

A dinâmica relativística antes de Einstein

(*Relativistic dynamics before Einstein*)

Roberto de Andrade Martins¹

*Grupo de História e Teoria da Ciência, Departamento de Raios Cósmicos e Cronologia,
Instituto de Física “Gleb Wataghin”, UNICAMP, Campinas, SP, Brasil*

A maioria dos resultados da dinâmica relativística já havia sido obtida antes do artigo de Einstein de 1905. A partir do eletromagnetismo, já haviam sido obtidas relações entre massa e velocidade, e massa e energia. Esses desenvolvimentos foram devidos a uma crença generalizada no éter como sendo uma realidade física capaz de produzir forças e que era dotado de propriedades mecânicas como massa, energia e momento. Este artigo descreve o desenvolvimento dessas idéias e compara os resultados obtidos pelos partidários do éter com as propostas de Einstein.

Palavras-chave: teoria da relatividade, Albert Einstein, dinâmica relativística, história da física.

Most of the results of relativistic dynamics had already been obtained before Einstein’s 1905 paper. Relations between mass and velocity, and mass and energy, had already been obtained from electromagnetic theory. Those developments were due to a widespread belief in the ether as a physical reality, that could produce forces and was endowed with mechanical properties such as mass, energy and momentum. This paper describes the development of those ideas and compares the results obtained by the ether partisans and Einstein’s proposals.

Keywords: relativity theory, Albert Einstein, relativistic dynamics, history of physics.

1. Introdução

Costuma-se pensar que a teoria da relatividade especial foi criada por Albert Einstein, em 1905. No entanto, quando Einstein era uma criança e ainda não sabia ler nem escrever, já se discutia um dos principais efeitos relativísticos: a influência da velocidade na massa.

Muitos resultados importantes da teoria da relatividade foram obtidos antes de 1905, por Lorentz, Poincaré e outros pesquisadores. Esse fato é bem conhecido pelos historiadores da ciência², mas geralmente é desconhecido pelos físicos. O objetivo deste artigo é proporcionar uma compreensão daquilo que já havia sido feito antes de Einstein, dando o devido crédito aos muitos físicos que contribuíram para a criação de uma dinâmica relativística e comparando esses resultados às propostas do próprio Einstein.

É impossível discutir neste artigo tudo o que havia sido feito antes de Einstein. Vamos abordar apenas alguns aspectos relacionados com a relação entre massa e energia, deixando de lado o desenvolvimento da cinemática relativística (as transformações de Lorentz e suas conseqüências) e do eletromagnetismo relativista.

É impossível compreender o estado da física no fi-

nal do século XIX sem tratar sobre o éter. Atualmente temos uma visão totalmente negativa a respeito do éter. Esse conceito parece ser o “vilão da história” - algo que não precisaria nunca ter surgido e que, graças a Einstein, foi expelido da física. Mas seria totalmente anacrônico tentar descrever a evolução da dinâmica relativística sem falar no éter³. Assim, vamos iniciar o artigo mostrando qual era a motivação histórica para aceitar a existência dessa entidade. Depois, será descrito o desenvolvimento da dinâmica do éter, com a atribuição de propriedades mecânicas (como energia e momento) a essa entidade, e como isso levou ao estudo da massa eletromagnética associada a uma carga elétrica, e às relações entre massa e energia e massa e velocidade. Por fim, será feita uma comparação entre esses desenvolvimentos e o trabalho de Albert Einstein.

2. O éter e o eletromagnetismo

Desde a Antigüidade muitas pessoas procuraram entender como um objeto pode agir sobre um outro sem estar encostado ao mesmo. Como um ímã atrai um pedaço de ferro, por exemplo? Tanto na física aristotélica como na teoria atomística antiga (que era a completa antítese

¹E-mail: rmartins@if.unicamp.br.

²Ver, por exemplo: [1], v. 2, [2], [3], [4], [5], [6], [7].

³Hirosgie[8] estudou o papel do eletromagnetismo e do éter no surgimento da teoria da relatividade.

do pensamento de Aristóteles) acreditava-se que era impossível que um corpo atuasse sobre outro sem contato; portanto, a ação de um ímã deveria ser explicada através de *alguma coisa* que não vemos, que transmite a força entre o ímã e o pedaço de ferro [9].

Quando Isaac Newton propôs a teoria gravitacional, no século XVII, ele não pensava que o Sol e os planetas se atraíssem por uma ação direta a distância. Imaginava que deveria haver algum modo de explicar a gravitação, mas foi incapaz de encontrar um mecanismo que explicasse os fenômenos conhecidos e que não introduzisse enormes dificuldades físicas. Por isso, preferiu evitar hipóteses sobre isso, utilizando a gravitação para explicar os fenômenos observáveis, porém sem explicar a própria gravitação. Em uma carta a Leibniz, Newton escreveu:

Pois como os movimentos celestes são mais regulares do que se viessem de vórtices e obedecessem a outras leis, os vórtices em nada contribuem para regular e sim para perturbar os movimentos dos planetas e cometas; e como todos os fenômenos dos céus e do mar seguem-se precisamente, tanto quanto estou ciente, apenas de que a gravidade age de acordo com as leis descritas por mim; e como a natureza é muito simples; eu próprio concluí que todas as outras causas devem ser rejeitadas, e que os céus devem ser despídos tanto quanto possível de matéria; caso contrário o movimento dos planetas e cometas seria impedido e tornado irregular. Mas se, enquanto isso, alguém explicar a gravidade e todas as suas leis pela ação de alguma matéria mais sutil, e mostrar que o movimento dos planetas e cometas não será perturbado por essa matéria, eu estarei longe de objetar. (Newton, carta para Leibniz, 16 de outubro de 1693 em Newton, *Correspondence*, v. 3, p. 287 [10])

A posição de Newton não foi corretamente compreendida por seus contemporâneos, e no século XVIII quase todos os “newtonianos” afirmavam que a força gravitacional era uma ação direta a distância⁴. A procura de hipóteses explicativas para a gravitação e outras forças (como eletricidade e magnetismo) parecia ser não apenas inútil mas até nociva, levando a dis-

cussões infundáveis e não proporcionando um conhecimento firme, bem estabelecido. Quando Coulomb, no final do século XVIII, estabeleceu que as forças eletrostáticas e magnéticas (entre os pólos de ímãs) obedeciam à lei do inverso do quadrado da distância, parecia que todas as forças importantes da natureza obedeciam ao mesmo esquema e que bastava conhecer essas leis para explicar os fenômenos – sem ficar perguntando como um ímã consegue atrair ou repelir outro ímã.

Quando Hans Christian Ørsted descobriu o eletromagnetismo, em 1829, ele adotou outra postura. Para explicar como uma agulha magnética se posicionava perto do fio condutor ele supôs que a corrente elétrica produzia turbilhões que *giravam* em torno do fio, pois não era possível explicar o efeito através da idéia de atrações e repulsões [12]. No entanto, sua proposta teve pequena aceitação. Ampère mostrou que as forças entre correntes elétricas podiam ser analisadas como simples atrações e repulsões e, supondo que um ímã é equivalente a um solenóide, explicou todos os fenômenos eletromagnéticos que eram conhecidos utilizando a idéia de forças a distância⁵.

Foi Michael Faraday (1791-1867) quem, em meados do século XIX, defendeu mais fortemente a idéia de que as forças eletromagnéticas são transmitidas por *linhas de força* que têm realidade física⁶. Segundo ele, duas cargas elétricas que se atraem ou repelem não interagem diretamente a distância. Elas são puxadas ou empurradas pelas linhas de força, que seriam coisas reais, que se estendem pelo espaço e que transmitem as forças entre as cargas. Cada carga elétrica era pensada por Faraday como uma pequena esfera dotada de “cabelos” que se espalhavam para todos os lados. Os “cabelos” de uma carga elétrica negativa estariam sempre ligados a cargas elétricas positivas, e vice-versa. Nenhum desses fios ligaria duas cargas de mesmo sinal. Supondo que essas linhas de força são semelhantes a molas que tendem a diminuir de tamanho era possível entender que elas puxavam as cargas de sinais opostos umas para as outras. Além disso, supondo que elas se empurram umas às outras lateralmente, era possível explicar os fenômenos de aparente repulsão entre cargas de mesmo sinal ([17], §§1224-5, 1231, 1297). Os efeitos magnéticos também seriam produzidos por linhas de força magnética, com propriedades semelhantes a essas ([17], §§3266-8, 3280, 3294-5; ver também [18]). Porém, a partir da descoberta do efeito magneto-óptico⁷, Faraday passou a considerar que as

⁴Hesse [11] apresenta uma boa descrição histórica e análise filosófica da tensão existente entre a idéia de ação direta a distância e a idéia de campo (que corresponde exatamente à suposição de que há um intermediário responsável pelas forças), nesse período.

⁵Não é possível, evidentemente, apresentar aqui todos os detalhes sobre o desenvolvimento do eletromagnetismo. Há uma boa obra recente que discute a história do eletromagnetismo durante o século XX: [13].

⁶A interpretação dos conceitos de Faraday não é fácil, pois suas idéias mudaram com o tempo. A evolução do pensamento de Faraday é descrita por Williams, 1965, capítulo 10 [14]. Ver também [15]. As idéias sobre linhas de força aqui apresentadas estão presentes nos trabalhos que Faraday escreveu em torno de 1850 [16].

⁷Tomando-se um sólido transparente (como o vidro) que não atua sobre a polarização da luz e colocando-o entre os pólos de um forte eletroímã, vê-se que o material se torna opticamente ativo e que passa a girar o plano de polarização da luz, quando a luz tem um movimento paralelo às linhas de força magnéticas. Isso indicava que cada linha do campo magnético tinha uma simetria semelhante à

linhas de força magnéticas possuíam uma propriedade especial: elas girariam em torno de seu comprimento ([17], §§2162-75; [19]; [14], pp. 386-391)

Não ficava muito claro, no trabalho de Faraday, como as linhas de força elétricas e magnéticas interagiam entre si.

