

# O potencial efetivo para uma teoria com quebra espontânea de simetria

(The effective potential for a theory with spontaneous symmetry breaking)

Denimar Possa, Flávio Pereira e José Alexandre Nogueira<sup>1</sup>

Departamento de Física, Centro de Ciências Exatas, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, ES, Brasil  
Recebido em 13/5/2005; Aceito em 31/8/3005

Neste trabalho nós mostramos como determinar o potencial efetivo para uma teoria com quebra espontânea de simetria.

**Palavras-chave:** potencial efetivo, quebra espontânea de simetria, expansão em “loop”.

In this work we show how to derive the effective potential for a theory with spontaneous symmetry breaking.

**Keywords:** effective potential, spontaneous symmetry breaking, loop expansion.

## 1. Introdução

O potencial efetivo é uma importante ferramenta para o estudo da quebra espontânea de simetria [1-8], determinação da energia do vácuo (energia de Casimir [9-13]), na renormalização da massa e da constante de acoplamento [14-18], etc.

O potencial efetivo é definido como o valor esperado do operador hamiltoniano calculado no estado, que entre o conjunto de estados  $\{\phi\}$ , minimiza o valor esperado do operador hamiltoniano  $\hat{H}$ . Assim,

$$V_{ef}(\phi_c) = MIN_{\{\phi\}} \langle \phi | \hat{H} | \phi \rangle,$$

tal que  $\phi_c$  seja o valor esperado do operador de campo  $\hat{\phi}$  calculado neste estado que minimiza a energia,

$$\phi_c = \langle \phi | \hat{\phi} | \phi \rangle.$$

É claro que o potencial efetivo assim definido tem a interpretação de densidade de energia e, portanto, é uma função real [19-21].

Em uma teoria quântica de campos o potencial efetivo é uma generalização quântica do potencial clássico, sendo que o vácuo quântico pode ser obtido do mínimo daquele potencial. O potencial efetivo pode ser expresso como uma expansão em loop (que coincide com uma expansão em potências de  $\hbar$ ), de modo que ele é dado por uma soma do termo clássico com correções que representam o efeito da interação do campo com o vácuo quântico.

Devido a sua interpretação como energia, o potencial efetivo deve necessariamente ser uma função real

e convexa. Entretanto, quando a teoria apresenta quebra espontânea de simetria a “tree level”, a expansão em “loop” para a determinação do potencial efetivo até a primeira ordem em  $\hbar$ , conduz a uma função que não é real para todo  $\phi$ . Isto indica que este resultado não deve ser o verdadeiro potencial efetivo. Isto ocorre porque esta função é obtida de uma continuação analítica termo a termo da expansão em  $\mathcal{O}(\hbar)$  para o potencial efetivo, e não existe garantia alguma que esta deva ser igual à expansão da continuação analítica do potencial efetivo. Uma vez que somente a parte real de um potencial pode ser interpretada como energia, ingenuamente poderia-se pensar em contornar este problema tomando somente a parte real da continuação analítica da função obtida da expansão em “loop”. Porém, o problema ainda não está resolvido, pois o resultado assim obtido conduz a uma função que não é convexa e que, portanto, não pode ser o verdadeiro potencial efetivo. A falha agora está no emprego incorreto da transformada de Legendre para a obtenção do potencial efetivo.

A fim de determinar-se o (verdadeiro ou correto) potencial efetivo, um emprego cuidadoso do procedimento usado para sua obtenção deve ser realizado. O objetivo desse trabalho é mostrar como o (verdadeiro) potencial efetivo é obtido para uma teoria com quebra espontânea de simetria.

O artigo está organizado da seguinte forma: Na seção 2 é mostrado que o potencial efetivo em  $\mathcal{O}(\hbar)$ , obtido de uma expansão em “loop”, para uma teoria com quebra espontânea de simetria, não pode ser o ver-

<sup>1</sup>E-mail: nogueira@cce.ufes.br.

dadeiro potencial efetivo. Na seção 3 é mostrado como obter o verdadeiro potencial efetivo para uma teoria com quebra espontânea de simetria. No apêndice B é dada uma definição precisa da transformada de Legendre. Os cálculos efetuados são realizados no espaço-tempo euclidiano e não são usados sub-índices na notação para indicar este fato.

