

Transformada em ondeleta: Uma necessidade

(Wavelet transform: A necessity)

Maurício José Alves Bolzan¹

Laboratório de Física Solar e Atmosférica, Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento da UNIVAP,
São José dos Campos, SP, Brasil

Recebido em 27/3/2006; Aceito em 5/9/2006

O objetivo deste trabalho é demonstrar, dentro de um contexto histórico, a necessidade de se usar a transformada em ondeletas. Experimentos computacionais simples são usados para explicar o surgimento desta ferramenta matemática. O programa utilizado neste trabalho está disponível na Internet.

Palavras-chave: não-estacionaridade, transformada em ondeleta, Fourier.

The aim of this work is to show, within an historical context, the need of the wavelet transform use. Simple computational experiments to explain the origin of this mathematical tool are used. A home-page is available for download of the software program.

Keywords: nonstationarity, wavelet transform, Fourier.

1. Introdução

No trabalho anterior [1] foi mostrado uma aplicação da Transformada em Ondeletas (TO). Embora tenha sido realizada uma única aplicação na área de geofísica, tal ferramenta é utilizada em diversas outras áreas do conhecimento, desde turbulência atmosférica [2], processamento de sinais [3], sistemas hidrológicos [4], geofísica espacial [5] e áreas de saúde [6]. Mas por que surgiu esta necessidade? Para responder a esta questão, que é o título deste trabalho, há a necessidade de explicar alguns princípios matemáticos da TO dentro do seu contexto histórico, dos pesquisadores que a desenvolveram. Isso dará ao leitor uma compreensão simples da teoria para poder entender o porquê desta necessidade. Então, antes de iniciar uma introdução da Transformada em Ondeletas faz-se necessário uma breve introdução sobre Séries e Transformada de Fourier mas dentro do contexto histórico.

2. Fourier

Antes de 1930, Joseph Fourier, com sua teoria de análise de frequência afirmou que qualquer função periódica, $f(x)$, pode ser expressa por uma somatória de senos e cossenos na forma da expressão

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \quad (1)$$

¹E-mail: bolzan@univap.br.

onde os coeficientes a_0 , a_k e b_k são calculados analiticamente através de integrais encontradas em livros textos como do livro do Butkov [7].

Como exemplo ilustrativo, foi criada três séries-temporais de funções senos com 16 segundos de duração e de amplitudes e frequências diferentes (1, 10 e 5 Hz), conforme mostrado no gráfico superior da Fig. 1. Em seguida, foi somada as três séries até a metade do tempo disponível e, a outra metade foi somada apenas duas das três séries-temporais, respectivamente 1 e 10 Hz. O resultado desta soma está mostrada no gráfico inferior da Fig. 1. Note que neste último gráfico, a série-temporal apresenta um comportamento mais “ordenado” nos últimos 8 segundos, justamente por ter apenas a soma de duas funções senos.

A conhecida *Transformada de Fourier* (TF) é uma ferramenta útil para saber a contribuição, para a energia total da série-temporal, de cada função seno e cosseno presentes nesta série. A TF é definida como

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt, \quad (2)$$

onde ω é a frequência e $f(t)$ é a série-temporal.

Na Eq. 2 foi utilizada as funções trigonométricas na forma complexa. Note que ocorre o que chama-se de *Convolação*, princípio importante para o entendimento da teoria das ondeletas. Mais informações sobre este assunto, consulte o trabalho de Bolzan [1].

Aplicando a TF sobre a série-temporal do gráfico inferior da Fig. 1, teremos o que normalmente é cha-

mado de Espectro de Energia, dentre outros nomes, como mostrado na Fig. 2. Nesta figura, nota-se a presença das três frequências promovidas pelas funções senos presentes na série-temporal. Entretanto, não faz distinção alguma sobre se alguma das funções senos foi somada ou não a série.

