

O oscilador harmônico amortecido forçado revisitado

(The forced damped harmonic oscillator revisited)

A.C. Bertuola, M.S. Hussein¹ e M.P. Pato

Instituto de Física, Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil

Recebido em 11/2/2005; Aceito em 13/4/2005

Neste artigo, pretendemos apresentar as “aulas” sobre o oscilador harmônico amortecido forçado, usando um método geral, para se obter as soluções de equações diferenciais de segunda ordem, não homogêneas. Desta forma, essa contribuição servirá como uma forma de “modernizar” o tratamento dado em textos conhecidos como os de Symon e Marion. Ele serve também como material didático para alunos do curso de Mecânica I, no segundo ano da graduação do curso de bacharelado em Física. Sugerimos aos alunos interessados que efetuem todos os cálculos passo a passo, para uma melhor compreensão deste trabalho.

Palavras-chave: oscilador harmonico, amortecimento, operadores classicos.

In this article, we present “lectures” about the well-know mechanics problem of a forced damped harmonic oscillator. We use the general method of solving second-order linear, non-homogenous, differential equation. In this fashion our contribution here should serve to “modernize” the usual textbook treatments of this problem. These lectures can be presented to second year undergraduate students of physics. We suggest that the students go through all the steps used in the derivations.

Keywords: harmonic oscillator, damping, classical operators.

1. Introdução

O oscilador harmônico amortecido e forçado é um problema popular e importante no curso de mecânica em nível de graduação. O tratamento encontrado nos textos comuns, como o de Symon [1], Marion [2] e Goldstein [3], mesmo ditos completos deixam algo a desejar. Em particular, ao método de Green é dado uma atenção marginal no livro de Symon. Durante os dois anos que ministramos este curso no IFUSP, procuramos dar uma atenção especial à parte matemática deste problema. O método de Green que desenvolvemos aqui, não utiliza a transformada de Fourier, cuja compreensão pelos alunos é em princípio mais difícil. Procuramos então usar os métodos usuais de solução das equações diferenciais ordinárias.

Usando a notação análoga ao livro texto do Symon, a equação de movimento de uma partícula de massa m , sujeita à força harmônica $F = -kx$ (Lei de Hooke), à força de atrito $F = -bv$ e a uma força externa $F(t)$ é dada pela segunda Lei de Newton

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t), \quad (1)$$

que após divisão pela massa m da partícula, modifica-se para

¹E-mail: hussein@fma.if.usp.br.

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m}, \quad (2)$$

na qual γ ($\gamma = \frac{b}{2m}$) é o parâmetro que indica a intensidade do amortecimento do movimento, enquanto $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ é a frequência do oscilador não amortecido. A Eq. (2) é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, não homogênea. A seguir apresentaremos as soluções da equação diferencial de segunda ordem, não homogênea, obtidas por meio de operadores diferenciais.

2. Método dos operadores

Para determinar a solução geral desta equação, introduzimos o operador de diferenciação $D \equiv \frac{d}{dt}$, tal que a Eq. (2) assuma a seguinte forma

$$(D^2 + 2\gamma D + \omega_0^2)x(t) = \frac{F(t)}{m}. \quad (3)$$

Facilmente a Eq. (3) pode ser reescrita na forma fatorada

$$(D - P_+)(D - P_-)x(t) = \frac{F(t)}{m}, \quad (4)$$

em que P_+ e P_- são coeficientes constantes (em geral números complexos) que satisfazem duas condições. A primeira condição é que a soma desses coeficientes é o próprio parâmetro de amortecimento,

$$P_+ + P_- = -2\gamma \quad (5)$$

e a segunda condição é que o produto dos coeficientes é igual ao quadrado da frequência natural de oscilação,

$$P_+ P_- = \omega_0^2. \quad (6)$$

As Eqs. (5) e (6) podem ser reconhecidas como um sistema de duas equações e duas incógnitas. Portanto os coeficientes P_+ e P_- podem ser obtidos explicitamente e os resultado são

$$P_+ = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (7)$$

e

$$P_- = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}. \quad (8)$$

Existem três possibilidades para considerar: a) o amortecimento crítico se $\gamma^2 = \omega_0^2$; b) o amortecimento subcrítico (ou subamortecimento) se $\gamma^2 < \omega_0^2$ e c) o amortecimento supercrítico (ou superamortecimento) se $\gamma^2 > \omega_0^2$. No caso (a) os coeficientes P_+ e P_- obedecem à condição $P_+ = P_-$. Nesse caso teremos que procurar uma outra solução homogênea a fim de satisfazer às condições iniciais: $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = v_0$. Faremos isso em seguida. No caso (b) os coeficientes P_+ e P_- são números complexos e conjugados $P_+ = P_-^*$. No caso (c) P_+ e P_- são números reais e distintos entre si.

