

Notas

Formulação geométrica do princípio de d'Alembert (Geometric formulation of d'Alembert's principle)

Nivaldo A. Lemos¹

Departamento de Física, Universidade Federal Fluminense, Niterói, RJ, Brasil.

Recebido em 11/1/2005; Aceito em 24/2/2005

Por meio de uma extensão natural da noção de representação paramétrica de superfícies no espaço euclidiano tridimensional, fazemos uma formulação geométrica do princípio de d'Alembert sem o uso de quantidades infinitesimais.

Palavras-chave: princípio de d'Alembert; formulação geométrica.

By means of a natural extension of the notion of parametric representation of surfaces in Euclidean three-dimensional space, we give a geometric formulation of d'Alembert's principle without the use of infinitesimal quantities.

Keywords: d'Alembert's principle; geometric formulation.

Nas últimas décadas, a linguagem da geometria diferencial tem sido crescentemente empregada na Física em geral e na mecânica analítica em particular. A enorme influência do extraordinário livro de V.I. Arnold [1] tem contribuído para disseminar, entre os físicos, um uso inicialmente restrito quase exclusivamente a matemáticos. Além da precisão, outra importante vantagem do uso da geometria diferencial na mecânica analítica reside em permitir formular os principais resultados em forma intrínseca e independente de qualquer escolha de coordenadas. Livros recentes [2, 3] buscam introduzir métodos geométricos gradualmente como forma de facilitar o acesso dos físicos a tratamentos mais avançados, em que a Matemática é usada em sua plenitude [1, 4].

A sofisticação e maturidade necessárias para dominar esse formalismo matemático impedem a sua discussão em cursos de graduação. No entanto, é possível dar um gostinho dessas idéias geométricas a estudantes de graduação aproveitando que certos resultados podem ser expressos em linguagem geométrica elementar, com recurso apenas à idéia simples de variedade imersa num espaço euclidiano, sem necessidade da definição exata de variedade diferenciável. Nosso propósito é mostrar como isto é possível no caso do princípio de d'Alembert, que serve de fundamento para a dinâmica lagrangiana [5].

Considere um sistema mecânico com N partículas e seja \mathbf{r}_i o vetor posição da i -ésima partícula. Na ausência

de vínculos, o espaço de configuração é o espaço euclidiano \mathbb{R}^{3N} constituído pelos vetores $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ com o produto interno (escalar) natural herdado de \mathbb{R}^3 . Mais precisamente, se $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$ e $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$ então $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_i^N \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_i$, onde $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_i$ é o produto escalar usual em \mathbb{R}^3 . Façamos um agrupamento análogo para o momento linear e a força, isto é, $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$ e $\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$, onde \mathbf{F}_i é a força sobre a i -ésima partícula, cujo momento linear é $\mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{r}}_i$. Em \mathbb{R}^{3N} as equações de movimento newtonianas do sistema de N partículas podem ser escritas na forma sintética

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F} . \quad (1)$$

Na presença de m vínculos holônomos independentes

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) &= 0 , \\ &\vdots \\ f_m(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) &= 0 , \end{aligned} \quad (2)$$

o espaço de configuração passa a ser a hipersuperfície (variedade) de dimensão $n = 3N - m$ definida pelos vínculos, que denotaremos por \mathcal{M} . Os deslocamentos virtuais são tradicionalmente definidos como deslocamentos infinitesimais $\delta \mathbf{r}_i$ que conectam, no mesmo instante t , duas configurações possíveis (isto é, compatíveis com os vínculos) infinitesimalmente próximas

¹E-mail: nivaldo@if.uff.br.

[6]. No caso de vínculos ideais, o trabalho realizado pelas forças de vínculo por ocasião de deslocamentos virtuais é zero e o princípio de d'Alembert escreve-se [6, 7]

$$\sum_{i=1}^N (\dot{\mathbf{p}}_i - \mathbf{F}_i^{(a)}) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad (3)$$

onde $\mathbf{F}_i^{(a)}$ denota a força aplicada sobre a i -ésima partícula.