## 2. O potencial efetivo

Seja a teoria determinada pela densidade lagrangiana

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} M^2 \phi^2 - \frac{2\beta^2}{4!} \phi^4, \quad (1)$$

com a constante de acoplamento  $\lambda = 2\beta^2 > 0$ , de modo a garantir a estabilidade da teoria. Considere somente valores de  $M^2 > 0$ , para os quais a simetria de reflexão de  $\phi$  na origem é espontaneamente quebrada. O potencial clássico é identificado com

$$V(\phi) = -\frac{1}{2} M^2 \phi^2 + \frac{2\beta^2}{4!} \phi^4, \quad (2)$$

e o mínimo é degenerado em

$$\phi_\pm = \pm \sqrt{3} \frac{M}{\beta}. \quad (3)$$

O potencial efetivo pode ser determinado a partir da equação<sup>2</sup> [15, 21]

$$V_{ef}(\phi_c) = V_{cl}(\phi_c) - \frac{\hbar}{2\Omega} \left( \frac{d\zeta_m}{ds}(0) + \zeta_m(0) \ln \mu^2 \right), \quad (4)$$

com a função zeta  $\zeta_m(s)$  dada por

$$\zeta_m(s) = \frac{\Omega}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 k [k^2 + v^2]^{-s}, \quad (5)$$

onde  $v^2 = V_{cl}''(\phi_c) = \beta^2 \phi_c^2 - M^2$ . Para  $v^2 > 0$  a integral pode ser realizada usando (veja Apêndice A)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [k^2 + A^2]^{-s} d^m k = \frac{\pi^{\frac{m}{2}} \Gamma(s - \frac{m}{2})}{\Gamma(s)} (A^2)^{\frac{m}{2} - s}, \quad (6)$$

obtendo-se

$$\zeta_m(s) = \frac{\Omega}{(2\pi)^4} \frac{\pi^2 \Gamma(s-2)}{\Gamma(s)} (v^2)^{2-s}. \quad (7)$$

Usando a propriedade  $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$ , tem-se

$$\zeta_m(s) = \frac{\Omega}{16\pi^2} \frac{(v^2)^{2-s}}{(s-1)(s-2)}. \quad (8)$$

Assim,

$$\zeta_m(0) = \frac{\Omega v^4}{32\pi^2} \quad (9)$$

<sup>2</sup>Nós usamos  $\hbar = c = 1$ , contudo, mantemos  $\hbar$  para marcar as correções quânticas.

<sup>3</sup>A parte imaginária do potencial efetivo pode ser interpretada como a razão de decaimento por unidade de volume de um estado bem definido [22].

<sup>4</sup>Note que  $\phi_c = \phi_0$  em  $\mathcal{O}(\hbar^0)$ .

e

$$\frac{d\zeta_m}{ds}(0) = \frac{v^4}{32\pi^2} \left[ \frac{3}{2} - \ln(v^2) \right]. \quad (10)$$

Substituindo (9) e (10) em (4), o potencial efetivo é, então, dado por

$$V_{ef}(\phi_c) = V_{cl}(\phi_c) + \frac{\hbar v^4}{64\pi^2} \left[ \ln\left(\frac{v^2}{\mu^2}\right) - \frac{3}{2} \right], \quad (11)$$

expressão válida para  $v^2 \geq 0$ , isto é,  $\phi_c^2 \geq \frac{M^2}{\beta^2}$ .

Ingenuamente, poderia se pensar em usar o resultado (11) para determinar o estado de vácuo da teoria. Porém, tal procedimento não é correto, pois a Eq. (11) somente é válida para  $\phi_c^2 \geq \frac{M^2}{\beta^2}$ , deixando de fora uma importante região, onde se encontra  $\phi = 0$ . Uma forma imediata de se contornar o problema seria estender (11) para  $v$  imaginário. Entretanto, como se sabe o potencial efetivo é interpretado como densidade de energia  $e$ , sendo assim, é uma função real. Assim, quando se faz a extensão analítica de (11) para a região em que  $v^2 < 0$ , obtém-se uma função não real. Isto indica que esse resultado não deve ser o potencial efetivo verdadeiro. Para entender o que está acontecendo, deve-se notar que este último resultado é obtido através de uma continuação analítica termo a termo da expansão em “loop” para o potencial efetivo, e nada garante que esta deva ser igual à expansão da continuação analítica do potencial efetivo. O que se quer enfatizar é que não existe problema algum com o potencial efetivo, mas sim na maneira com que o cálculo foi feito, usando uma expansão assintótica em  $\mathcal{O}(\hbar)$ . O método usado para obter a expansão assintótica somente faz sentido se o potencial clássico for convexo, e portanto a parte imaginária é o preço que se paga por usá-la inapropriadamente. Para salvar o cálculo, nota-se que somente a parte real de um potencial pode ser interpretado como energia<sup>3</sup>. Assim, uma maneira direta de contornar o problema é tomar a parte real da continuação analítica, isto é,

$$V_{ef}(\phi_c) = \text{Real} \left\{ V_{cl}(\phi_c) + \hbar V_{ef}^{(1)}(\phi_c) \right\}. \quad (12)$$

No entanto, novamente o problema não está resolvido, pois, como se sabe, o potencial efetivo é convexo, o que não ocorre com o potencial da Eq. (12). A falha agora é decorrente do uso inadequado da transformada de Legendre na obtenção do potencial efetivo. Usando uma definição precisa desta transformada (veja Apêndice B) obtém-se, como é esperado, um resultado convexo [7].