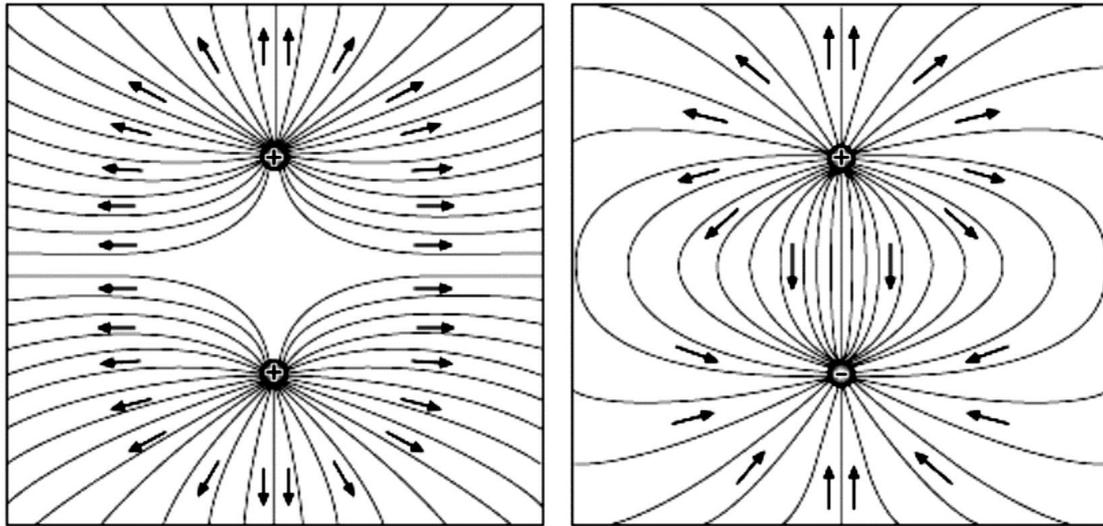


Figura 1 - Faraday entendia a repulsão e atração entre cargas elétricas como efeitos indiretos, produzidos pelas linhas de força.

3. O éter de Maxwell

James Clerk Maxwell (1831-1879) foi fortemente influenciado por Faraday, acreditando também que as forças eletromagnéticas não podiam ser produzidas diretamente a distância. Em seu *Treatise on Electricity and Magnetism*, Maxwell adotou a idéia das linhas de força, afirmando que as ações elétricas seriam um fenômeno de tensão do meio (éter) ou de tensão ao longo das linhas e força ([20] §§47-8).

No entanto, em vez de se concentrar principalmente nas linhas de força, como Faraday, foi gradualmente voltando-se para a idéia de uma substância que preenchia todo o espaço e que transmitia os efeitos eletromagnéticos. Nessa época, praticamente todos os físicos aceitavam que a luz era uma onda que se propagava no éter. Maxwell adotou a idéia do éter e, quando mostrou que a luz era também um fenômeno eletromagnético, tornou-se natural pensar que esse mesmo éter era tanto o intermediário das forças eletromagnéticas quanto o meio que transmitia as vibrações luminosas.

Maxwell incorporou ao seu éter muitas idéias que Faraday havia desenvolvido para as linhas de força. O éter não seria uma matéria no sentido usual da palavra, mas teria propriedades mecânicas, podendo transmitir forças à matéria através de suas tensões, pressões e rotações. Essa não era uma hipótese puramente qualitativa: Maxwell se preocupou em associar propriedades

quantitativas ao éter. Foi pelo cálculo das pressões e tensões dos campos elétrico e magnético no éter que Maxwell calculou, pela primeira vez, a pressão produzida pelas ondas eletromagnéticas (incluindo a luz) sobre uma superfície material.

Em meados do século XIX o conceito de energia se tornou uma das principais ferramentas da física. Maxwell estudou a energia dos campos elétrico e magnético, mas adotou uma abordagem diferente da que era usual, na época. Quando se considera um capacitor que está inicialmente descarregado e para o qual se transportam cargas elétricas opostas, pode-se calcular a energia eletrostática que fica acumulada nele simplesmente calculando o trabalho realizado sobre as cargas que se deslocam para as placas. A energia eletrostática pode ser calculada levando-se em conta as forças entre todos os pares de partículas eletrizadas⁸:

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{q_i q_j}{4\epsilon_0 \pi r_{ij}} \quad (1)$$

Mas onde fica essa energia? A idéia mais comum era a de que a energia estaria nas próprias cargas elétricas. Maxwell pensou de outra forma. As cargas elétricas produzem tensões no éter; o movimento dessas cargas produz um trabalho nesse éter elástico, como uma mola que é esticada ou contraída. No caso da mola, a energia potencial fica distribuída no material que está tensionado. Da mesma forma, no caso das forças eletromagnéticas, a energia devia estar no éter. De acordo

de um cilindro que gira.

⁸Neste artigo será utilizada a notação moderna do eletromagnetismo, com as equações utilizando o sistema internacional de unidades. Essa é uma simplificação, que se destina a facilitar a leitura por parte dos físicos atuais. A notação matemática utilizada no eletromagnetismo durante o século XIX era geralmente diferente de atual [21].

com Maxwell, a energia eletrostática de uma carga não está dentro da carga, mas sim distribuída sob forma de tensão no éter em sua volta. Segundo ele, a energia eletrostática é uma energia potencial associada às tensões do éter ([20], §§109-10, 630, 638; [22]; [23]).

Seguindo uma análise matemática que já havia sido desenvolvida por William Thomson [24] Maxwell desenvolveu essa idéia quantitativamente e mostrou que a energia eletrostática associada a qualquer condutor carregado podia ser calculada analisando-se o campo elétrico desse condutor, em todo o espaço ([20], §99a):

$$W_e = \frac{1}{2} \int \epsilon E^2 dV. \quad (2)$$

Ainda utilizamos a mesma equação de Maxwell para isso, atualmente; mas já não pensamos que estamos calculando a energia potencial do éter, ao fazer esses cálculos.

Na teoria de Maxwell, além de energia potencial, o éter tem também uma energia cinética, associada ao campo magnético ([20], §630-638). Esse é um aspecto da teoria que é mais difícil de entender. Só pode haver energia cinética se houver movimento. Por que o campo magnético deveria estar associado a movimentos do éter?

Há duas justificativas para essa associação. Em primeiro lugar, as correntes elétricas produzem campos magnéticos, e correntes elétricas representam o movimento de cargas. Portanto, há uma relação entre campos magnéticos e movimentos e poderia ser possível associar uma energia cinética a eles.

Mas há um segundo argumento, um pouco diferente e mais significativo. Quando há uma corrente elétrica percorrendo um fio e a corrente é interrompida bruscamente (por exemplo, cortando-se o fio), aparece uma faísca, que indica que a corrente elétrica tem uma tendência a se manter. Esse fenômeno é devido à auto-indução das correntes elétricas e foi considerado por Maxwell como semelhante à inércia dos corpos materiais ([20] §§546-7). Não se deve pensar que isso representa a própria inércia das cargas em movimento dentro dos condutores. O fenômeno é de outro tipo, pois não depende apenas da intensidade da corrente elétrica e do comprimento do fio, mas também da *forma* do condutor. A auto-indução de um fio esticado é muito menor do que a de um fio enrolado sob a forma de uma bobina. Cortando-se o fio que liga uma bateria a um fio enrolado sob a forma de um solenóide aparece uma faísca muito mais forte do que no caso em que a mesma bateria está ligada ao mesmo fio, mas o fio está esticado, em vez de formar uma bobina ([20], §§548-9).

Maxwell mostrou que esses efeitos podem ser compreendidos se associarmos a inércia da corrente elétrica ao campo magnético que ela produz. Em um solenóide, o campo magnético é muito mais forte do que em torno

de um fio esticado. Por isso, a inércia da corrente elétrica é muito maior, também.

Quando se estabelece uma corrente elétrica em um condutor, cria-se um campo magnético à sua volta, que armazena energia. Essa energia não pode desaparecer e, quando se tenta interromper a corrente elétrica, essa energia produz efeitos, como a faísca descrita acima. É razoável aceitarmos, seguindo Maxwell, que essa energia do campo magnético é um tipo de energia cinética, ou seja, uma energia associada ao movimento.

Maxwell desenvolveu a teoria quantitativa desses fenômenos e mostrou que era possível calcular a energia associada à corrente elétrica em um fio a partir do campo magnético no espaço em volta do condutor. Em cada ponto do espaço onde há campos elétricos e magnéticos há uma *densidade de energia elétrica* ρ_e (energia potencial) proporcional ao quadrado do campo elétrico E e uma *densidade de energia magnética* ρ_m (energia cinética) proporcional ao quadrado do campo magnético H :

$$\rho_e = \frac{dW_e}{dV} = \frac{\epsilon E^2}{2}, \quad (3)$$

$$\rho_m = \frac{dW_m}{dV} = \frac{\mu}{2} H^2. \quad (4)$$

Em sua concepção, essa energia estaria sob a forma de movimentos reais (de rotação) produzidos no éter, pois ele aceitava que o efeito magneto-óptico de Faraday era uma evidência do movimento rotacional do éter em torno das linhas de força magnéticas ([20], §§636, 821, 831).

Nós continuamos a utilizar a fórmula de Maxwell, mas já não pensamos que estamos calculando uma energia cinética do éter.

Se o campo elétrico está associado a movimentos no éter, deve haver também um momento vinculado a ele. E, na teoria de Maxwell, isso realmente ocorre. Porém, o campo magnético em torno de um fio que transporta uma corrente elétrica não é paralelo ao fio e sim perpendicular a ele, formando círculos concêntricos em torno do condutor. A direção do momento associado ao campo magnético não pode ser, portanto, a direção das linhas de força. Maxwell acabou por concluir que o momento associado ao campo magnético tem a direção do *potencial vetor*⁹. Quando uma carga elétrica q (mesmo parada) está em um campo magnético, ela tem um momento \vec{p} adicional, proporcional ao potencial vetor \vec{A}

$$\vec{p} = q\vec{A}. \quad (5)$$

Portanto, o éter, na teoria de Maxwell, possui diversas propriedades mecânicas: ele produz forças e tensões (e pode produzir pressão, no caso da luz); contém energia cinética e potencial; e contém momento mecânico.