Para achar a solução geral da Eq. (4), introduzimos uma nova variável Z_- , definida por

$$Z_-(t) \equiv (D - P_-)x(t) = v(t) - P_-x(t), \quad (9)$$

que é uma combinação linear da velocidade e da posição da partícula em um determinado instante de tempo, como mostra a última igualdade de (9). Usando $Z_-(t)$, a Eq. (4) fica

$$(D - P_+)Z_-(t) = \frac{F(t)}{m}, \quad (10)$$

que é uma equação diferencial ordinária, não homogênea, de primeira ordem cuja solução pode ser obtida explicitamente. De fato, usando o fator integrante e^{-P_+t} e algumas manipulações algébricas, chegamos à solução

$$Z_-(t) = e^{P_+t} \left[\int_0^t dt' \frac{F(t')}{m} e^{-P_+t'} + A_- \right], \quad (11)$$

onde a constante de integração A_- é determinada pela condição inicial $A_- = Z_-(0) = v_0 - P_-x_0$.

Usando a simetria da equação de movimento nos coeficientes P_+ e P_- podemos, de maneira análoga ao que foi feito acima, reescrevê-la como uma equação de primeira ordem da forma

$$(D - P_-)Z_+(t) = \frac{F(t)}{m}, \quad (12)$$

na qual introduzimos a função $Z_+(t) = (D - P_+)x = \dot{x} - P_+x = v(t) - P_+x(t)$.

A solução da Eq. (12) é determinada da mesma maneira que foi feito para a Eq. (10), bastando somente trocar P_+ por P_- e A_- por A_+ , na Eq. (11). A forma analítica para $Z_+(t)$ é dada por

$$Z_+(t) = e^{P_-t} \left[\int_0^t dt' e^{-P_-t'} \frac{F(t')}{m} + A_+ \right], \quad (13)$$

em que a constante de integração A_+ também é fixada pelas condições iniciais do sistema $A_+ = Z_+(0) = v(0) - P_+x(0) = v_0 - P_+x_0$.

Usando as duas soluções de $Z_-(t)$ e $Z_+(t)$, determinamos a posição e a velocidade da partícula em qualquer instante de tempo. Por exemplo, a velocidade da partícula é dada por:

$$v(t) = \frac{P_+}{P_+ - P_-} Z_- - \frac{P_-}{P_+ - P_-} Z_+, \quad (14)$$

enquanto que a posição em qualquer instante de tempo é calculada por meio da igualdade

$$x(t) = -\frac{Z_+ - Z_-}{P_+ - P_-}. \quad (15)$$

Substituindo os valores de Z_+ e Z_- , calculados por intermédio das Eqs. (11) e (13), na Eq. (15), obtemos o seguinte resultado:

$$x(t) = \frac{[A_- e^{P_+t} - A_+ e^{P_-t}]}{P_+ - P_-} - \int_0^t dt' \frac{F(t')}{m} \left[\frac{e^{P_-(t-t')} - e^{P_+(t-t')}}{P_+ - P_-} \right] \equiv x_h + x_p, \quad (16)$$

que é a solução desejada da equação diferencial (2). Note que o primeiro termo x_h na Eq. (16) é a solução da equação homogênea associada. O segundo termo x_p é uma solução particular, que de maneira reduzida pode ser escrita na forma

$$x_p = \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t, t') F(t'). \quad (17)$$

A conhecida função de Green emerge naturalmente através da identificação

$$G(t, t') = \begin{cases} -\frac{e^{P_-(t-t')} - e^{P_+(t-t')}}{m(P_+ - P_-)} & \text{se } t' < t \\ 0 & \text{se } t' > t \end{cases}, \quad (18)$$

na qual estendemos os limites de integração de $-\infty$ até $+\infty$, supondo que a força atua a partir de um instante $t = 0$.