## 3. O potencial efetivo verdadeiro

Considere o caso simples onde o funcional gerador das funções de Green conexas<sup>4</sup>

$$W[J] = - \int V_{cl}(\phi_0) d^4 x + \int J \phi_0 d^4 x, \quad (13)$$

é substituído por uma aproximação de ordem zero, com fontes e campos uniformes. Então, este funcional gerador fica dado, para  $\mathcal{O}(\hbar^0)$ , pelo produto do volume espaço-temporal  $V_{ol}\tau$  com uma função ordinária  $w(J)$ , dada por

$$w(J) = J \phi_0 - v(\phi_0). \quad (14)$$

A fim de obter uma compreensão mais simples do procedimento, trata-se primeiramente do caso sem quebra espontânea de simetria, ou seja, quando  $M^2 = -m^2$ , com  $m$  real. Assim,

$$v(\phi_0) = \frac{1}{2}m^2\phi_0^2 + \frac{1}{12}\beta^2\phi_0^4. \quad (15)$$

O campo  $\phi_0$  é uma função da fonte  $J$  determinado pela equação clássica

$$\frac{dv(\phi_0)}{d\phi_0} = m^2\phi_0 + \frac{\beta^2}{3}\phi_0^3 = J. \quad (16)$$

A solução  $\phi_0(J)$  pode ser determinada graficamente encontrando-se o valor de  $\phi_0$  para o qual a curva que representa a função  $\frac{dv}{d\phi_0}(\phi_0)$  intercepta  $\frac{dv}{d\phi_0} = J$ . Neste caso cada valor de  $J'$  determina um valor único para  $\phi'_0$ , como pode ser visto na Fig. 1.

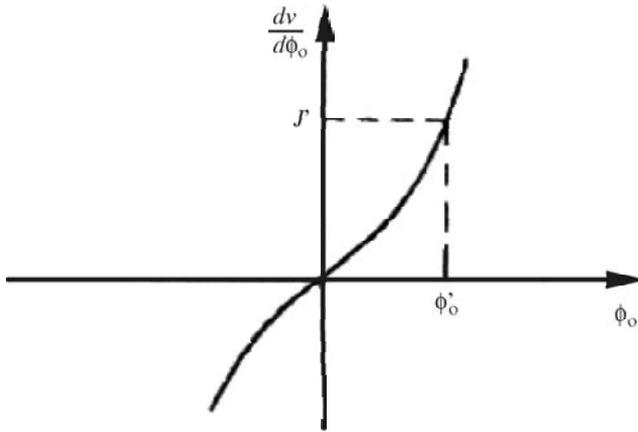


Figura 1 - Determinação gráfica de  $\phi_0(J)$ .

Como a ação é estacionária sob variações de  $\phi_0$  com  $J$  fixo,

$$\frac{dw}{dJ}(J) = \phi_0(J). \quad (17)$$

A derivada segunda é dada por

$$\frac{d^2w}{dJ^2}(J) = \frac{d\phi_0}{dJ}(J). \quad (18)$$

De acordo com a Fig. 1,  $\phi_0(J)$  é uma função crescente, e portanto

$$\frac{d^2w}{dJ^2}(J) > 0, \quad (19)$$

ou seja, a função  $w(J)$  é convexa, conforme esperado [21]. O gráfico desta função é esboçado na Fig. 2.

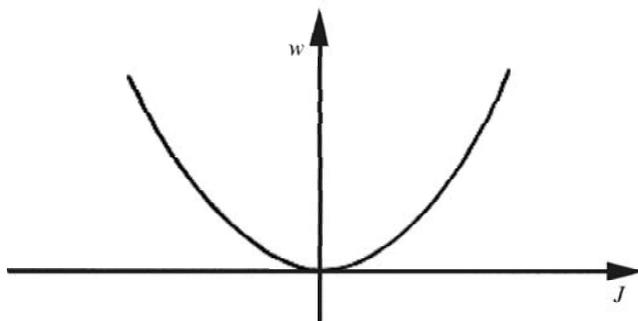


Figura 2 - A função  $w(J)$  para o caso sem quebra espontânea de simetria.