⁹O caminho que levou Maxwell a este conceito do potencial vetor é descrito em [25].

A versão final da teoria de Maxwell foi publicada em 1873, em seu livro *Treatise on electricity and magnetism*. A produção experimental de ondas eletromagnéticas por Heinrich Hertz (1857-1894), em 1887, foi uma importante confirmação da teoria [26]. Pode-se dizer que, no final do século XIX, praticamente todos os físicos haviam se convencido de que a teoria de Maxwell descrevia corretamente todos os fenômenos conhecidos e que o éter eletromagnético realmente existia.

4. Análise de Thomson para uma carga em movimento

Em 1881, utilizando a teoria de Maxwell, Joseph John Thomson (1856-1940) estudou o movimento de uma carga elétrica no vácuo, procurando analisar as suas propriedades dinâmicas. Ele analisou as variações de energia do campo eletromagnético devidas ao movimento da carga [27]¹⁰.

Uma carga elétrica parada tem apenas campo elétrico e energia eletrostática. Para uma carga q distribuída sobre a superfície de uma esfera de raio a , o valor dessa energia eletrostática W_e é

$$W_e = \frac{q^2}{8\varepsilon_0\pi a}. \quad (6)$$

Uma carga elétrica em movimento produz à sua volta um campo magnético, circular (como o que existe em volta de um fio conduzindo corrente elétrica). O campo magnético produzido pela carga em movimento contém uma energia adicional, que não estava presente quando a carga estava parada. Qual o valor dessa energia adicional?

Primeiramente, era necessário saber qual o valor dos campos elétrico e magnético, em cada ponto do espaço, em torno da carga em movimento. Isso nunca havia sido calculado, antes.

Thomson supôs que, para velocidades baixas da carga, seu campo elétrico não muda muito com o movimento (ou seja, em primeira aproximação, o campo é igual ao de uma carga parada). Assim, a energia do campo elétrico não depende da velocidade. Mas o movimento da carga é equivalente a uma corrente elétrica e produz um campo magnético à sua volta. Em primeira aproximação, o valor desse campo magnético H é dado por

$$\vec{H} = \vec{v} \times \vec{E}, \quad (7)$$

onde \vec{v} é a velocidade da carga e \vec{E} é o seu campo elétrico em cada ponto do espaço.

Como o campo magnético é proporcional à primeira potência da velocidade e como a densidade de energia magnética é proporcional ao quadrado do campo

magnético, é evidente que a energia magnética W_m associada à carga em movimento será proporcional ao quadrado da velocidade. O resultado da integração da densidade de energia magnética sobre todo o espaço é

$$W_m = \frac{q^2 v^2}{12\varepsilon_0\pi a c^2}, \quad (8)$$

onde v é a velocidade da carga q , a é o seu raio e c é a velocidade da luz no vácuo.

A energia magnética de uma carga em movimento (não muito rápido) é proporcional ao quadrado da sua velocidade, como a energia cinética K de uma partícula, na física clássica:

$$K = \frac{mv^2}{2}. \quad (9)$$

Comparando-se as duas fórmulas, vê-se que a energia magnética pode ser considerada como uma energia cinética adicional, e a expressão entre parênteses na equação abaixo pode ser interpretada como uma “massa eletromagnética”:

$$W_m = \frac{1}{2} \left(\frac{q^2}{6\varepsilon_0\pi a c^2} \right) v^2. \quad (10)$$

Essa energia magnética poderia ser considerada como um tipo de energia cinética, em dois sentidos. Primeiramente, porque já vimos que Maxwell e seus seguidores consideravam que a energia magnética seria a energia cinética do éter. Em segundo lugar, porque a energia magnética relacionada com a carga em movimento era proporcional ao quadrado de sua velocidade, exatamente como na fórmula usual da energia cinética de uma partícula.

A massa eletromagnética de uma esfera com carga q seria, portanto, igual a:

$$m_e = \frac{q^2}{6\varepsilon_0\pi a c^2} \quad (11)$$

Porém, já havíamos visto que a energia eletrostática da mesma esfera era igual a

$$W_e = \frac{q^2}{8\varepsilon_0\pi a}. \quad (12)$$

Portanto, a “massa eletromagnética” é proporcional à energia eletrostática associada à carga

$$m_e = \frac{4}{3} \frac{W_e}{c^2}. \quad (13)$$

Essa fórmula não aparece no trabalho de Thomson de 1881, mas é obtida facilmente a partir de seus resultados. Note-se sua semelhança com a relação relativística entre massa e energia, $m = E/c^2$. O fator numérico $4/3$ será discutido posteriormente.

Na época, esses resultados foram interpretados da seguinte forma. Uma partícula sem carga, para ser

¹⁰O artigo de Thomson continha um pequeno lapso, que foi corrigido alguns meses depois por George Francis Fitzgerald (1851-1901)[28].

acelerada até a velocidade v , precisa receber uma energia K dada por $K = \frac{1}{2}mv^2$, correspondente ao trabalho fornecido pela força aceleradora. Essa energia fica armazenada na própria partícula. No caso de uma partícula carregada, além dessa energia cinética ordinária, existe uma energia magnética adicional. Assim sendo, para acelerar a partícula carregada, a força aceleradora deve fornecer uma energia total maior do que no caso da partícula neutra. Essa energia pode ser representada por $K' = \frac{1}{2}(m + m_e)v^2$, onde m_e é a massa eletromagnética.

Como vimos, esse conceito de massa eletromagnética surgiu por comparação com a fórmula da energia cinética. Trata-se de um conceito específico, que poderia ser chamado de “massa cinética” ou de “capacidade de energia cinética eletromagnética”, se adotarmos a nomenclatura proposta por Henri Poincaré (1854-1912) e Paul Langevin (1872-1946)¹¹. Mais adiante veremos que surgiram outros conceitos de massa diferentes desse.

Note-se que a massa eletromagnética e a energia cinética que lhe está associada não estão *dentro* da partícula e sim distribuídas pelo éter em torno da carga, ocupando um volume infinito.

Em 1895 (antes da descoberta do elétron), Joseph Larmor sugeriu que a matéria poderia ser simplesmente um conjunto de partículas elétricas e que, nesse caso, toda a inércia poderia ser de origem eletromagnética. Nesse caso, não existiria a “massa ordinária”¹².

Após o trabalho de J.J. Thomson, o éter tinha uma nova propriedade mecânica: além de exercer forças, produzir pressões, ter energia potencial e cinética e um momento magnético, existia também a massa eletromagnética. Note-se que essa massa eletromagnética não é a massa do próprio éter. É a massa associada a uma mudança no éter – pois o campo magnético produzido por uma carga em movimento seria justamente essa mudança.

5. O campo de cargas em movimento rápido

Quando uma carga elétrica se move com alta velocidade (comparável à velocidade da luz), o seu campo elétrico se deforma e a análise de J.J. Thomson já não pode ser aplicada. A própria energia *elétrica* em torno da carga depende da velocidade; e é necessário fazer um cálculo mais complicado para a energia magnética da carga.

O primeiro pesquisador que conseguiu calcular o campo de uma carga em movimento rápido foi Oliver Heaviside (1850-1925), em um artigo publicado em 1889 [31]. Esses cálculos eram muito complexos e alguns autores criticaram o método operacional utilizado por Heaviside para chegar ao seu resultado. Por isso, J.J.

Thomson deduziu novamente os mesmos resultados, por outro método, confirmando as equações de Heaviside [32],[33].

Atualmente é bastante fácil calcular o campo de uma carga em movimento utilizando a teoria da relatividade, que nos permite passar do campo eletrostático de uma carga em repouso ao seu campo em relação a qualquer referencial. Mas, na época, essas transformações ainda não eram conhecidas.

Em 1896, utilizando os resultados de Heaviside, um estudante de J.J. Thomson chamado George Frederic Charles Searle (1864-1954) provou que o campo de uma carga pontual em movimento rápido é igual ao campo de uma carga em forma de elipsóide, com seu comprimento reduzido na direção do movimento por um fator $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ [34]. Ele deu a essa esfera achatada o nome de “elipsóide de Heaviside”.

No mesmo artigo, Searle calculou a energia associada ao campo de uma esfera carregada, obtendo um resultado válido para altas velocidades. Esse resultado exato mostrou que a energia eletromagnética adicional (ou seja, descontando a energia eletrostática de repouso) era igual a

$$W = \frac{q^2}{8\varepsilon_0\pi a} \left(\frac{c}{v} \ln \frac{c+v}{c-v} - 2 \right). \quad (14)$$

Essa energia não é proporcional ao quadrado da velocidade, no caso de altas velocidades. Porém, desenvolvendo em série a fórmula acima, pode-se verificar que ela se reduz ao resultado obtido por Thomson, no caso de baixas velocidades,

$$W = \frac{q^2}{4\varepsilon_0\pi a} \left(\frac{v^2}{3c^2} + \frac{v^4}{5c^4} + \frac{v^6}{7c^6} + \dots \right). \quad (15)$$

Se a velocidade for próxima à velocidade da luz, a energia eletromagnética da carga crescerá mais depressa do que o quadrado da velocidade da partícula. Isso poderia ser interpretado supondo que a massa eletromagnética aumenta com a velocidade.

A equação obtida por Searle mostrava que a energia do campo eletromagnético de uma carga em movimento tenderia a infinito, quando a velocidade da carga tendesse a c . Portanto, seria necessário fornecer um trabalho infinito para acelerar essa carga até a velocidade da luz. Por essa razão, Thomson e Searle concluíram que era impossível acelerar uma carga a uma velocidade igual ou superior a c [35]. Esse é um resultado bem conhecido da teoria da relatividade, que estava no entanto sendo deduzido a partir de considerações puramente eletromagnéticas, sem fazer uso dos postulados da relatividade especial.