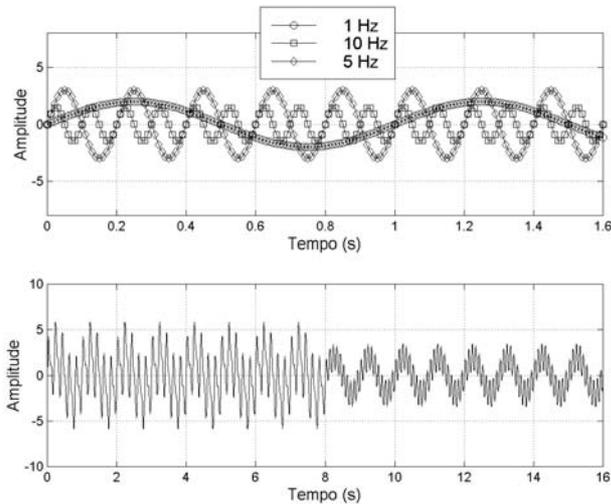


Figura 1 - Gráfico Superior: Série-temporal de três funções senos de frequências e amplitudes diferentes. Gráfico Inferior: Série-temporal criada pela soma das funções mostradas no gráfico acima.

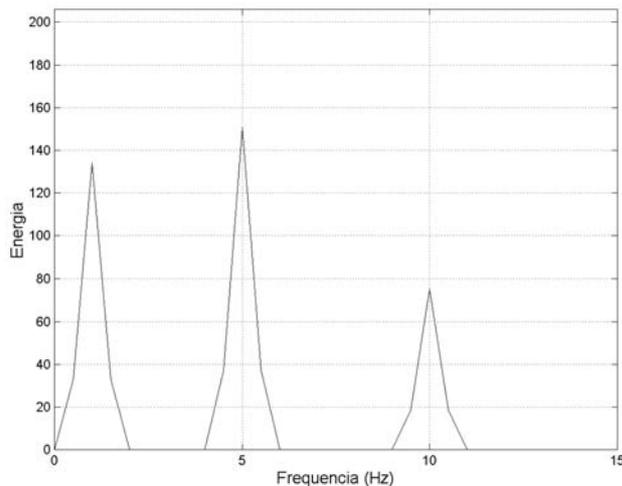


Figura 2 - Espectro de energia, obtido pela TF, da série-temporal mostrada na figura 1.

3. A Transformada de Fourier janelada

Os conhecimentos citados acima são utilizados exaustivamente em análise e tratamentos de séries-temporais estacionárias. Mas o que são séries-temporais estacionárias? São séries cujos seus momentos estatísticos como a média, variância e outros, não variam ao longo do tempo (Morettin, 1999). Gabor, em 1946, percebeu essa deficiente aplicabilidade em séries-temporais não-estacionárias, o que é a maioria dos casos na natureza.

Por isso, ele procurou modificar a TF utilizando o seguinte mecanismo. Ele dividiu uma série-temporal em vários segmentos e que estes fossem todos de comprimentos fixo. Em seguida, Gabor aplicou a TF em cada um desses segmentos separadamente.

Como exemplo do processo descrito acima, dividimos a série-temporal do gráfico inferior da Fig. 1 em cinco segmentos aproximadamente iguais, ou seja, cada segmento da série tem 3 segundos de duração. Em seguida, aplicamos a TF nestes cinco segmentos. A Fig. 3 mostra a ideia de Gabor que ficou conhecida como a *Transformada de Fourier Janelada* (TFJ). Note que agora pode-se obter a informação temporal da presença de cada função seno. Por exemplo, no gráfico de baixo da Fig. 3 uma das funções seno deixa de atuar na série-temporal. Esta é uma informação que o espectro de energia da Fig. 2 não apresentou. Note que isso é extremamente importante porque ao separar a série-temporal em segmentos, inserimos automaticamente uma informação no tempo da ação das três funções senos, comportamento este impossível pela TF aplicada a toda série-temporal.

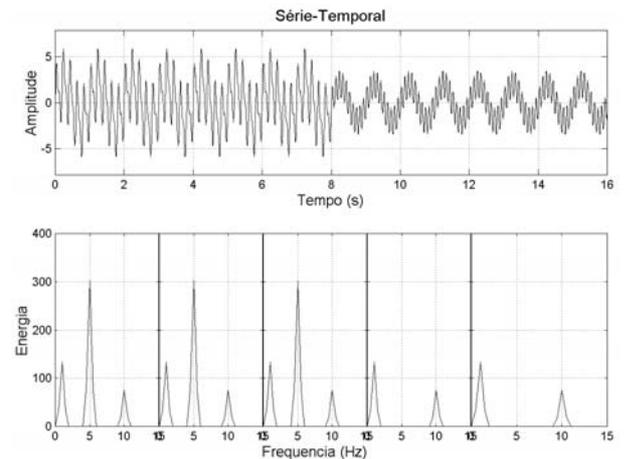


Figura 3 - Transformada de Fourier aplicada em cada segmento da série-temporal da figura 1.