O potencial efetivo, neste caso, é dado pela transformada de Legendre

$$V_{ef}(\phi_0) = J\phi_0 - w(J). \quad (20)$$

Para determinar  $V_{ef}(\phi_0)$  é necessário encontrar  $V_{ef}(\phi'_0)$  para cada  $\phi'_0$  dado. Mas, dado  $\phi'_0$  que  $J'$  está associado a ele. Como pode ser visto do Apêndice B,  $V_{ef}(\phi'_0)$  é dado pela máxima distância entre a reta  $\phi'_0 J$  e a curva  $w(J)$  que é determinada por

$$\left. \frac{dw}{dJ} \right|_{J'} = \phi'_0. \quad (21)$$

Uma vez que, como pode ser observado na Fig. 1, para cada valor de  $J'$  existe um único possível valor de  $\phi'_0$ . Isto implica que a derivada de  $w(J)$  com relação a  $J$  é contínua. Desta forma  $V_{ef}(\phi_0)$  é facilmente obtida, veja Fig. 3.

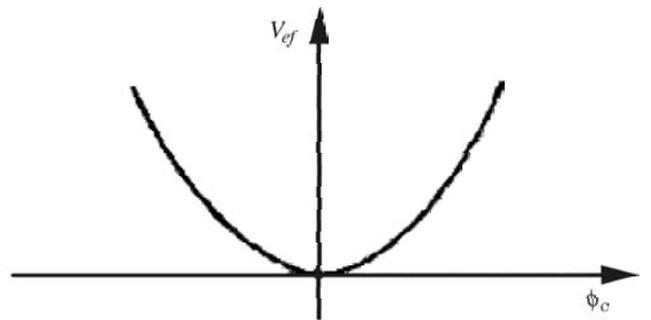


Figura 3 - Potencial Efetivo para o caso sem quebra espontânea de simetria

Para o caso  $M^2 = m^2$ ,  $m$  real (com quebra espontânea de simetria), o potencial clássico é dado por

$$v(\phi_0) = -\frac{m^2}{2}\phi_0^2 + \frac{\beta^2}{12}\phi_0^4. \quad (22)$$

O gráfico desta função encontra-se na Fig. 4. Os pontos de mínimo degenerados são dados por

$$\phi_{\pm} = \pm\sqrt{3}\frac{m}{\beta}. \quad (23)$$

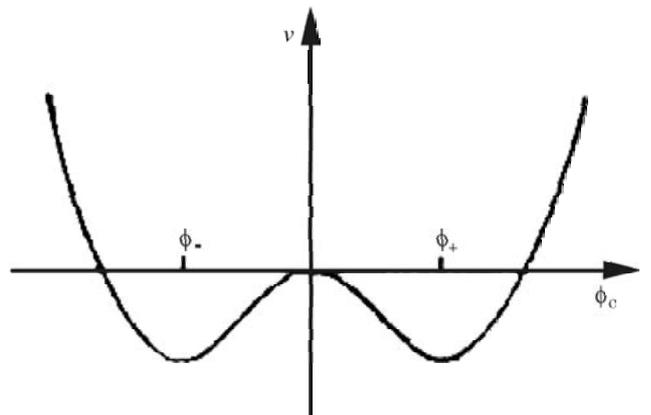


Figura 4 - Potencial com quebra espontânea de simetria.

Como no caso anterior, o campo  $\phi_0(J)$  é determinado através da equação  $\frac{dv}{d\phi_0}(\phi_0) = J$ , sendo que agora

$$\frac{dv}{d\phi_0}(\phi_0) = -M^2\phi_0 + \frac{\beta^2}{3}\phi_0^3. \quad (24)$$

O gráfico de  $\frac{dv}{d\phi_0}(\phi_0)$  é ilustrado na Fig. 5. Os pontos estacionários de  $\frac{dv}{d\phi_0}$  são dados por

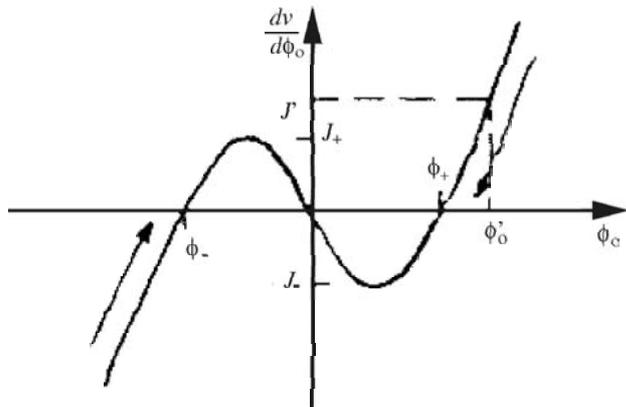


Figura 5 - Determinação gráfica de  $\phi_0(J)$  para o caso com quebra espontânea de simetria.

$$\pm\phi_s = \pm\frac{M}{\beta}, \quad (25)$$

e definem

$$J_{\pm} = v'(\mp\phi_s) = \pm\frac{2}{3}\frac{M^3}{\beta}. \quad (26)$$

Para  $J > J_+$  ou  $J < J_-$ , a solução  $\phi_0(J)$  é única. Entretanto, quando  $J_- < J < J_+$  existem três valores possíveis para  $\phi_0(J)$ . Esta ambigüidade é removida lembrando que (para cada  $J'$ ) o valor de  $\phi'_0$  é definido como sendo aquele que implica na menor energia para o sistema.

