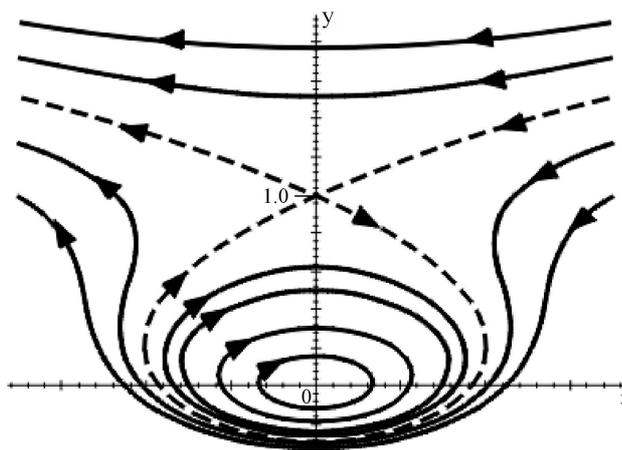


Figura 3 - Retrato de fase (curvas de nível de H) para $\lambda = 1$.

Na Fig. 4 apresentamos as curvas de nível e o retrato de fase de (6) para $\lambda = 0$.

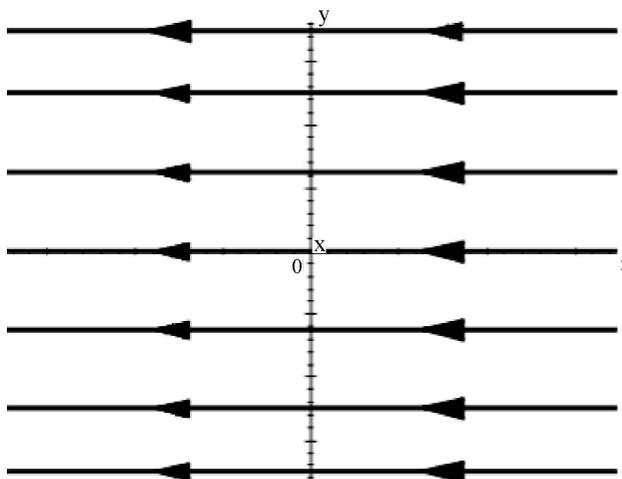


Figura 4 - Retrato de fase (curvas de nível de H) para $\lambda = 0$.

Na Fig. 5 estão representadas as curvas de nível para os valores $0.8, 0.9, 1, 1.1, 1.2, 1.5, 2$ e o retrato de fase de (6) para $\lambda = -1$. Observamos, novamente, que para qualquer $\lambda < 0$ o retrato de fase de (6) correspondente é topologicamente equivalente ao apresentado na Fig. 5.

Os laços que aparecem nas curvas tracejadas das Figs. 3 e 5 recebem o nome de *separatrizes homoclínicas* ou *laços homoclínicos* dos pontos de sela. Esses laços estão sobre as curvas de nível

$$L_\lambda = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / H(x, y, \lambda) = \lambda (\ln |\lambda| - 1), \lambda \neq 0 \right\}, \quad (1)$$

as quais nada mais são do que as curvas de nível que contém o ponto de sela $(0, \lambda)$.

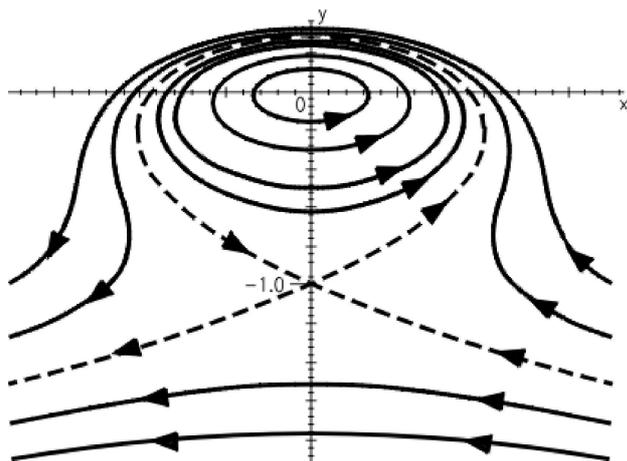


Figura 5 - Retrato de fase (curvas de nível de H) para $\lambda = -1$.

A área da região do plano limitada pela separatriz homoclínica e pela sela da Fig. 3 varia com λ . Vale observar que esta área tende a zero quando λ tende a zero pela direita, fato este representado na Fig. 4, olhando esta figura como limite de figuras do tipo da Fig. 3 quando λ tende a zero pela direita. Esta mesma observação é válida para $\lambda < 0$ na Fig. 5, quando λ tende a zero pela esquerda.