Definindo o novo parâmetro $\tilde{\omega}_1 = \sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2}$, a solução homogênea x_h assume um aspecto mais simplificado

$$x_h = \left[x_o \cosh(\tilde{\omega}_1 t) + \frac{v_o - \gamma x_o}{\tilde{\omega}_1} \sinh(\tilde{\omega}_1 t) \right] e^{-\gamma t} . \quad (19)$$

Nesse caso, a função de Green também pode ser convenientemente modificada, para outra expressão matemática mais conhecida [1]

$$G(t, t') = \begin{cases} \frac{\sinh \tilde{\omega}_1(t-t')}{m\tilde{\omega}_1} e^{-\gamma(t-t')} & \text{se } t' < t \\ 0 & \text{se } t' > t \end{cases} . \quad (20)$$

No caso do oscilador criticamente amortecido, o limite $\tilde{\omega}_1 \rightarrow 0$, leva à solução homogênea

$$x_h = [x_o + (v_o - \gamma x_o)t] e^{-\gamma t}, \quad (21)$$

com a respectiva função de Green (20) assumindo a forma

$$G(t, t') = \begin{cases} \frac{(t-t')}{m} e^{-\gamma(t-t')} = -\frac{1}{m} \frac{d}{d\gamma} e^{-\gamma(t-t')} & \text{se } t' < t \\ 0 & \text{se } t' > t \end{cases} . \quad (22)$$

Para o oscilador subamortecido, o parâmetro $\tilde{\omega}_1$ passa a ser um número imaginário puro ($\tilde{\omega}_1 = i\omega_1$). Quando esse valor é substituído na equação do movimento (19), as funções hiperbólicas se transformam nas funções trigonométricas e a equação de movimento fica

$$x_h = \left[x_o \cos(\omega_1 t) + \frac{v_o - \gamma x_o}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) \right] e^{-\gamma t} . \quad (23)$$

A respectiva função de Green, nesse regime de sub-amortecimento é dada explicitamente por

$$G(t, t') = \begin{cases} e^{-\gamma(t-t')} \frac{\sin \omega_1(t-t')}{m\omega_1} & \text{se } t' < t \\ 0 & \text{se } t' > t \end{cases} . \quad (24)$$

3. Energia e pseudo-energia

Multiplicadas pela própria massa da partícula, as funções Z_- e Z_+ , dadas pela combinação linear da velocidade e da posição, definem as duas novas funções auxiliares

$$a_-(t) = p - im\omega_- x \quad (25)$$

e

$$a_+(t) = p + im\omega_+ x . \quad (26)$$

Os parâmetros ω_- e ω_+ estão relacionados com P_- e P_+ , por meio das duas igualdades $P_- = im\omega_-$ e $P_+ = -im\omega_+$. O produto entre as duas funções auxiliares é dado por

$$a_-(t) a_+(t) = p^2 + im(\omega_+ - \omega_-) px + m^2\omega_- \omega_+ x^2 . \quad (27)$$

Agora definimos a pseudo-energia $N(t)$ por meio do produto das funções auxiliares:

$$N(t) = \frac{a_-(t) a_+(t)}{2m} = \frac{p^2}{2m} + \frac{i(\omega_+ - \omega_-) px}{2} + \frac{m\omega_- \omega_+ x^2}{2} . \quad (28)$$

É interessante considerar a questão da conservação (ou não) da energia do sistema, definida pela soma da energia cinética mais a energia potencial

$$E(t) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 . \quad (29)$$

O oscilador recebe energia da força externa à qual está submetido e dissipa uma quantidade de energia devido à existência da força de atrito. Nota-se que a energia total do sistema é diferente da pseudo-energia $N(t)$, definida na Eq. (28), pelo fato da existência de um termo que é proporcional ao produto da posição e da velocidade da partícula. Essa afirmação fica evidente, tendo em vista as Eqs. (27), (28) e (29). Após algumas manipulações algébrica determinamos que

$$N(t) = E(t) + m\gamma xv . \quad (30)$$

A variação da energia $E(t)$ em relação ao tempo é dada por

$$\frac{dE}{dt} = v(F(t) - 2\gamma mv) , \quad (31)$$

que é a generalização da fórmula que define a potência da força. Por outro lado, a variação temporal da pseudo-energia $N(t)$, calculada derivando a Eq. (28) em relação ao tempo, é dada por