A densidade de energia do estado de vácuo perturbado adiabaticamente por uma fonte  $J$  é dada por

$$\varepsilon(J) = -w(J) = v(\phi_0(J)) - J\phi_0(J). \quad (27)$$

Substituindo na Eq. (27)  $J$  por  $\frac{dv}{d\phi_0}$ , obtém-se uma função, denotada por  $\varepsilon'$ , que determina o valor da densidade de energia para todos os valores possíveis de  $\phi_0$  (assumidos ou não pelo sistema físico). Tem-se, portanto,

$$\varepsilon'(\phi_0) = \frac{m^2}{2}\phi_0^2 - \frac{\beta^2}{4}\phi_0^4. \quad (28)$$

Veja o gráfico da Fig. 6.

Para cada valor de  $J$ , o campo  $\phi_0$  assume o valor que minimiza a função  $\varepsilon'$ . Em princípio, quando  $0 < J < J_+$ , o campo  $\phi_0$  poderia assumir três valores, sendo um deles maior do que  $\phi_+$ , e os outros dois na região  $\phi_- < \phi_0 < \phi_+$  (veja a Fig. 4). Pela Fig. 5 é fácil verificar que, dentre esses valores para o campo, o que leva a um menor valor de  $\varepsilon'$  é aquele em que  $\phi_0 > \phi_+$ . Portanto, para  $J > 0$ , o campo  $\phi_0$  assume somente os valores  $\phi_0 > \phi_+$ . Por um raciocínio idêntico, tem-se que, para  $J < 0$ , o campo  $\phi_0$  assume somente os valores  $\phi_0 < \phi_-$ .

<sup>5</sup>Note que  $V_{ef}(\phi'_0)$  significa  $V_{ef}(\phi_0)$  calculado no ponto  $\phi_0 = \phi'_0$ .

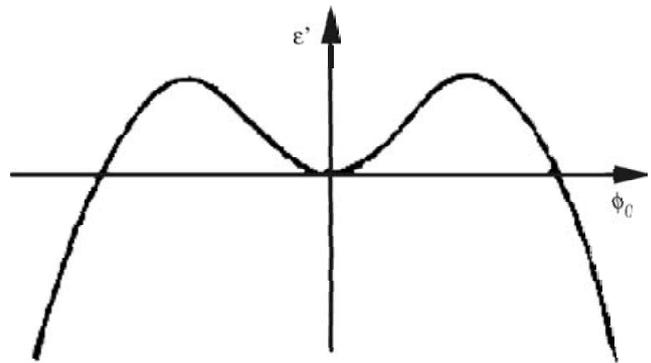


Figura 6 - A função  $\varepsilon'$ .

Pode-se obter agora, a partir da Eq. (28) e dos valores assumidos por  $\phi_0$ , a função  $w$ . Ela é representada pelo gráfico da Fig. 7.

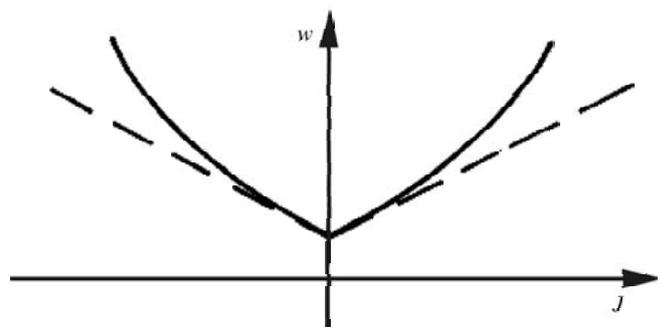


Figura 7 - A função  $w(J)$  para o caso com quebra espontânea de simetria. Note que esta função tem um "bico".

A função  $w$  é contínua em  $J = 0$ , onde

$$w(0) = -v(\phi_{\pm}) = \frac{3}{4}\frac{M^4}{\beta^2}. \quad (29)$$

Entretanto, existe uma descontinuidade na derivada primeira de  $w$  em  $J = 0$ , ou seja,

$$\lim_{J \rightarrow 0^{\pm}} \left[ \frac{dw}{dJ}(J) \right] = \phi_{\pm}. \quad (30)$$

Essa função tem um "bico" em  $J = 0$ . Essa é uma característica de sistemas que apresentam quebra espontânea de simetria. Um fato a ser destacado em toda esta discussão é que a função

$$\frac{d^2w}{dJ^2}(J) = \frac{d\phi}{dJ}(J) > 0, \quad (31)$$

como se pode ver pela Fig. 7. Portanto, mesmo nesse caso, a função  $w$  é convexa.