O valor $\lambda = 0$ é o valor de bifurcação para (6). Qualquer pequena perturbação em seu valor ocasiona uma drástica mudança no retrato de fase correspondente.

Das últimas observações a respeito das Eqs. (6): a Hamiltoniana H tem as seguintes propriedades

$$H(x, y, \lambda) = H(-x, y, \lambda)$$

e

$$H(x, -y, -\lambda) = -H(x, y, \lambda),$$

para todo (x, y, λ) .

A primeira propriedade implica que os pontos (x, y) e $(-x, y)$ estão sobre a mesma curva de nível (não necessariamente sobre a mesma componente conexa) de H , para λ fixo. Em outras palavras, há uma simetria dos retratos de fase de (6) com relação ao eixo y . Assim, o estudo da bifurcação de (6) pode ficar restrito ao estudo da função

$$g(y, \lambda) = H(0, y, \lambda) = \lambda \ln |y| - y.$$

A segunda propriedade implica numa simetria dos retratos de fase de (6) com relação ao eixo x quando trocamos λ por $-\lambda$.

5. Comentários finais

Em situações como a descrita pelas Eqs. (1), ou equivalentemente por (6), podemos interpretar a Hamiltoniana H como a *função de corrente* associada ao escoamento de um fluido. Nesta interpretação, o campo de vetores X que define a equação diferencial (6) é olhado como o campo de velocidades do fluido. Decorre do que vimos acima que a função de corrente é uma quantidade conservada, sendo constante ao longo das trajetórias das partículas.

Consideremos o fluxo ψ do campo de velocidades X através de uma curva C , definido por

$$\psi = \int_C X \cdot n \, ds,$$

onde ds designa o elemento de arco ao longo de C e n é o normal unitário ao longo da curva. É imediato verificar, via teorema da divergência, que, neste caso, o fluxo ψ não depende da curva C ; depende apenas dos pontos inicial e final da curva.

Nesta interpretação

$$H(x, y) = H_0 + \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} X \cdot n \, ds,$$

onde H_0 é uma constante arbitrária e a integração se processa ao longo de qualquer caminho C ligando (x_0, y_0) a (x, y) . Em outras palavras, a menos da constante H_0 , a Hamiltoniana H é o fluxo do campo de velocidades X através de qualquer curva ligando (x_0, y_0) a (x, y) .

Para finalizarmos, é importante dizer que a bifurcação sela-centro canônica encontrada na literatura é descrita de um modo diferente da que apresentamos aqui ([8], p. 427): um ponto de equilíbrio tipo sela e um outro ponto de equilíbrio tipo centro aproximam-se um do outro quando o parâmetro varia em direção ao valor de bifurcação, colidem quando o parâmetro atinge o valor de bifurcação criando um ponto tipo cúspide e depois desaparecem para novos valores do parâmetro.

A família a um parâmetro de equações diferenciais planares

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = \lambda - x^2 \end{cases}$$

ilustra esta situação. Quando $\lambda > 0$, existem dois pontos de equilíbrio, sendo uma sela e um centro. Esses

pontos colidem formando uma cúspide na origem quando $\lambda = 0$ e desaparecem para $\lambda < 0$.

Com relação a esta descrição nosso modelo de bifurcação sela-centro é um pouco diferente. Não há a criação do ponto tipo cúspide quando o parâmetro atinge o valor de bifurcação, bem como as singularidades não desaparecem para novos valores do parâmetro.

No entanto, em ambos há uma quantidade conservada: as somas dos índices ([9], p. 314) das singularidades para qualquer valor do parâmetro nos dois modelos são iguais a zero.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao árbitro pelas sugestões apresentadas. O primeiro autor agradece o apoio da FAPEMIG, projeto EDT 1929/03.

Referências

[1] E.S. Moreira Jr, Phys. Rev. A **58**, 1678 (1998).

- [2] S. Olariu e I.I. Popescu, Rev. Mod. Phys. **57**, 339 (1985).
- [3] H. Poincaré, *Mémoire sur les Courbes Définies par les Équations Différentielles* (I-IV, Oeuvre I, Gauthier-Villar, Paris, 1881).
- [4] J. Sotomayor, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias* (Coleção Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1979).
- [5] J. Sotomayor, *Curvas Definidas por Equações Diferenciais no Plano*, 13^o Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1981.
- [6] X. Jarque e J. Llibre, Proc. London Math. Soc. **68**, 617 (1994).
- [7] V.I. Arnold, *Métodos Matemáticos da Mecânica Clássica* (Editora Mir, Moscou, 1987).
- [8] J. Hale e H. Koçak, *Dynamics and Bifurcations*, in *Text in Applied Mathematics* 11 (Springer-Verlag, New York, 1991).
- [9] V.I. Arnold, *Equações Diferenciais Ordinárias* (Editora Mir, Moscou, 1985).