4. A transformada em ondeleta

Embora a TFJ de Gabor tenha dado uma contribuição enorme para o estudo de séries-temporais não-estacionárias, havia ainda um problema a ser resolvido. Na realidade eram dois problemas: um é que a janela da TFJ é fixa, não podendo modificá-la após o início do processo de aplicação da TFJ; o outro problema é que as funções trigonométricas possuem energia infinita, ou seja, estas funções são limitadas apenas entre $-\infty$ e ∞ .

Por volta do início da década de 1980, um pesquisador francês chamado Jean Morlet percebeu estes dois problemas quando estava usando a TFJ em séries-temporais de ecos geofísicos na busca de poços petrolíferos. Morlet percebeu a necessidade de desenvolver uma função matemática base, ψ , que além de

possuir energia finita (ter um início e um fim), pudesse ser capaz de dilatar ou comprimir esta função, eliminando o problema da janela fixa da TFJ. Um outro matemático francês, chamado Alex Grossman, juntou-se a Morlet na busca destas funções matemática base que fossem como pequenas ondas. No entanto, se a base possuir suporte limitado, decaindo para zero muito rapidamente, então a melhor maneira desta base cobrir todo o eixo dos reais seria dado através de translações desta base em todo o comprimento da série-temporal.

Da mesma maneira, observando a base da Transformada de Fourier dada pela Eq. 2, pode-se constatar que cada função base (as exponenciais complexas) é obtida a partir de simples dilatações na frequência. Reunindo estas duas propriedades, dilatação e translação, em um único protótipo de função base, obtemos as chamadas *funções ondeletas*, onde as dilatações e as translações são dadas por duas variáveis nomeadas j e k , respectivamente. Sabe-se que foi Morlet o primeiro que cunhou o nome, em francês, de *ondelette*, mais tarde conhecida mundialmente como wavelets. Portanto, o termo ondeleta refere-se a um conjunto de funções com forma de pequenas ondas geradas por dilatações, $\psi(t) \rightarrow \psi(2t)$, e translações, $\psi(t) \rightarrow \psi(t + 1)$, de uma função base geradora simples $\psi(t)$, a ondeleta-mãe. Logo, através da ondeleta-mãe pode ser geradas as chamadas ondeletas-filhas

$$\psi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi\left(\frac{t-k}{j}\right), \quad (3)$$

de forma que a transformada seja definida como

$$\langle f, \psi_{j,k} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi\left(\frac{t-k}{j}\right) dt. \quad (4)$$

Esta deve ser quadraticamente integrável dentro de um intervalo de tempo real ou espaço $[L^2(\mathfrak{R})]$, isto é, deve apresentar energia finita. A imposição de que a sua energia média seja zero, constitui apenas uma das condições de admissibilidade da função base. Para as demais condições, consulte o livro de Meyer [8].

A idéia central da análise em ondeletas consiste em decompor um sinal a diferentes níveis de resolução, processo conhecido como *Multiresolução*. A representação de multiresolução fornece uma moldura hierárquica simples para interpretação de informação da série-temporal. A diferentes resoluções, os detalhes de um sinal geralmente caracterizam diferentes estruturas físicas do mesmo. A uma resolução mais grosseira, estes detalhes geralmente caracterizam as grandes estruturas que fornecem o contexto. Com o aumento da resolução, obtemos detalhes mais finos. O processo de decomposição ocorre da seguinte maneira.

Suponhamos que temos uma série-temporal com um comprimento de s pontos. Colocaremos este número como potência de 2 tal que $s = 2^n$. Como exemplo,

se $s = 1024$ pontos, então $1024 = 2^n \rightarrow n = 10$. Isso significa que teremos 10 escalas (ou frequências) que poderemos “enxergar” pelas ondeletas, de maneira em particular das ondelatas chamadas discretas. Logo, a primeira escala (ou frequência) que a função ondeleta irá atuar é na escala de $n - 1 = 9$, e isto implica que a série-temporal será dividida em duas partes iguais, cada uma com $n - 1 = 9 \rightarrow 2^9 = 512$ pontos. A função ondeleta mãe será comprimida pela metade e aplicada na primeira metade da série-temporal. Em seguida, será transladada para a segunda parte da mesma série temporal. Este processo é mostrado na Fig. 4. Agora, para o próximo nível de resolução $n - 2 = 8$, teremos $2^8 = 256$ pontos. Isto equivale a dividir pela metade cada uma das duas série anteriores. Com isso, a função ondeleta deve também ser novamente comprimida pela metade de modo a caber dentro do primeiro segmento da série de 256 pontos para, em seguida, ser translada para os demais segmentos da série-temporal, como mostrado na Fig. 5.