As grandezas infinitesimais têm um inegável valor heurístico na Física e nas exposições intuitivas do cálculo diferencial e integral, mas podem e devem ser substituídas pelos conceitos matemáticos bem definidos de derivada ou integral. A presença de quantidades infinitamente pequenas compromete a respeitabilidade matemática do princípio de d'Alembert em sua formulação tradicional (3). A interpretação dos deslocamentos virtuais como vetores tangentes ao espaço de configuração [1, 3, 8] permite remediar essa deficiência da formulação tradicional. Suponhamos que o espaço de configuração \mathcal{M} seja uma hipersuperfície regular de dimensão n mergulhada em \mathbb{R}^{3N} . Os vetores $\delta \mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^3$ compõem o vetor $\delta \mathbf{r} = (\delta \mathbf{r}_1, \dots, \delta \mathbf{r}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$. Como os pontos \mathbf{r} e $\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}$ de \mathbb{R}^{3N} têm que pertencer à variedade de configuração \mathcal{M} no mesmo instante t , o vetor deslocamento $\delta \mathbf{r} \in \mathbb{R}^{3N}$ é tangente a \mathcal{M} . Assim, o deslocamento virtual mais geral possível pode ser definido como um vetor arbitrário tangente à variedade de configuração. Em termos de vetores de \mathbb{R}^{3N} , o princípio de d'Alembert pode ser reformulado na forma concisa

$$(\dot{\mathbf{p}} - \mathbf{F}^{(a)}) \cdot \boldsymbol{\tau} = 0, \quad (4)$$

onde $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^{3N}$ é qualquer vetor tangente à variedade de configuração. A forma (4) de expressar o princípio de d'Alembert não é intrínseca porque não envolve somente quantidades definidas em termos da variedade \mathcal{M} , mas é invariante porque independe de qualquer escolha de coordenadas generalizadas para descrever o espaço de configuração.

A aplicação do princípio de d'Alembert a problemas específicos ou para a dedução das equações de Lagrange exige a introdução de coordenadas. Sejam q_1, \dots, q_n coordenadas generalizadas tais que

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_n, t), \quad i = 1, \dots, N, \quad (5)$$

e as equações de vínculo são identicamente satisfeitas. Estas últimas equações constituem uma representação paramétrica da variedade de configuração. Arnold [1] discute o princípio de d'Alembert já no contexto do princípio variacional de Hamilton e de uma forma abstrata, sem apresentar uma expressão explícita para os vetores tangentes à variedade de configuração. Por outro lado, em [3] e [8], além do emprego de um método

indireto, é feito um apelo à noção de *coordenadas adaptadas* para expressar os referidos vetores tangentes, o que, a nosso ver, complica as coisas desnecessariamente.

Os vetores tangentes à variedade de configuração podem ser facilmente obtidos de forma direta por meio de uma extensão natural da teoria da representação paramétrica de superfícies em \mathbb{R}^3 . Se q_1, \dots, q_n parametrizam a variedade de configuração, os vetores

$$\boldsymbol{\tau}_k = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial q_k}, \dots, \frac{\partial \mathbf{r}_N}{\partial q_k} \right) \in \mathbb{R}^{3N}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (6)$$

são tangentes a \mathcal{M} . Além disso, os vetores $\boldsymbol{\tau}_k$ são linearmente independentes em cada ponto de \mathcal{M} : esta é a tradução matemática da exigência de que \mathcal{M} seja uma hipersuperfície regular e que q_1, \dots, q_n definam um sistema de coordenadas curvilíneas locais ou carta local [9] sobre \mathcal{M} (ver Fig. 1).