¹¹É possível definir a massa inercial de diversas maneiras, e as diferentes definições levam a diferentes equações, no caso da teoria da relatividade (e no caso da teoria eletromagnética, aqui descrita). Ver [29].

¹²Ver [30], a respeito das contribuições de Larmor à teoria da relatividade.

6. A massa dos elétrons

Nessa mesma época (1896-1897) foi descoberto o elétron, como resultado dos estudos de Thomson sobre raios catódicos, e de Pieter Zeeman (1865-1943) sobre o efeito Zeeman. Analisando teoricamente o efeito Zeeman, Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928) encontrou um valor para a razão e/m da carga e para a massa m dos elétrons. Medindo a deflexão de raios catódicos em campos elétricos e magnéticos, Thomson e Walter Kaufmann (1871-1947) mediram em 1897 a razão e/m para elétrons de baixa velocidade, obtendo valores que concordavam com a estimativa de Lorentz [36]; [37].

Em 1898 e 1900, Phillip Lenard (1862-1947) mediu e/m para raios beta com velocidades de até $c/3$ [38]. As medidas indicaram um aumento da massa com a velocidade. Os dados não eram conclusivos, mas podiam ser interpretados como uma indicação de que os elétrons tinham uma massa eletromagnética que variava com a velocidade.

Em 1901 Walter Kaufmann mediu e/m para raios beta com velocidades entre 0,8 e 0,9 c [39]; ver também [40]. Agora, havia um claro aumento de massa com a velocidade. A partir das equações de Heaviside e Searle, Kaufmann calculou a massa eletromagnética μ

$$\mu = \frac{q^2}{8\epsilon_0\pi Rv^2} \left[-\frac{c}{v} \ln\left(\frac{c+v}{c-v}\right) + \frac{2}{1-v^2/c^2} \right]. \quad (16)$$

No entanto, os dados experimentais não concordavam quantitativamente com a equação. Além da massa eletromagnética, supunha-se que o elétron teria também uma massa “puramente mecânica” que seria constante. Assim, Kaufmann concluiu que 1/3 da massa do elétron era eletromagnética (ou aparente), dependente da velocidade; e o restante seria massa mecânica (real, constante).

Em janeiro de 1902 Max Abraham (1875-1922) criticou a análise teórica de Kaufmann e calculou a massa do elétron utilizando considerações sobre o momento do campo eletromagnético, em vez de energia [41]¹³. Para explicar o argumento de Abraham é necessário voltar um pouco no tempo.

Em 1884-85 John Henry Poynting (1852-1914) e Heaviside haviam chegado ao “vetor de Poynting” que descreve o fluxo de energia de um campo eletromagnético [45]; [46]). Sempre que há campos elétrico e magnético que não sejam paralelos, há fluxo de energia eletromagnética, dado pela equação

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}. \quad (17)$$

Esse fluxo de energia eletromagnética foi imaginado como correspondendo a algum tipo de movimento do

éter. Em 1893, J.J. Thomson introduziu um momento eletromagnético associado ao fluxo de energia ([47], capítulo 1; ver também [?]). De acordo com ele, existe uma densidade de momento eletromagnético \vec{g} associada a todo fluxo de energia \vec{S} dada por

$$\vec{g} = \frac{\vec{S}}{c^2}. \quad (18)$$

Essa relação entre fluxo de energia e densidade de momento é uma equação fundamental da física; é a base da teoria relativística de meios contínuos e foi utilizada, entre outras coisas, na estruturação do tensor de momento-energia utilizado na teoria da relatividade geral.

Hoje em dia, essa fórmula é interpretada como uma descrição da densidade do momento do campo eletromagnético no espaço vazio. No final do século XIX, a proposta de Thomson devia ser compreendida como uma nova propriedade física do éter. Havia um motivo muito simples e forte para introduzir esse novo conceito. O éter pode produzir forças sobre partículas carregadas. Portanto, as partículas podem sofrer mudanças de seu momento, pela ação do éter. Se o éter não tivesse um momento, isso violaria a lei de conservação do momento – ou seja, a terceira lei de Newton.

Utilizando-se a idéia de Thomson, é fácil ver que uma onda eletromagnética tem momento, já que ela tem campos elétrico e magnético e eles não são paralelos um ao outro. O campo de uma carga elétrica em movimento também tem momento, já que os campos elétrico e magnético não são paralelos, também.

Utilizando a equação de Thomson, Abraham calculou o momento eletromagnético \vec{G} do campo em volta de uma carga em movimento¹⁴, obtendo o seguinte valor:

$$G = \frac{e^2}{8\epsilon_0\pi Rc} \left[\left(\frac{1+\beta}{2\beta^2} \right) \ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta} - 1 \right) \right], \quad (19)$$

onde $\beta = v/c$. A direção desse vetor é paralela à da velocidade do elétron.

Para calcular a massa do elétron, Abraham partiu da segunda lei de Newton sob a forma $\vec{F} = d\vec{p}/dt$. Quando o elétron está submetido a uma força externa, seu momento pode mudar tanto de direção quanto em magnitude. No caso em que a força que atua sobre o elétron é paralela à sua velocidade inicial, apenas o valor do momento sofrerá mudança. Nesse caso (aceleração longitudinal) temos que

$$\vec{F}_{//} = \frac{d\vec{G}}{dt} = \frac{dG}{dt} \hat{v} = \frac{dG}{dv} \frac{dv}{dt} \hat{v} = \frac{dG}{dv} \vec{a}_{//}. \quad (20)$$

¹³Ver também [42]; [43]; [44]. Consultar [6] e [40], a respeito das contribuições de Abraham.

¹⁴No ano anterior (1901)[?], Lorentz já havia calculado o momento de um elétron, mas ele utilizou uma aproximação que só era válida para baixas velocidades.

No caso em que a força é longitudinal, $(dv/dt)\hat{v}$ é a aceleração longitudinal $\vec{a}_{//}$, e dG/dv pode ser interpretado como a massa do elétron. Abraham a chamou de “massa longitudinal”.

Se a força é perpendicular à velocidade do elétron (como no caso de uma força magnética que atua sobre a partícula em movimento), os módulos da velocidade e do momento não sofrerão mudança, mas o elétron será desviado e sua trajetória será circular. Nesse caso, temos que

$$\vec{F}_{\perp} = \frac{d\vec{G}}{dt} = G \frac{d\hat{v}}{dt} = \frac{G}{v} \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{G}{v} \vec{a}_{\perp}. \quad (21)$$

A aceleração transversal \vec{a}_{\perp} é a aceleração centrípeta do movimento circular do elétron e G/v pode ser interpretado como a massa do elétron. Abraham a chamou de “massa transversal”. A partir da equação do momento eletromagnético do elétron, obtemos os seguintes valores para a massa longitudinal e transversal:

$$m_{//} = \frac{e^2}{8\varepsilon_0\pi Rc^2} \frac{1}{\beta^2} \left[-\frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right) + \frac{2}{1-\beta^2} \right] \quad (22)$$

$$m_{\perp} = \frac{e^2}{8\varepsilon_0\pi Rc^2} \frac{1}{\beta^2} \left[\left(\frac{1+\beta}{2\beta} \right) \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right) - 1 \right] \quad (23)$$

Deve-se notar que a equação da massa longitudinal é idêntica à equação que tinha sido desenvolvida por Kaufmann, a partir de considerações de energia.

As duas equações têm o limite igual a $\frac{e^2}{6\varepsilon_0\pi Rc^2}$ para velocidades muito menores do que c . Porém, para velocidades elevadas (próximas de c), produzem resultados diferentes.

Nos experimentos de Kaufmann, ele havia utilizado uma equação equivalente à da massa longitudinal, mas estava medindo a *deflexão* dos elétrons. Portanto, sua análise teórica dos experimentos estava errada. Ele deveria ter utilizado a massa *transversal*.

Kaufmann reconheceu que estava enganado e, em 1902, publicou um novo artigo, com medidas adicionais que foram analisadas utilizando a teoria de Abraham [48]. Agora, ele concluiu que havia uma boa concordância entre os dados experimentais e a fórmula da massa transversal e concluiu que *toda a massa do elétron era puramente eletromagnética*.

Portanto, em 1902 (três anos antes do primeiro artigo de Einstein sobre relatividade) já existiam medidas experimentais que mostravam que a massa do elétron variava; e existia uma teoria eletromagnética da massa que conseguia explicar quantitativamente esse efeito. Toda a bagagem conceitual necessária para as deduções vinha do eletromagnetismo de Maxwell (e seus desenvolvimentos posteriores), acompanhado de idéias a respeito das propriedades mecânicas do éter. Essa teoria,

até esse momento, não era relativística – ou seja, não utilizava em suas deduções o princípio da relatividade.

Note-se que, nos trabalhos desencadeados por J.J. Thomson em 1881, a massa eletromagnética era calculada a partir de considerações de energia cinética. Ou seja: tomava-se a equação $K = mv^2/2$ como sendo a relação fundamental a partir da qual se definia a massa eletromagnética. Pode-se chamar esse conceito de *massa cinética*. Posteriormente, na abordagem utilizada por Abraham, as massas eletromagnéticas (longitudinal e transversal) passam a ser calculadas a partir da relação vetorial $\vec{p} = m\vec{v}$, que é depois derivada em relação ao tempo para se obter as acelerações nos casos em que a força é paralela ou perpendicular ao movimento da partícula. Então, utilizando-se a relação $\vec{F} = m\vec{a}$, obtêm-se as duas massas. Pode-se chamar esse conceito de *massa acelerativa*.