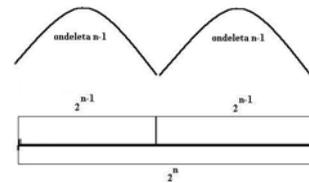


Figura 4 - Primeira análise de multiresolução dada pela função ondeleta.

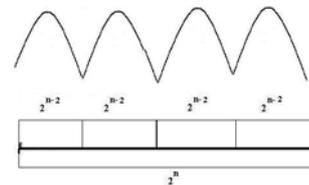


Figura 5 - Segunda análise de multiresolução dada pela função ondeleta.

Este processo será repetido até a última escala $n = 1 \rightarrow 2^1 = 2$ pontos. Isto nos proporcionará um diagrama conhecido como *periodograma de ondeleta*, como mostrado esquematicamente na Fig. 6.

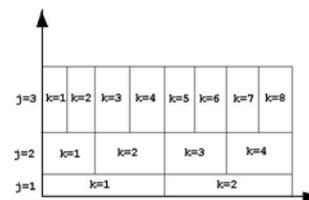


Figura 6 - Resultado da análise de multiresolução dada pela função ondeleta conhecido como periodograma em ondeleta.

O resultado de todo o trabalho de Morlet e Grossman deu origem a primeira função base que mais tarde foi chamada de função ondeleta de Morlet, dada pela equação

$$\Psi_{i,j}(t) = e^{iKt} \cdot e^{-t^2/2}, \quad (5)$$

onde K é uma constante inteira. A forma desta função é mostrada na Fig. 7.

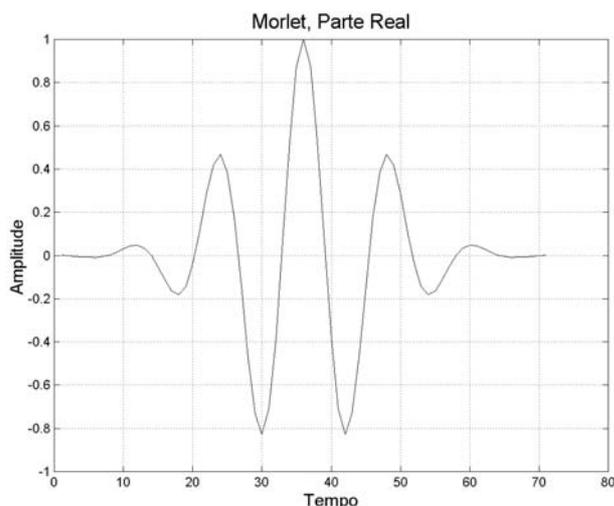


Figura 7 - Parte real da função ondaleta de Morlet.

Há dois tipos de funções ondaletas, as *Contínuas* e as *Discretas*, cada qual útil para determinadas aplicações.

As ondaletas discretas são utilizadas para a decomposição e filtragem de qualquer série-temporal. A sua aplicabilidade neste aspecto advém do fato de que estas ondaletas não provocam retundâncias de coeficientes entre escalas (frequências) [8,9]. A ondaleta discreta mais comum é a ondaleta de Haar [10]. Um exemplo da aplicabilidade desta função é dado no trabalho de Bolzan [1].

As ondaletas contínuas são comumente utilizadas para visualizar, através do periodograma mencionado anteriormente, a relação existente entre as componentes de diferentes frequências em função da escala temporal da série-temporal estudado, onde estas relações são comumente categorizadas como não-lineares. As ondaletas contínuas mais comuns são: a Morlet e a Chapéu Mexicano, dentre outras [10]. Um exemplo da aplicabilidade desta função é dado também no trabalho de Bolzan [1]. Entretanto, com vista a demonstrar a vantagem do uso da TO, aplicamos ela sobre a série-temporal do gráfico inferior da Fig. 1, usando a função ondaleta de Morlet. A Fig. 8 mostra o periodograma do resultado. Note que obtemos a presença da frequência de cada função seno nos oito primeiros segundos de duração da série-temporal (faixas de cores mais claras no gráfico). A partir destes oito segundos, nota-se a presença de apenas duas das três frequências, são elas: 1 e 10 Hz. Note que, através deste periodograma, podemos identificar exatamente quais as frequências predominantes em uma série-temporal qualquer, o mesmo resultado obtido pela TFJ mostrada na Fig. 3 porém, com mais precisão na escala temporal. Tal fato é de extrema importância em análise de séries-temporais, ori-

undas de qualquer sistema natural, em que necessitasse determinar quais são os fenômenos físicos que estão agindo neste sistema e, com isso, contribuindo com o seu melhor entendimento.