O potencial efetivo é agora obtido pela aplicação da transformada de Legendre, Eq. (47), à função  $w$ , obtendo-se<sup>5</sup>

$$V_{ef}(\phi'_0) = \text{MAX}_J \{ J\phi'_0 - w(J) \}. \quad (32)$$

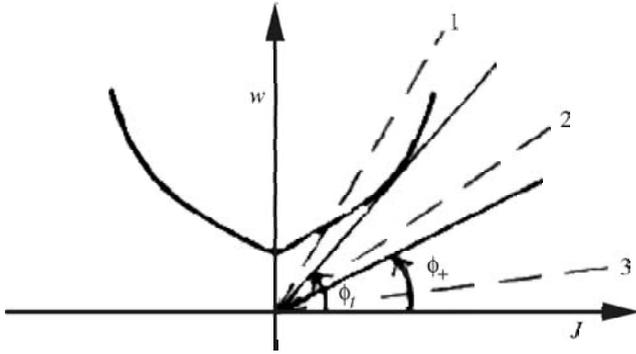


Figura 8 - Construção da transformada de Legendre para o caso com quebra espontânea de simetria, onde a função  $w(J)$  tem um “bico”. Linhas contínuas: retas para  $\phi'_0 = \phi_+$  e  $\phi'_0 = \phi_t$ . Linhas tracejadas: reta-1 para  $\phi'_0 > \phi_t$ ; reta-2 para  $\phi_+ < \phi'_0 < \phi_t$  e reta-3 para  $\phi'_0 < \phi_+$ .

Reportando-se ao gráfico da Fig. 7 e adicionando a ele a reta com coeficiente angular igual a  $\phi'_0$ , obtém-se a Fig. 8. A transformada de Legendre se dá com a máxima separação vertical entre a reta e a curva para  $w(J)$ . Se a reta estiver abaixo da curva, a separação é negativa. O máximo nesse caso corresponde à mínima distância geométrica (medida verticalmente na figura). Esta situação acontece quando  $-\phi_t < \phi'_0 < \phi_t$ , onde  $\phi_t$  é definido por  $v(\phi_t) = 0$ , ou seja,  $\phi_t = \sqrt{2\frac{M}{\beta}}$ . Portanto, para  $\phi'_0$  nesta região, o potencial efetivo é negativo. A derivada  $\frac{dw}{dJ}$  tem uma descontinuidade na origem (veja Eq. (30)), e ambas as derivadas à direita ( $\phi_+$ ) e à esquerda ( $\phi_-$ ) são não nulas. Daí decorre um fato importante. Quando  $\phi'_0 = \phi_+$ , a inclinação da reta é igual à derivada à direita na origem, e a distância mínima entre as curvas é  $w(0) = \frac{3}{4}\frac{M^4}{\beta^2}$ . Quando a inclinação diminui, a distância mínima continua a ser  $w(0)$ , isto ocorrendo até que a inclinação se torne  $\phi'_0 = \phi_- = -\phi_+$ . Portanto, nesta região, a transformada de Legendre é constante e tem-se

$$V_{ef}(\phi'_0) = v(\phi_+) = v(\phi_-); \quad \phi_- < \phi'_0 < \phi_+. \quad (33)$$

Fora desta região ( $\phi'_0 > \phi_+$  ou  $\phi'_0 < \phi_-$ ), o potencial efetivo assume os mesmos valores que o potencial em ordem zero, ou seja,

$$V_{ef}(\phi'_0) = v(\phi'_0). \quad (34)$$

O gráfico do potencial efetivo é mostrado na Fig. 9. A linha pontilhada nesta figura representa a parte real da continuação analítica de  $v$  na região  $\phi_- < \phi_c < \phi_+$ .

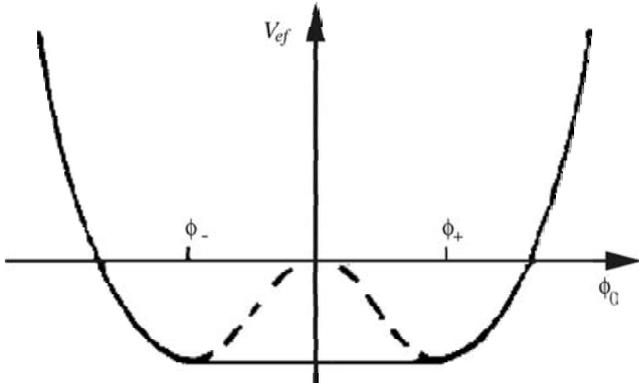


Figura 9 - Potencial efetivo para quando o potencial clássico tem a forma de duplo poço.