7. A massa associada à luz

Em 1900, Henri Poincaré utilizou o conceito de momento eletromagnético para discutir a validade da lei de ação e reação, no eletromagnetismo [49]¹⁵. De acordo com a teoria de Maxwell, o éter é quem produz forças sobre as cargas elétricas. Se uma força atua sobre uma carga elétrica, seu momento se altera. Para que haja conservação da quantidade de movimento total, é necessário que o momento do éter também se altere. O momento que deve ser associado ao éter é dado pela fórmula de Thomson, $\vec{g} = \vec{S}/c^2$, onde \vec{S} é o fluxo de energia.

Para que se possa pensar em um momento do éter, é necessário imaginar duas coisas: que o éter pode se mover e que ele tem massa – ou que existe *alguma coisa* associada ao éter que pode se mover e ter massa.

Um pulso de radiação eletromagnética emitido em uma determinada direção deve ter um momento associado a ele. Maxwell já havia provado que as ondas eletromagnéticas devem exercer pressão e, portanto, transportam momento. Utilizando a análise de Thomson, Poincaré mostrou que tal tipo de pulso, de energia E , deveria ter um momento igual a $p = E/c$. Como a luz tem a velocidade c no vácuo, e como o momento mecânico é dado por $\vec{p} = m\vec{v}$, é possível associar uma massa $m = E/c^2$ ao pulso de luz. Ele mostrou que era necessário associar essa massa à radiação para manter o teorema do centro de massa. Se a luz não tivesse massa, o centro de massa de uma caixa poderia se deslocar, violando o princípio de inércia. Neste caso, a massa é definida diretamente a partir da equação do momento, sem utilizar acelerações (já que a luz não pode ser acelerada). Esse conceito de massa é chamado de *massa maupertuisiana*.

A massa maupertuisiana ($m = p/v$), a massa acelerativa ($m = F/a$) e a massa cinética ($m = 2E/v^2$) são,

¹⁵Ver os artigos [2]; [4] e [50], a respeito das contribuições de Poincaré à teoria da relatividade.

todas elas, massas inerciais (não envolvem conceitos de gravitação e peso). Na física clássica elas são um único conceito [51]. Na física relativística, são distintas e geralmente levam a resultados diferentes. Dessas três, considera-se que a mais fundamental (e que é utilizada nas deduções atuais da teoria da relatividade) é a massa maupertuisiana, ou seja, a massa que aparece na relação $\vec{p} = m\vec{v}$.

Atualmente dizemos que a luz não tem massa. É conveniente, portanto, esclarecer melhor esse ponto. A luz não possui *massa de repouso*. Ou seja: se fosse possível reduzir a velocidade da luz (no vácuo) e colocá-la em repouso, sua massa seria nula. Não é possível parar a luz, e pode-se perguntar que sentido tem, então, falar sobre tal massa de repouso. Suponhamos que temos um pulso de radiação, de energia E , se movendo na direção x , em um determinado referencial S . Agora, suponhamos que um outro referencial S' se move na mesma direção e sentido. Quanto maior a velocidade desse referencial S' em relação ao primeiro, menor será a energia E' da radiação em relação a ele, e menor será também sua massa (calculada pela equação $m' = E'/c^2$). Quando a velocidade desse referencial se aproxima de c , a massa do pulso de radiação tende a zero, em relação a ele. Não existe, portanto, contradição entre a idéia de que a massa de repouso da luz é nula, e a relação $m = E/c^2$ aplicada à luz.

Em 1901 foi testada experimentalmente a existência de uma pressão da luz em espelhos, que havia sido prevista teoricamente por Maxwell em 1873. O resultado positivo obtido por Pyotr Lebedew (1866–1912) e por Ernest Fox Nichols (1869–1924) e Gordon Ferrie Hull (1870–1956), não constituiu nenhuma surpresa, pois havia forte confiança na previsão [52], [53] e [54]¹⁶. Na verdade, esse efeito nem mesmo é uma propriedade específica das ondas eletromagnéticas. Qualquer onda que transporte energia (como o som ou ondas na água) também produz uma pressão [56].

Essa confirmação experimental da pressão da luz, em 1901, levou a novos desenvolvimentos teóricos. Em 1904, Max Abraham calculou a pressão produzida pela radiação sobre uma superfície *em movimento*, quando um feixe de luz atinge um espelho formando qualquer ângulo com sua normal [57]. Utilizando os resultados de Abraham, Friedrich Hasenöhr (1874–1916) estudou a dinâmica de uma caixa cheia de radiação [58].

Suponhamos uma caixa em forma de paralelepípedo, com arestas paralelas aos eixos x, y, z com superfícies internas perfeitamente refletoras, cheia de radiação. Se a caixa estiver em repouso, a radiação produzirá pressões iguais em todas suas faces. Suponhamos, agora, que a caixa que estava em repouso é acelerada paralelamente ao eixo x . A pressão da luz na superfície da parte de trás da caixa será *maior* do que quando ela

estava em repouso, e na superfície na parte da frente da caixa será *menor*. O motivo é, basicamente, que a caixa aumenta de velocidade entre os momentos em que a radiação é refletida na parede oposta e o momento em que atinge a superfície.

Assim, a radiação produzirá uma *força resultante* contrária ao movimento da caixa. Portanto, para acelerar a caixa cheia de luz é necessária uma força maior do que para acelerar a mesma caixa sem radiação. Em outras palavras, a radiação aumenta a inércia da caixa.

O cálculo é bastante complicado, pois deve-se levar em conta a radiação que caminha em todas as direções, dentro da caixa refletora. O resultado, no entanto, é uma relação bastante simples entre a energia total E da radiação e sua contribuição m à inércia da caixa¹⁷

$$m = \frac{4E}{3c^2}. \quad (24)$$

O aumento de massa da caixa era proporcional à energia da radiação dentro dela. Note-se que aqui, como no caso da teoria do elétron, aparece o fator numérico $4/3$. Isso não era um engano. A diferença entre essas equações e a famosa relação $E = mc^2$ será esclarecida mais adiante.

Hasenöhr também calculou a mudança da energia da radiação decorrente da aceleração da caixa. Ele provou que a radiação total seria uma função da velocidade da caixa. Portanto, quando a caixa é acelerada, uma parte do trabalho realizado pelas forças externas é transformado em energia adicional da radiação. Como a inércia da radiação é proporcional à sua energia, e como essa energia aumenta com a velocidade da caixa, a inércia total aumentará com a velocidade do sistema. Quando a velocidade da caixa tende a c , sua inércia tende a infinito.

Se a temperatura interna da caixa aumentasse, a energia da radiação também aumentaria. Por isso, Hasenöhr concluiu que a massa de um corpo depende de sua energia cinética e de sua temperatura.

Abraham, logo depois, mostrou que era possível calcular de forma mais simples o *momento total* associado à radiação dentro da caixa em movimento. Utilizando esse outro método, obteve um resultado igual ao de Hasenöhr. No entanto, note-se que os métodos utilizados eram diferentes e os conceitos envolvidos eram distintos. O que Abraham calculou foi a *massa maupertuisiana* da radiação dentro da caixa. O que Hasenöhr calculou foi a contribuição da radiação para a *massa acelerativa* do sistema.

8. O elétron de Lorentz

Em 1892, Lorentz estudou o resultado nulo do experimento de Michelson e Morley, chegando à conclusão de

¹⁶[55] descreve a história da busca da pressão da luz.

¹⁷Hasenöhr chegou inicialmente a um resultado um pouco diferente deste, em 1904, por um erro de integração. Seu engano foi corrigido por Max Abraham no mesmo ano, e reconhecido por Hasenöhr em 1905.

que ele poderia ser explicado se todos os corpos em movimento através do éter sofressem uma contração longitudinal [59], [60]. Nesse primeiro trabalho, Lorentz chegou ao resultado aproximado (até segunda ordem de v/c):

$$L = L_0(1 - v^2/2c^2). \quad (25)$$

Posteriormente, ele passou a utilizar a expressão exata $L = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$, que representaria a contração dos corpos através do éter – ou, mais exatamente, a razão entre as dimensões longitudinais e as dimensões transversais do corpo deveria obedecer a essa relação.

Inicialmente, Lorentz utilizou a equação apenas para objetos macroscópicos. Depois, ele assumiu que essa contração deveria se aplicar aos componentes microscópicos dos corpos, incluindo o elétron. Por isso, em 1904 ele foi levado a desenvolver uma nova teoria dos elétrons, semelhante à de Abraham (ou seja, baseando-se em cálculos de momento) mas utilizando um modelo de um elétron contraído, em vez de um elétron esférico [61].

O processo de cálculo era semelhante ao utilizado por Abraham. Apenas os limites geométricos de integração eram diferentes. Lorentz obteve para o momento do elétron o seguinte valor

$$G = \frac{e^2}{6\varepsilon_0\pi Rc^2} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} v. \quad (26)$$

Seguindo a abordagem de Abraham, ele calculou a partir do momento tanto a massa longitudinal quanto a massa transversal do elétron, obtendo os seguintes valores

$$m_{//} = \frac{e^2}{6\varepsilon_0\pi Rc^2} \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}, \quad (27)$$

$$m_{\perp} = \frac{e^2}{6\varepsilon_0\pi Rc^2} \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}. \quad (28)$$

As equações de Lorentz parecem muito diferentes das de Abraham (e são muito mais simples). No entanto, para baixas velocidades, elas dão resultados semelhantes. Se desenvolvermos em série a fórmula de Abraham para a massa transversal do elétron, obtemos

$$m_{\perp} = \frac{e^2}{8\varepsilon_0\pi Rc^2} \frac{1}{\beta^2} \left[\left(\frac{1 + \beta}{2\beta} \right) \ln \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} - 1 \right) \right] \cong \frac{e^2}{6\varepsilon_0\pi Rc^2} \left(1 + \frac{2}{5}\beta^2 + \dots \right) \quad (29)$$

No caso da fórmula de Lorentz, o desenvolvimento em série dá o resultado

$$m_{\perp} = \frac{e^2}{6\varepsilon_0\pi Rc^2} \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \cong \frac{e^2}{6\varepsilon_0\pi Rc^2} \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \dots \right). \quad (30)$$

Portanto, a diferença entre as duas séries é um fator numérico no termo de segunda ordem em $\beta = v/c$. Quando a velocidade tende a zero, as duas fórmulas dão o mesmo resultado para a massa eletromagnética do elétron.