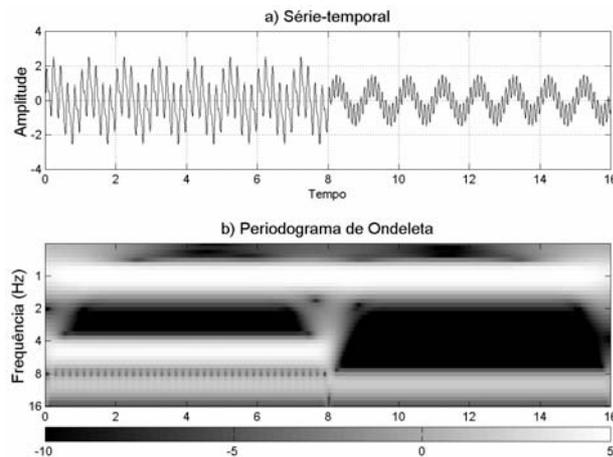


Figura 8 - Periodograma da série-temporal mostrada no gráfico inferior da Fig. 1. Foi utilizada a ondaleta de Morlet.

5. Conclusões

No trabalho anterior [1], foi mostrado o uso da Transformada em Ondaletas (TO) aplicada em uma série-temporal geofísica, o número de manchas solares. Com isso, foi demonstrado que a TO é uma ferramenta matemática útil e robusta para análise de séries-temporais com características não-estacionárias. Neste trabalho, procurei demonstrar melhor a real necessidade da TO utilizando para isso, experimentos simples realizados através do computador. Além disso, estes experimentos foram realizados dentro do contexto histórico do surgimento desta ferramenta, propiciando a melhor compreensão da TO. A aplicabilidade desta ferramenta hoje em dia, tornou-se acessível devido ao grande número de subrotinas disponíveis em vários softwares, tais como Fortran, Matlab e IDL. Existem muitas páginas na internet dedicadas ao assunto das Ondaletas nas mais diversas aplicações. Porém, há a minha páginas que, além de disponibilizar o programa em Matlab que gerou a maioria dos gráficos deste trabalho, também tem algumas informações úteis de como usar esta ferramenta. Assim, o leitor que tiver interesse deve acessar o seguinte endereço: <http://www.univap.br/bolzan/wavelet1/tw.html>. Portanto, espera-se que este artigo possa ter motivado alunos para a sua aplicação em séries-temporais oriundo de diversos sistemas físicos.

6. Agradecimento

O autor obteve auxílio da FAPESP através do projeto no. 2005/00511-9, e agradece aos comentários dados pelo revisor do trabalho.

Referências

- [1] M.J.A. Bolzan, Rev. Bras. Ens. Fis. **26**, 37 (2004).
- [2] C. Rodrigues Neto, A. Zanandrea, F.M. Ramos, R.R. Rosa, M.J.A. Bolzan e L.D.A. Sá, Physica A **295**, 215 (2001).
- [3] M. Vertteli e C. Herley, IEEE Trans. Signal Proc. **40**, 2207 (1992).
- [4] D.J.R. Nordemann, Pesq. Agropec. Bras. **33**, 1787 (1998).
- [5] M.J.A. Bolzan, Brazilian Journal of Physics **35**, 592 (2005).
- [6] C.A. Kelencz, M. Magini e M.J.A. Bolzan, Journal of Electromyography and Kinesiology, submetido.
- [7] E. Butkov, *Física-Matemática* (LTC editora, Rio de Janeiro, 1988), v. 1, p. 156.
- [8] Meyer, Y. *Ondelettes - Ondelettes et Opérateurs I* (Cambridge University Press, Cambridge, 1990), v. 1, p. 71.
- [9] Daubechies, I. *Ten Lectures on Wavelets* (Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1992), v. 1, p. 232.
- [10] P.A. Morettin, *Ondas e Ondeletas* (EdUSP, São Paulo, 1999), v. 1, p. 42.