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{2m} \left[\frac{da_-(t)}{dt} a_+(t) + a_-(t) \frac{d}{dt} a_+(t) \right] , \quad (32)$$

ou escrita de forma explícita:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{2m} \{ [P_+ a_-(t) + F(t)] a_+(t) + [P_- a_+(t) + F(t)] a_-(t) \} , \quad (33)$$

ou mesmo

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{2m} \{ (P_+ + P_-) a_-(t) a_+(t) + [a_+(t) + a_-(t)] F(t) \} . \quad (34)$$

Introduzindo o próprio valor da pseudo-energia $N(t)$ no segundo membro da Eq. (34), resultando na igualdade

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{2m} (P_+ + P_-) N(t) + [a_+(t) + a_-(t)] F(t). \quad (35)$$

Levando em consideração que $P_+ + P_- = -2\gamma$ e multiplicando ambos membros da igualdade (35) por $e^{2\gamma t}$, essa equação pode ser modificada para outra igualdade:

$$\frac{d}{dt} \left[N(t) e^{-(P_+ + P_-)t} \right] = e^{-(P_+ + P_-)t} [a_+(t) + a_-(t)] F(t). \quad (36)$$

A equação acima é mais conveniente para discutir a variação temporal, já que a_+ e a_- são as funções auxiliares conhecidas. Essas funções auxiliares, também podem ser reconhecidas pelas suas formas matemáticas. Por exemplo,

$$a_+(t) = e^{P_+ t} \left[\int_0^t dt' F(t') e^{-(P_-)t'} + A_+ \right], \quad (37)$$

e de maneira análoga para $a_-(t)$

$$a_-(t) = e^{P_+ t} \left[\int_0^t dt' F(t') e^{-(P_+)t'} + A_- \right]. \quad (38)$$

De fato, integrando a Eq. (36) em relação ao tempo, temos como resultado:

$$N(t) = \frac{e^{(P_+ + P_-)t}}{2m} \int_0^t dt' F(t') [a_+(t') + a_-(t')] e^{-(P_+ + P_-)t'} + N(0) e^{(P_+ + P_-)t}. \quad (39)$$

Usando as formas analíticas explícitas de a_+ e a_- definidas em (37) e (38) na Eq. (39), definimos convenientemente duas funções R_+ e R_- da seguinte maneira:

$$R_+(t) = \int_0^t dt' F(t') e^{-(P_+)t'} \quad (40)$$

e também

$$R_-(t) = \int_0^t dt' F(t') e^{-(P_-)t'}. \quad (41)$$

As funções $R_+(t)$ e $R_-(t)$ podem ser calculadas de forma analítica ou numérica pelas Eqs. (40) e (41). Dessa maneira podemos também obter o valor da pseudo-energia em termos dessas novas funções $R_+(t)$ e $R_-(t)$, em qualquer instante de tempo por meio da igualdade

$$N(t) = \frac{e^{(P_+ + P_-)t}}{2m} [R_+(t) R_-(t) + R_+(t) A_+ - R_-(t) A_-] + N(0) e^{(P_+ + P_-)t}. \quad (42)$$

Para uma situação particular em que a partícula está inicialmente em repouso na origem das posições, temos que $A_- = A_+ = N(0) = 0$, isto é, o sistema satisfaz as condições iniciais $v(0) = x(0) = 0$. Então temos uma expressão matemática bem mais simples para a pseudo-energia:

$$N(t) = \frac{e^{(P_+ + P_-)t}}{2m} R_+(t) R_-(t). \quad (43)$$

Observando também que a pseudo-energia $N(t)$, estabelecida na Eq. (39), possui uma dependência simples no tempo, se a força externa for nula em todos os instantes de tempo, ou seja $F(t) = 0$:

$$N(t) = N(0) e^{-2\gamma t}. \quad (44)$$

Podemos identificar $N(t)$ com uma soma entre a energia cinética e a energia potencial do oscilador. Tanto a força de atrito representada pelo parâmetro γ , quanto a força externa $F(t)$, de maneira geral conspiram para que a energia total do sistema não se mantenha conservada durante o movimento. Para o caso em que não há dissipação de energia e $\gamma = 0$, temos um oscilador harmônico forçado:

$$N(t) = \int_0^t dt' [a_+(t') + a_-(t')] \frac{F(t')}{2m} + N(0). \quad (45)$$

Por outro lado, se idealmente não existir a força dissipativa ($\gamma = 0$) e a força externa for nula em todo instante ($F(t) = 0$), a pseudo-energia se modifica para uma expressão matemática mais simples:

$$N(t) = \frac{p^2}{2m} + m\omega_o^2 x^2 = H = E, \quad (46)$$

também conhecida como função hamiltoniana [3, 4] para um sistema livre. Na presença da força externa, H ou E varia com o tempo.