À primeira vista, pareceria fácil distinguir experimentalmente qual das duas fórmulas é a mais adequada. A questão não é tão simples, no entanto, pois a comparação é bastante indireta. Lorentz analisou os dados experimentais de Kaufmann utilizando sua própria teoria e concluiu que as medidas eram compatíveis tanto com ela quanto com a teoria de Abraham.

9. O elétron de Bucherer

Além dos modelos de Abraham e Lorentz, havia outras possibilidades. No mesmo ano em que Lorentz publicou sua teoria, Alfred Heinrich Bucherer (1863-1927) propôs uma outra [62],[63]. Ele assumiu que o elétron se contraía devido ao movimento, como Lorentz havia assumido, mas supôs que o seu volume permanecesse constante. Ou seja: o raio longitudinal do elétron contraído se tornaria $L = R(1 - v^2/c^2)^{1/3}$ e o seu raio transversal se tornaria $L' = R(1 - v^2/c^2)^{-1/6}$, onde R é o raio do elétron em repouso. A razão entre as duas dimensões obedeceria à equação de contração de Lorentz. Independentemente de Bucherer, a mesma teoria foi proposta, no ano seguinte, por Paul Langevin [64]. Com esse novo modelo, foram obtidas novas equações para as massas longitudinal e transversal do elétron:

$$m_{//} = \frac{e^2}{6\varepsilon_0\pi Rc^2} \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{4/3}}, \quad (31)$$

$$m_{\perp} = \frac{e^2}{6\varepsilon_0\pi Rc^2} \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/3}}. \quad (32)$$

Eram possíveis outros modelos diferentes desses. Todas as teorias acima referidas supunham que a carga do elétron estava espalhada sobre sua superfície; mas ela poderia estar distribuída em todo o seu volume. Além disso, podiam ser feitas outras hipóteses sobre a forma do elétron e sobre a distribuição de sua carga. Cada modelo levava a resultados diferentes para a relação entre massa e velocidade.

Nos anos seguintes, Kaufmann publicou novos dados experimentais e comparou suas medidas às três teorias do elétron descritas acima [65]. Ele concluiu que a

fórmula de Abraham era a que descrevia melhor os resultados. Max Planck (1858-1947), no entanto, criticou a análise de Kaufmann e concluiu que as medidas eram compatíveis tanto com as equações de Abraham quanto com as de Lorentz – e que estas últimas proporcionavam uma melhor concordância [66].

A situação não era muito clara, nessa época [67], [40]. Apenas dez anos depois foram feitos experimentos mais precisos que foram capazes de confirmar a fórmula de Lorentz e de excluir os outros modelos.

10. A análise de Poincaré

A evidência experimental não era suficientemente clara para permitir uma escolha entre os vários modelos do elétron. Poincaré, no entanto, proporcionou um argumento teórico importante a favor da teoria de Lorentz.

A maior parte dos resultados da teoria da relatividade já estava presente no artigo que Poincaré escreveu em 1905, mas que só foi publicado no ano seguinte, na Itália [68]¹⁸. Nesse trabalho ele discutiu a teoria de Lorentz e analisou os vários modelos do elétron. Ele mostrou que a teoria de Lorentz não era completa e que deveria ser suplementada pela suposição de uma força que impedisse o elétron de se expandir. Essa força não seria de natureza eletromagnética. Ela poderia ser descrita como um tipo de pressão negativa, de origem desconhecida. Era necessário levar em conta essa tensão ao calcular a energia e o momento do elétron; portanto, a dinâmica do elétron não poderia ser deduzida apenas do eletromagnetismo [2].

Tendo introduzido essa pequena alteração na teoria de Lorentz, Poincaré provou que apenas essa teoria era compatível com o princípio da relatividade – um princípio que ele próprio estava defendendo há alguns anos. Se a teoria de Abraham ou a de Bucherer fosse válida, seria possível descobrir se a Terra está parada ou em movimento em relação ao éter, através de medidas das propriedades dinâmicas do elétron.

Como havíamos mostrado, tanto no caso da teoria de Lorentz como nas outras, a massa eletromagnética dos elétrons de baixa velocidade tende ao valor

$$m_0 = \frac{e^2}{6\varepsilon_0\pi R c^2}. \quad (33)$$

Ora, a energia eletrostática do elétron em repouso é $W_0 = \frac{e^2}{8\varepsilon_0\pi R}$. Portanto, poderíamos escrever a seguinte relação entre a massa e a energia de elétrons de baixa velocidade:

$$m_0 = \frac{4W_0}{3c^2}. \quad (34)$$

Para qualquer físico atual, essa relação parece estranha, porque utilizamos a equação de Einstein $m = E/c^2$, sem o fator numérico 4/3. Porém essa diferença não é devida a qualquer erro de cálculo feito por Lorentz e outros teóricos. É uma consequência inevitável da teoria eletromagnética.

Porém, como já foi indicado acima, Poincaré mostrou que era necessário levar em conta forças que não eram eletromagnéticas, na teoria do elétron. Levando essa força em conta, é necessário introduzir um termo não eletromagnético nas equações da energia e do momento. Essa correção leva a uma nova relação entre a massa inercial total m'_0 e a energia total W'_0 do elétron (incluindo os termos que não são eletromagnéticos):

$$m'_0 = \frac{W'_0}{c^2} \quad (35)$$

Esse resultado é compatível com a equação de Einstein¹⁹.

Um argumento semelhante a esse pode ser aplicado ao caso de uma caixa cheia de radiação. A massa associada à luz também obedece à relação $m = 4E/3c^2$. No entanto, é preciso levar em conta que a radiação produz uma pressão nas paredes da caixa onde ela está contida. Essa pressão traciona a caixa e essa tensão deve ser levada em conta ao calcular as propriedades mecânicas do sistema. Analisando esse efeito, chega-se à conclusão de que o sistema completo (caixa mais radiação) obedece à relação $m = E/c^2$. Esse resultado foi estabelecido por Max Planck, em 1907, depois da publicação da teoria de Einstein [73]. Nesse trabalho Planck provou que $m = E/c^2$ não é uma lei geral. Realmente, ela é válida para *sistema fechados*. No entanto, qualquer sistema submetido a uma pressão externa obedecerá a uma lei diferente: sua massa inercial será proporcional à sua entalpia $H = E + PV$. A lei de Planck, que substituiu nesses casos a lei de Einstein, é $m = H/c^2$.

11. A situação em 1905

Quando Einstein publicou seu primeiro trabalho sobre relatividade já existiam:

- O princípio da relatividade;
- As transformações de Lorentz para o espaço e tempo;

¹⁸Em 1905 Poincaré publicou uma pequena nota na revista *Comptes Rendus* da Academia de Ciências de Paris, apresentando (sem demonstrações) alguns dos resultados do artigo mais longo. Já se escreveu muito a respeito das semelhanças e diferenças entre a contribuição de Poincaré e o trabalho de Einstein. Ver [69] (que traduziu uma grande parte do artigo de 1906 de Poincaré); [70]; [71]; [50].

¹⁹A abordagem de Poincaré não é aceita por todos os autores. F. Rohrlich e outros físicos criticaram a introdução da tensão de Poincaré e tentaram estabelecer a compatibilidade entre a eletrodinâmica e a relatividade especial por um caminho diferente. Parece, no entanto, que Poincaré não estava errado, e que existem duas abordagens diferentes igualmente viáveis: a de Poincaré e a de Rohrlich. Ver [72].

- As transformações das grandezas eletromagnéticas;
- A maior parte da dinâmica relativística.

Os principais resultados da dinâmica relativística que haviam sido obtidos antes de Einstein eram:

- A equação da variação da massa do elétron com a velocidade;
- A relação entre fluxo de energia e densidade de momento;
- A relação entre massa e energia, em alguns casos específicos (sem formulação geral).

Esses resultados não foram obtidos de forma rápida nem foram o resultado da “genialidade” de uma única pessoa. Foram construídos gradualmente, por um conjunto de pesquisadores, conforme relatado neste artigo. Alguns deles são bem conhecidos (Thomson, Lorentz, Poincaré), mas há muitos outros que contribuíram de forma fundamental para a criação da teoria relativística e de quem nunca se fala.

O que Einstein introduziu de novo, então, em 1905?

Há três novidades, fundamentalmente, no trabalho de Einstein. Uma delas é a estruturação da teoria da relatividade de um modo muito mais simples do que os trabalhos de Lorentz e Poincaré. Einstein deduziu os resultados básicos (a cinemática relativística) a partir de dois postulados (o princípio da relatividade e o princípio da constância da velocidade da luz). Os dois princípios não eram novos, é claro. O primeiro (da relatividade) já havia sido proposto claramente, com esse mesmo nome, por Poincaré. O segundo era uma consequência direta da suposição de que existia o éter e que a luz era uma onda que se propaga nesse meio. Embora ambos os princípios fossem aceitos pelos físicos anteriores, foi Einstein quem mostrou que todas as deduções se tornavam muito mais simples se eles fossem assumidos como o ponto de partida básico (ou seja, se fossem assumidos como postulados). Não há dúvidas de que isso foi uma importante contribuição. Note-se, no entanto, que a mesma coisa ocorre, normalmente, quando se elabora uma versão *didática* de uma teoria científica. Quando Maxwell publicou seu *Treatise of electricity and magnetism*, sua teoria foi apresentada de um modo confuso, difícil de entender. Obras posteriores, como o livro em que Poincaré expôs a teoria de Maxwell [74], eram muitíssimo mais simples, com deduções claras e simples. Pode-se dizer que o trabalho de Einstein de 1905 está para os trabalhos de Poincaré e Lorentz como a formulação didática de uma teoria está, normalmente, para sua primeira proposta.