O verdadeiro potencial efetivo calculado até ordem zero corresponde ao potencial clássico com a parte não convexa substituída por uma linha reta horizontal. Ele satisfaz, portanto, o critério de convexidade. Embora a construção acima tenha sido realizada para o potencial em ordem zero, o raciocínio não é alterado quando se inclui termos de  $\mathcal{O}(\hbar)$ . Portanto, o potencial efetivo pode ser construído a partir da parte real da expansão em loop, substituindo a parte não convexa desta por uma linha reta. Esta construção, chamada construção de Maxwell, é denotada pelo sub-índice  $M$ , de modo que o potencial efetivo é expresso como

$$V_{ef}(\phi_c) = \left[ \text{Real} \left\{ V_{cl}(\phi_c) + \hbar V^{(1)}(\phi_c) \right\} \right]_M. \quad (35)$$

#### 4. Conclusão

No caso de teorias cujo potencial clássico tenha uma parte não convexa, isto é, potenciais que a “tree level” apresentem mais de um mínimo, o cálculo do potencial efetivo a um “loop” deve ser realizado considerando a construção de Maxwell. A construção de Maxwell é obtida substituindo-se a parte não convexa por uma linha reta unindo os dois mínimos.

#### 5. Apêndice A

Neste apêndice é demonstrada a relação

$$\int_{-\infty}^{\infty} (K^2 + A^2)^{-s} d^m K = \pi^{\frac{m}{2}} \frac{\Gamma(s - \frac{m}{2})}{\Gamma(s)} (A^2)^{\frac{m}{2} - s}.$$

A função  $\Gamma(s)$  é definida por

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx, \quad \text{Re}(s) > 0. \quad (36)$$

De início, convém obter (fazendo  $y = (K^2 + A^2)x$ )

$$(K^2 + A^2)^{-s} \Gamma(s) = \int_0^{\infty} (K^2 + A^2)^{-s} y^{s-1} e^{-y} dy = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x(K^2 + A^2)} dx. \quad (37)$$

Dividindo ambos os membros por  $\Gamma(s)$ , (37) se torna

$$(K^2 + A^2)^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x(K^2 + A^2)} dx. \quad (38)$$

Agora, com a relação

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(p^2) d^N p = \frac{2\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma(\frac{N}{2})} \int_0^{\infty} p^{N-1} f(p^2) dp, \quad (39)$$

obtém-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} (K^2 + A^2)^{-s} d^m K = \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})} \int_0^{\infty} K^{m-1} (K^2 + A^2)^{-s} dK. \quad (40)$$

Com o uso de (38) no segundo membro de (40) obtém-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} (K^2 + A^2)^{-s} d^m K = \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(s)} \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-xA^2} dx \int_0^{\infty} K^{m-1} e^{-xK^2} dK. \quad (41)$$

A integral em  $K$  pode ser reescrita usando a mudança de variável  $z = xK^2$ , obtendo-se

$$\int_0^\infty K^{m-1} e^{-xK^2} dk = \frac{x^{-\frac{m}{2}}}{2} \int_0^\infty z^{\frac{m-2}{2}} e^{-z} dz, \quad (42)$$

ou seja,

$$\int_0^\infty K^{m-1} e^{-xK^2} dk = \frac{x^{-\frac{m}{2}}}{2} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right). \quad (43)$$

Resolvida a integral em  $K$ , (41) torna-se

$$\int_{-\infty}^\infty (K^2 + A^2)^{-s} d^m K = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(s)} \int_0^\infty x^{s-\frac{m}{2}-1} e^{-xA^2} dx. \quad (44)$$

Usando  $s' = s - \frac{m}{2}$  e  $K = 0$  na integral em (38), a expressão para (44) é dada por

$$\int_{-\infty}^\infty (K^2 + A^2)^{-s} d^m K = \pi^{\frac{m}{2}} \frac{\Gamma(s - \frac{m}{2})}{\Gamma(s)} (A^2)^{\frac{m}{2}-s}, \quad (45)$$

e está demonstrado o resultado.

## 6. Apêndice B. A transformada de Legendre

A *transformada de Legendre* é uma regra em que dada uma função  $f(x)$  produz uma outra  $g(p)$ . Assim, dada a função  $f(x)$ , deseja-se determinar uma nova função  $g(p)$ . Para se determinar  $g(p)$ , deve-se encontrar os valores de  $g(p')$  para todo  $p'$ . Então, a pergunta é: dado  $p'$  como determinar  $g(p')$ ?