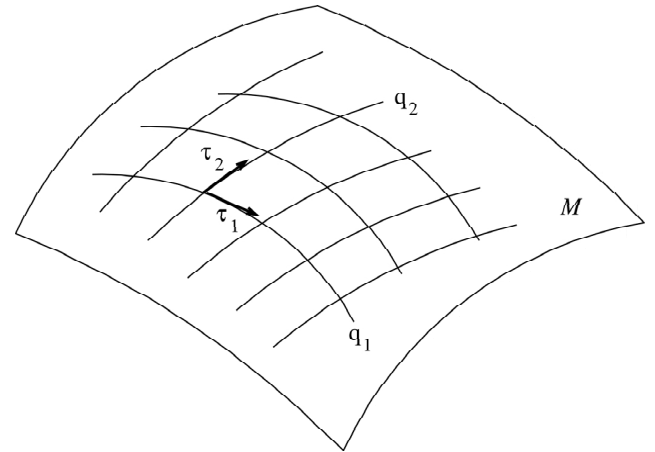


Figura 1 - Vetores tangentes à variedade de configuração no caso $N = m = 1$.

Em vista das considerações anteriores, o vetor tangente mais geral possível à variedade de configuração \mathcal{M} é

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_{k=1}^n \epsilon_k \boldsymbol{\tau}_k, \quad (7)$$

onde os ϵ_k são números reais arbitrários. Introduzindo este vetor tangente em (4), resulta

$$\sum_{k=1}^n \epsilon_k (\dot{\mathbf{p}} - \mathbf{F}^{(a)}) \cdot \boldsymbol{\tau}_k = 0, \quad (8)$$

onde o produto interno é realizado em \mathbb{R}^{3N} . Como os ϵ_k são arbitrários, segue-se que

$$(\dot{\mathbf{p}} - \mathbf{F}^{(a)}) \cdot \boldsymbol{\tau}_k = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (9)$$

Em termos dos vetores usuais de \mathbb{R}^3 esta última equação escreve-se

$$\sum_{i=1}^N (\dot{\mathbf{P}}_i - \mathbf{F}_i^{(a)}) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} = 0 \quad , \quad k = 1, \dots, n \quad . \quad (10)$$

Esta é exatamente a equação que se obtém no formalismo tradicional ao se substituir

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \quad (11)$$

em (3) e levar em conta que os deslocamentos virtuais δq_k são independentes e arbitrários. Argumentos bem conhecidos [6, 7] mostram que as Eqs. (10) são equivalentes às equações de Lagrange.

Em suma, a Eq. (4) constitui uma formulação geométrica do princípio de d'Alembert que é invariante (independente de coordenadas) e matematicamente rigorosa, já que não utiliza quantidades infinitamente pequenas ou "ghosts of departed quantities", segundo a célebre definição debochada do bispo e filósofo George Berkeley [10].

Referências

- [1] V.I. Arnold, *Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique* (Éditions Mir, Moscou, 1976).
- [2] F. Scheck, *Mechanics - From Newton's Laws to Deterministic Chaos* (Springer, Berlin, 1994).
- [3] J.V. José e E.J. Saletan, *Classical Mechanics: A Contemporary Approach* (Cambridge University Press, Cambridge, 1998), p. 54-63.
- [4] W. Thirring, *Classical Mathematical Physics* (Springer, Berlin, 1997).
- [5] C. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics* (Dover, New York, 1970), cap. IV.
- [6] N. A. Lemos, *Mecânica Analítica* (Editora Livraria da Física, São Paulo, 2004).
- [7] H. Goldstein, *Classical Mechanics* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1980), 2ª edição.
- [8] N.M.J. Woodhouse, *Introduction to Analytical Dynamics* (Oxford University Press, Oxford, 1987), p. 57-60.
- [9] P.R. Rodrigues, *Introdução às Curvas e Superfícies* (Editora da Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2001), cap. 3.
- [10] D.J. Struik, *A Concise History of Mathematics* (Dover, New York, 1967), p. 127.