A segunda novidade de Einstein, em 1905, foi propor a equação $E = mc^2$ como uma relação geral da sua teoria. Antes dele, vários autores já haviam encontrado

relações entre massa e energia para casos específicos [75]. Einstein não *provou* que essa relação era geral, apenas a deduziu em um caso particular e depois *propôs* que fosse considerada aplicável a todos os casos. Ela, na verdade, não é geral. Não se aplica a sistemas extensos submetidos a pressões (como foi explicado acima) e não se aplica à energia potencial (quando um elétron se move em um campo externo, sua massa *não deve ser calculada* levando-se em conta sua energia potencial)²⁰. Além disso, no estudo relativístico de meios contínuos, o conceito de massa inercial maupertuisiana deixa de ser aplicável, pois a relação $\vec{p} = m\vec{v}$ se torna inválida. De fato, no caso de sistemas extensos, o momento e a velocidade podem ter direções diferentes e, assim, a equação $\vec{p} = m\vec{v}$ deixa de ter sentido. É possível utilizar a equação $E = mc^2$ como se fosse uma *definição geral* de um tipo de massa relativística, como propõem muitos autores; porém, nesse caso, a massa obtida *não pode ser utilizada* para calcular o momento e outras propriedades de sistemas extensos com tensões, meios contínuos ou partículas dotadas de energia potencial. Minha opinião pessoal é de que a relação $E = mc^2$ não foi uma boa contribuição de Einstein, pois até hoje ela prejudica a compreensão da teoria da relatividade.

A terceira novidade do trabalho de Einstein de 1905 é epistemológica e não física. Ele negou a validade da idéia de éter, alegando que a física apenas deveria lidar com aquilo que pode ser observado e medido [77]. Outros autores, como Lorentz e Poincaré, aceitavam que o éter não podia ser detectado, mas consideravam que esse conceito era útil, pois permitia *compreender* os fenômenos de ação a distância e de propagação da luz. Aceitar ou não o éter não era uma questão *científica*, propriamente dita, pois não podia ser decidida por experimentos. Ou seja: nenhum experimento provou que existia o éter e nenhum experimento provou que ele não existia. Se fosse possível medir a velocidade da Terra em relação ao éter, não seria apenas a teoria de Einstein que teria que ser abandonada: as de Lorentz e Poincaré também cairiam por terra. Todos os experimentos que confirmaram a teoria de Einstein confirmaram também as teorias de Lorentz e Poincaré. Na verdade, nem mesmo se deve dizer que essas são *teorias diferentes*. É melhor dizer que são *interpretações diferentes da mesma teoria física*, pois suas consequências observáveis são idênticas.

É importante esclarecer que esse terceiro aspecto é totalmente independente dos outros. Não é necessário abandonar o éter para utilizar os dois postulados da teoria da relatividade. Além disso, é importante enfatizar que o próprio Einstein, em 1920, mudou de opinião a respeito do éter. Em uma conferência ministrada nesse ano, ele afirmou:

²⁰Ver, a esse respeito, a dissertação de mestrado de Sílvia Petean [76].

Recapitulando, podemos dizer que, de acordo com a teoria da relatividade geral, o espaço tem qualidades físicas; neste sentido, portanto, existe um éter. De acordo com a relatividade geral, um espaço sem éter é impensável [Gemäß der allgemeinen Relativitätstheorie ist ein Raum ohne Äther undenkbar]; porque em tal espaço não haveria propagação da luz, nem possibilidade de padrões de espaço e de tempo (regras de medida e relógios), nem intervalos de espaço-tempo, no sentido físico. (Einstein, 1920, p. 32)

Seja qual for o significado preciso do pensamento de Einstein em 1920, podemos perceber que nessa época a palavra “éter” deixou de ser um palavrão, para ele. Talvez isso ajude o leitor a ter menos preconceitos em relação aos físicos que aceitavam o éter, no início do século XX.

Se Einstein nunca tivesse nascido, o desenvolvimento da física relativística teria sido ligeiramente diferente. Provavelmente a idéia do éter continuaria a ser aceita por quase todos (embora fosse rejeitada pelos empiristas do início do século). Poderia também demorar bastante para que outra pessoa produzisse uma versão das teorias de Lorentz e Poincaré que fosse mais simples e fácil de manipular. Mas praticamente todos os resultados físicos da teoria da relatividade especial surgiram antes de Einstein, e nesse sentido a história da física poderia ter prescindido de seu nascimento.

A maior parte do desenvolvimento posterior da teoria da relatividade especial foi também realizada por outros pesquisadores – e não por Einstein. A termodinâmica relativística foi desenvolvida por Max Planck, que também esclareceu as propriedades relativísticas de sistemas extensos submetidos a forças externas [73], [79]. A introdução do formalismo quadridimensional espaço-temporal foi iniciada por Poincaré e completada por Minkowski [80]. A formulação tensorial do eletromagnetismo relativístico foi feita por Abraham e Minkowski [81], [82]. A dinâmica relativística de meios contínuos foi completada por Max von Laue, que foi quem criou o tensor de momento-energia ([83], [84], [85]). Todos esses avanços tiveram também contribuições de muitos outros pesquisadores. Porém, Einstein esteve alheio a esses importantes desenvolvimentos. Parece que, se Einstein tivesse morrido logo depois de publicar seus trabalhos de 1905, isso não teria feito nenhuma diferença significativa no desenvolvimento da teoria da relatividade especial.

12. Conclusão

O desenvolvimento do eletromagnetismo de Maxwell, através de seu próprio trabalho e do de seus continuadores, levou a uma nova visão de mundo. Por um

lado, eles proporcionaram uma teoria dinâmica do éter, mostrando que era possível atribuir forças, pressões, energia, momento e massa ao campo eletromagnético. Por outro lado, ao estudar as partículas fundamentais da matéria, essas relações foram aplicadas ao elétron, e sua dinâmica tornou-se uma conseqüência do eletromagnetismo. Assim, parecia que a teoria mais fundamental da natureza era o eletromagnetismo e que a própria matéria poderia ser explicada a partir do éter.

No início do século XX já havia experimentos que mostravam que a luz exercia pressão (e, portanto, transportava momento) e que a massa do elétron variava com sua velocidade. Isso reforçava as teorias sobre a dinâmica do éter e sobre o eletromagnetismo.

Alguns físicos acreditavam que o eletromagnetismo seria suficiente para explicar todas as leis da matéria. Poincaré, no entanto, mostrou que isso era impossível e que era necessário introduzir forças que não tinham natureza eletromagnética, na teoria do elétron. Porém, mesmo sem esclarecer que tipo de forças eram essas, ele mostrou que era possível elaborar uma teoria que incluía tanto essas tensões quanto o eletromagnetismo, e que era compatível com o princípio da relatividade.

Note-se que o desenvolvimento da relação entre massa e velocidade e entre massa e energia dependeu de muitas contribuições diferentes, por muitos físicos distintos. Essa é a regra, não a exceção, na história da ciência. Atribuir uma teoria complexa, como a relatividade, a uma única pessoa, é uma distorção completa da história. Para entendermos por quê se atribui a teoria unicamente a Einstein é necessário explorar as dimensões sociológicas da ciência, assim como alguns fatores psicológicos da humanidade – como a necessidade generalizada (e infantil) de acreditar em heróis.

Os físicos geralmente elogiam Maxwell pelas suas quatro equações (que ele nunca escreveu) e procuram esquecer e perdoar sua crença no éter (que era central em seu pensamento). Vimos, no entanto, que o conceito de éter, tão desprezado hoje em dia, teve um importante papel no desenvolvimento de estudos dinâmicos que levaram a alguns dos mais importantes resultados da teoria da relatividade.

De Maxwell a Lorentz e Poincaré, passando por Thomson, Heaviside, Poynting, Abraham e muitos outros, a crença no éter como o substrato físico fundamental dos fenômenos eletromagnéticos guiou o estudo de suas propriedades dinâmicas. Sem essa crença, os desenvolvimentos descritos neste artigo não poderiam ter ocorrido pois ninguém pensaria em atribuir energia, momento e massa ao espaço vazio. Portanto, a crença no éter e o estudo de suas propriedades foi um passo fundamental no desenvolvimento da dinâmica relativística.

É claro que a confirmação de diversas conseqüências da teoria do éter não são uma prova de que o éter existe – exatamente como a confirmação de diversas conseqüências de *qualquer teoria* (incluindo a relatividade

de Einstein, ou a mecânica quântica) nunca pode ser considerada uma *prova* de que a teoria está correta.

A teoria que atingiu seu ápice nas mãos de Lorentz e Poincaré não era a teoria de Einstein. Suas visões de mundo eram diferentes. Eles aceitavam o éter, embora também aceitassem que era impossível detectar o movimento em relação a esse meio. Sua abordagem epistemológica era também diferente da de Einstein. No entanto, quase todas as previsões científicas da teoria de Einstein já estavam lá, nos artigos publicados antes de seu primeiro trabalho de 1905. O conteúdo empírico dessas duas teorias é idêntico. Por mais estranho que pareça, é impossível distinguir, por qualquer experimento, a interpretação de Lorentz e Poincaré da interpretação de Einstein.

Agradecimento

O autor agradece o apoio que tem recebido da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) para a realização de suas pesquisas. Uma versão em inglês, um pouco diferente do presente artigo, está sendo publicada em *Physics Before and After Albert Einstein: An Historical Perspective*, edited by M.M. Capria (Amsterdam: IOS Press, 2004). O autor agradece ao prof. Capria a autorização para publicar a presente adaptação em português.