Define-se a função  $G$  de  $x$  e  $p$ , tal que,

$$G(x, p) = xp - f(x). \quad (46)$$

Note que para um determinado  $p'$  existem infinitos  $x$  que fornecerão diferentes  $G(x, p')$ . Para associar a cada  $p'$  um único  $G(x', p') = g(p')$  define-se  $x'$ , tal que,

$$\begin{aligned} g(p') &= G(x', p') = \text{MAX}_x [G(x, p')] \\ &= \text{max}_x [xp' - f(x)]. \end{aligned} \quad (47)$$

Geometricamente  $g(p')$  é dada pela máxima distância entre a reta  $xp'$  (com coeficiente angular  $p'$  e a curva  $f(x)$ <sup>6</sup>.

Se  $f(x)$  for uma função convexa e diferenciável, existe um máximo simples, e  $x'$  é tal que

$$\left. \frac{\partial G(x, p')}{\partial x} \right|_{x'} = 0, \quad (48)$$

então,

$$p' = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x'}. \quad (49)$$

A Eq. (49) associa a cada  $p$  um  $x$ , o que define  $x = x(p)$ . Nesse caso

$$g(p) = px(p) - f(x(p)), \quad (50)$$

e a transformada de Legendre é uma função contínua e diferenciável.

<sup>6</sup>Note que a reta  $xp'$  é paralela à reta tangente à curva  $f(x)$  no ponto  $x'$ .

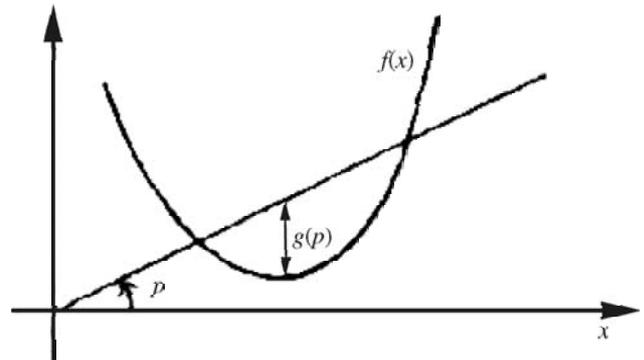


Figura 10 - A transformada de Legendre é a máxima separação entre a reta com inclinação  $p$  e a função  $f(x)$ .

## Referências

- [1] L.H. Ryder, *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1985).
- [2] R.J. Rivers, *Path Integral Methods in Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1987).
- [3] K. Huang, *Quarks Leptons & Gauge Fields* (World Scientific Publishing Company, Singapore, 1982).
- [4] P.H. Frampton, *Gauge Field Theories* (The Benjamin/Cummings Publishing Company, INC, Menlo Park, California, 1987).
- [5] M. Kaku, *Quantum Field Theory. A Modern Introduction*, (Oxford University Press, Inc., Oxford, 1993).
- [6] C. Itzykson and J.B. Zuber, *Quantum Field Theory*, (McGraw-Hill Book Company, Singapore, 1985).
- [7] L.S. Brown, *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1992).
- [8] Ashok Das, *Field Theory a Path Integral Approach* (World Scientific Publishing Company, Singapore, 1993).
- [9] H.G.B. Casimir, Proc. K. Ned. Akad. Wet. **51**, 793 (1948).
- [10] G. Plunien, B. Müller and W. Greiner, Phys. Rept. **134**, 89 (1986).
- [11] M. Bordag, U. Mohideen and V.M. Mostepanenko, Phys. Rept. **353**, 1 (2001).
- [12] M.V. Cougo-Pinto, C. Farina e A.C. Tort, Rev. Bras. Ens. Fís. **22**, 122 (2000).
- [13] J.J.P. Sobrinho e A.C. Tort, Rev. Bras. Ens. Fís. **23**, 401 (2001).
- [14] J. Iliopoulos, C. Itzykson and A. Martin, Rev. Mod. Phys. **47**, 165 (1975).
- [15] P. Ramond, *Field Theory, A Modern Primer* (The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., Massachusetts, 1981).

- [16] J.V. Narlikar and T. Padmanabhan, *Gravity, Gauge Theories and Quantum Cosmology* (D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1986).
- [17] R. Jackiw, Phys. Rev. **D 9**, 1686 (1974).
- [18] S. Coleman and E. Weinberg, Phys. Rev. **D 7**, 1888 (1973).
- [19] T.L. Curtright and C.B. Thorn, J. Math. Phys. **25**, 541 (1984).
- [20] K. Cahill, Phys. Rev. **D 52**, 4704 (1995).
- [21] D. Possa, F. Pereira e J.A. Nogueira, artigo aceito para publicação na Rev. Bras. Ens. Fís. em 27 de julho de 2005.
- [22] E.J. Weinberg and A. Wu, Phys. Rev. **D 36**, 2474 (1987).