A energia do sistema pode ser obtida por meio da igualdade (30). Para o caso supercrítico, considerando uma força $F(t) = f_0 \cos(\omega t + \delta)$, a energia é calculada explicitamente pela igualdade

$$E = N \left(1 - \frac{\gamma^2}{m\bar{\omega}_1^2} \right) - \frac{\gamma}{4m\bar{\omega}_1^2} (P_- R_-^2 e^{2P_- t} + P_+ R_+^2 e^{2P_+ t}). \quad (47)$$

Construímos alguns gráficos desta pseudo-energia em função do tempo, considerando uma partícula inicialmente em repouso na origem e os regimes de amortecimento discutidos anteriormente.

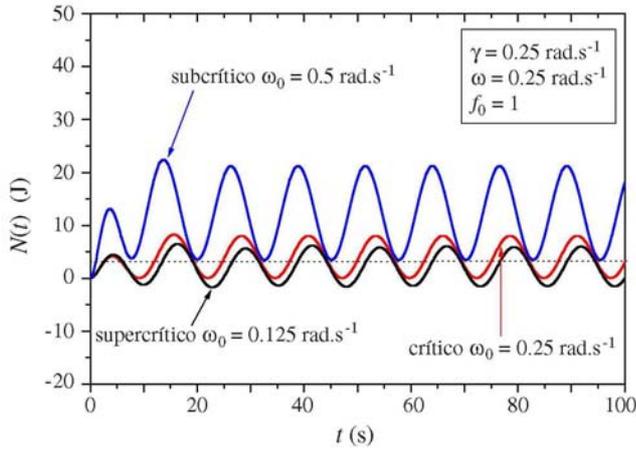


Figura 1 - Pseudo-energia para os regimes de amortecimento.

Por outro lado, o gráfico da energia pode ser construído mediante o valor de $N(t)$ e a igualdade (47).

Observamos na Fig. 2 que a energia introduzida no sistema pela força externa (energia positiva) é dissipada pelo oscilador devida a força de atrito (energia negativa).

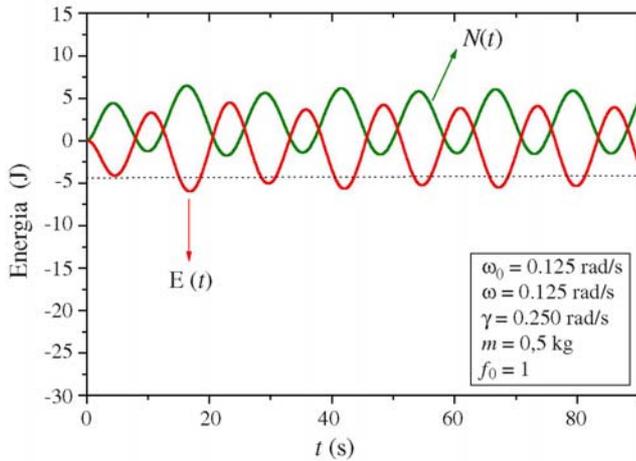


Figura 2 - Energia e pseudo-energia no regime supercrítico.

4. A mecânica clássica e a mecânica quântica

É interessante considerar o problema do oscilador harmônico em mecânica quântica (MQ). O momento p e a posição x da partícula são os operadores \hat{p} e \hat{x} , respectivamente. Esses operadores, por sua vez, não comutam:

$$\hat{x}\hat{p} = \hat{p}\hat{x} + i\hbar, \quad (48)$$

com $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ e h a famosa constante de Planck. Clássicamente sempre tivemos $xp = px$, ou seja x e p são

funções que comutam. Portanto a hamiltoniana no caso quântico do oscilador harmônico é escrita da seguinte forma:

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2, \quad (49)$$

que também pode ser escrita usando uma representação por meio dos números complexos:

$$H = \frac{1}{2m} \left[(\hat{p} + im\omega_o\hat{x})(\hat{p} - im\omega_o\hat{x}) - \frac{i\omega}{2}(\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}) \right]. \quad (50)$$

Usando a igualdade (48) na Eq. (50), a hamiltoniana quântica assume o seguinte aspecto:

$$H = \frac{1}{2m} (\hat{p} + im\omega_o\hat{x})(\hat{p} - im\omega_o\hat{x}) + \frac{\hbar\omega_o}{2}, \quad (51)$$

ou então

$$H = \frac{1}{2m} (\hat{p} - im\omega_o\hat{x})(\hat{p} + im\omega_o\hat{x}) - \frac{\hbar\omega_o}{2}. \quad (52)$$

A energia $\frac{\hbar\omega_o}{2}$ de origem puramente quântica é chamada de energia do ponto zero. Está relacionada com o princípio da incerteza de Heisenberg. É claro que as funções $a_+(t)$ e $a_-(t)$ das Eqs. (25) e (26) possuem operadores correspondentes em MQ.

Introduzimos os operadores quânticos

$$a^\dagger = \frac{\hat{p} + im\omega_o\hat{x}}{\sqrt{2m}}, \quad (53)$$

e também

$$a = \frac{\hat{p} - im\omega_o\hat{x}}{\sqrt{2m}}. \quad (54)$$

Fica claro a convergência

$$a_-(t) \leftrightarrow a, \quad (55)$$

e

$$a_+(t) \leftrightarrow a^\dagger. \quad (56)$$

As hamiltonianas são formalmente escritas em termos dos operadores. A hamiltoniana clássica assume a seguinte forma

$$H_{clássica} = \frac{1}{2m} a_-(t) a_+(t) = \frac{1}{2m} a_+(t) a_-(t), \quad (57)$$

com

$$a_-(t) a_+(t) - a_+(t) a_-(t) = 0. \quad (58)$$

No caso quântico, a hamiltoniana do sistema também pode ser apresentada pelos operadores:

$$H_{quântica} = (2a^\dagger a + 1) \frac{\hbar\omega_o}{2} = (2a^\dagger a - 1) \frac{\hbar\omega_o}{2}, \quad (59)$$

em que os operadores a^+ e a satisfazem a relação

$$aa^\dagger - a^\dagger a = 1. \quad (60)$$

As Eqs. (58) e (60) indicam a essência matemática da diferença entre a MC e a MQ.

5. Conclusão

O método matemático apresentado acima, para tratar o oscilador amortecido e forçado é uma aplicação simples, da teoria das equações diferenciais ordinárias. Por outro lado, a utilização das funções auxiliares $Z_+(t)$ e $Z_-(t)$, que são obtidas após uma integração simples é realmente algo novo. Lembrando que na teoria quântica, no caso do oscilador harmônico, uma combinação linear dos operadores momento e posição é usada para definir os conhecidos operadores de criação e aniquilação[5]. Nesse sentido, as soluções $Z_+(t)$ e $Z_-(t)$, correspondem as versões clássicas desses operadores, em um contexto mais geral que envolva a dissipação da energia. Desse modo, acreditamos que, em relação aos alunos que conseguiram acompanhar todos os cálculos efetuados neste trabalho, estejam neste momento mais familiarizados com uma técnica matemática moderna, amplamente utilizada em MQ

e agora também aplicada à MC. Para reforçar ainda mais o uso dessa técnica, estamos pretendendo num futuro próximo, divulgar as atuais investigações sobre um possível tratamento da teoria das perturbações clássicas, com esse formalismo dos operadores.

Agradecimentos

Agradecemos à FAPESP, ao CNPq e ao Instituto de Informação Quântica-MCT, pelo suporte financeiro.

Referências

- [1] K.R. Symon, *Mecânica* (Editora Campus, São Paulo, 1982), 5ª ed.
- [2] S.T. Thornton and J.B. Marion, *Classical Dynamics of Particles and Systems* (Academic Press, New York, 2004), 5th ed.
- [3] H. Goldstein, *Classical Mechanics* (Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1980), 2nd ed.
- [4] N.A. Lemos, *Mecânica Analítica* (Editora Livraria da Física, São Paulo, 2004), 1ª ed.
- [5] A.F.R. de Toledo Piza, *Mecânica Quântica* (Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003).