Referências

- [1] E.T. Whittaker, *A History of the Theories of Aether and Electricity* (Humanities Press, New York, 1973), 2 v.
- [2] C. Cujav, *American Journal of Physics* **36**, 1102 (1968).
- [3] C. Scribner, Jr., *American Journal of Physics* **32**, 672 (1964).
- [4] Goldberg, Stanley. Henri Poincaré and Einstein's theory of relativity. *American Journal of Physics* **35**, 934-44 (1967).
- [5] S. Goldberg, *American Journal of Physics* **37**, 498 (1969).
- [6] S. Goldberg, *Archive for History of Exact Sciences* **7**, 7 (1970).
- [7] K.F. Schaffner, *American Journal of Physics* **37**, 498 (1969).
- [8] T. Hirsige, *Historical Studies in the Physical Sciences* **7**, 3 (1976).
- [9] R.A. Martins, Descartes e a Impossibilidade de Ações a Distância, organizado por S. Fuks, *Descartes 400 Anos: Um Legado Científico e Filosófico* (Relume Dumará, Rio de Janeiro, 1997), p. 79-126.
- [10] I. Newton, *The Correspondence of Isaac Newton*, editado por H.W. Turnbull (Cambridge University Press, Cambridge, 1959-1977), 7 v.
- [11] M. Hesse, *Forces and Fields. The Concept of Action at a Distance in the History of Physics* (Philosophical Library, New York, 1961).
- [12] R.A. Martins, *Cadernos de História e Filosofia da Ciência* **10**, 102 (1986).
- [13] O. Darrigol, *Electrodynamics from Ampère to Einstein*. (Oxford University Press, New York, 2000).
- [14] L.P. Williams, *Michael Faraday* (Basic Books, New York, 1965).
- [15] N.J. Nercessian, Faraday's Field Concept, editado por D. Gooding e F.A.J.L. James *Faraday Rediscovered. Essays on the Life and Work of Michael Faraday, 1791-1867* (American Institute of Physics, New York, 1989) p. 174-187.
- [16] M. Faraday, *Philosophical Magazine* [series 4] **3**, 401 (1852).
- [17] M. Faraday, *Experimental Researches in Electricity*, editado por Robert Maynard Hutchins, *Great Books of the Western World*. (Encyclopaedia Britannica, Inc, Chicago, 1952).
- [18] D. Gooding, *Historical Studies in the Physical Sciences* **11**, 231 (1981).
- [19] B. Spencer, *Isis* **61**, 34 (1970).
- [20] J.C. Maxwell, *Treatise on Electricity and Magnetism* (Dover, New York, 1954), 3rd ed.
- [21] C.C. Silva, *Da Força ao Tensor: Evolução do Conceito Físico e da Representação Matemática do Campo Eletromagnético* (Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2002).
- [22] D.M. Siegel, *Isis* **66**, 361 (1975).
- [23] D.M. Siegel, *Thomson, Maxwell, and the Universal Ether in Victorian Physics*, editado por Cantor e Hodge *Conceptions of Ether Studies in the History of Ether Theories 1740-1900*. (Cambridge University Press, Cambridge, 1981).
- [24] W. Thomson, *Proceedings of the Glasgow Philosophical Society* **3**, 281 (1853).
- [25] A.M. Bork, *Isis* **58**, 210 (1967).
- [26] H. Hertz, *Annalen der Physik und Chemie* **21**, 421 (1887).
- [27] J.J. Thomson, *Philosophical Magazine* [series 5] **11**, 229 (1881).
- [28] G.F. Fitzgerald, *Proceedings of the Royal Dublin Society* **3**, 250 (1881). Reeditado em *Philosophical Magazine* [series 5] **3**, 302 (1892).
- [29] P. Langevin, *Journal de Physique Théorique et Appliquée* [series 4] **3**, 553 (1913).
- [30] C. Kittel, *American Journal of Physics* **42**, 726 (1974).
- [31] O. Heaviside, *Philosophical Magazine* [series 5] **27**, 324 (1889).
- [32] J.J. Thomson, *Philosophical Magazine* [series 5] **28**, 1 (1889).
- [33] J.J. Thomson, *Philosophical Magazine* [series 5] **31**, 149 (1891).

- [34] G.F.C. Searle, Philosophical Transactions of the Royal Society of London **A 187**, 675 (1896).
- [35] G.F.C. Searle, Philosophical Magazine [series 5] **44**, 329 (1897).
- [36] J.J. Thomson, Philosophical Magazine [series 5] **44**, 293 (1897).
- [37] W. Kaufmann, Annalen der Physik und Chemie [series 3] **61**, 544 e **62**, 596 (1897).
- [38] P. Lenard, Annalen der Physik und Chemie [series 3] **64**, 279 (1898).
- [39] W. Kaufmann, Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-Physikalische Klasse. Nachrichten **2**, 143 (1901).
- [40] J.T. Cushing, American Journal of Physics **49**, 1133 (1981).
- [41] M. Abraham, Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-Physikalische Klasse. Nachrichten 20-41 (1902).
- [42] M. Abraham, Annalen der Physik [series 4] **10**, 105 (1903a).
- [43] M. Abraham, Physikalische Zeitschrift **4**, 57 (1903b).
- [44] M. Abraham, Physikalische Zeitschrift **5**, 576 (1904a).
- [45] J.H. Poynting, Philosophical Transactions of the Royal Society of London **A 175**, 34 (1884).
- [46] O. Heaviside, Electrician **14**, 178 e 306 (1885).
- [47] J.J. Thomson, *Recent Researches in Electricity and Magnetism* (Clarendon Press, Oxford, 1893).
- [48] W. Kaufmann, Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-Physikalische Klasse. Nachrichten **3**, 291 (1902). Reeditado em Physikalische Zeitschrift **4**, 54 (1902).
- [49] H. Poincaré, *Sur les Rapports de la Physique Expérimentale et de la Physique Mathématique*. In: *Rapports Présentés au Congrès international de Physique Réuni à Paris en 1900* (Gauthier-Villars, Paris, 1900), v. 1, p. 1-29.
- [50] E. Giannetto, The Rise of Special Relativity: Henri Poincaré's Works Before Einstein, editado por P. Tucci, *Atti del Diciottesimo Congresso Nazionale di Storia della Fisica e dell'Astronomia* (Universita' di Milano, Milano, 1999), p. 181-216.
- [51] M. Jammer, *Concepts of Mass in Classical and Modern Physics* (Dover, Mineola, 1997).
- [52] P. Lebedew, Annalen der Physik [series 4] **6**, 433 (1901).
- [53] E.F. Nichols e G.F. Hull, Physical Review **13**, 307 (1901).
- [54] E.F. Nichols, e G.F. Hull, Astrophysical Journal **17**, 315 (1903).
- [55] J. Worrall, Studies in the History and Philosophy of Science **13**, 133 (1982).
- [56] J.H. Poynting, Proceedings of the Physical Society **19**, 475 (1905).
- [57] M. Abraham, Annalen der Physik [series 4] **14**, 236 (1904b).
- [58] F. Hasenöhr, Annalen der Physik [series 4] **15**, 344 (1904); **16**, 589 (1905).
- [59] H.A. Lorentz, Archives Néerlandaises des Sciences Exactes et Naturelles **25**, 363 (1892). Reeditado em *Lorentz 1934-39*, v. 2, p. 164-343.
- [60] H.A. Lorentz, Verslagen Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam **1**, 74 (1892). Reeditado em *Lorentz 1934-39*, v. 4, p. 219-223.
- [61] H.A. Lorentz, Proceedings of the section of sciences, Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam **6**, 809 (1904). Reeditado em *Lorentz 1934-39*, v. 5, p. 172-197, e (sem a seção final) in *Lorentz et al.* (1952).
- [62] A.H. Bucherer, *Mathematische Einführung in die Elektronentheorie* (Teubner, Leipzig, 1904).
- [63] A.H. Bucherer, Physikalische Zeitschrift **6**, 833 (1905).
- [64] P. Langevin, Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées **16**, 257 (1905).
- [65] W. Kaufmann, Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften. Sitzungsberichte 949 (1905).
- [66] M. Planck, Physikalische Zeitschrift **7**, 753 (1906).
- [67] G. Battimelli, Fundamenta Scientiae **2**, 137 (1981).
- [68] H. Poincaré, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **21**, 129 (1906). Reeditado em *Oeuvres de Henri Poincaré* (Gauthier-Villars, Paris, 1954), v. 9, p. 489-550.
- [69] H.M. Schwartz, American Journal of Physics **39**, 128 (1971); **40**, 862 e 1282 (1972).
- [70] A.I. Miller, Archive for History of Exact Sciences **10**, 207 (1973).
- [71] A.A. Logunov, Hadronic Journal **19**, 109 (1996).
- [72] D.J. Griffiths and R.E. Owen, American Journal of Physics **51**, 1120 (1983).
- [73] M. Planck, Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften (Berlin). Sitzungsberichte **13**, 542 (1907). Reeditado em Annalen der Physik **26**, 1 (1908).
- [74] H. Poincaré, *Électricité et Optique* (Gauthier-Villars, Paris, 1901).
- [75] W.L. Fadner, American Journal of Physics **56**, 114 (1988).
- [76] S. Petean, *O Problema da Relação Massa-Energia Potencial para Interações Eletromagnéticas*. Dissertação de Mestrado em Física, - Instituto de Física "Gleb Wataghin", Universidade Estadual de Campinas, 1991.
- [77] R.A. Martins, Manuscrito **5**, 103 (1981).
- [78] A. Einstein, *Äther und Relativitäts-Theorie*. Rede gehalten am 5. Mai 1920 an der Reichs-Universität zu Leiden (Verlag von Julius Springer, Berlin, 1920).
- [79] S. Goldberg, Stanley. Historical Studies in the Physical Sciences **7**, 125 (1976).
- [80] H. Minkowski, Physikalische Zeitschrift **10**, 104 (1909).
- [81] H. Minkowski, Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch.physikalische Klasse. Nachrichten 53 (1908).

- [82] M. Abraham, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* **30**, 33 (1910).
- [83] M. Laue, *Annalen der Physik* **35**, 524 (1911a).
- [84] M. Laue, *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft* **13**, 513 (1911b).
- [85] M. Laue, *Das Relativitätsprinzip* (Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1911c).