

Estudio experimental de láminas de vidrio en voladizo

(*Experimental study of cantilever glass sheets*)

J. Ocampo¹, D. Quiroga, Y. Rosas y F. Fajardo²

Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia

Recebido em 27/6/2007; Revisado em 11/10/2007; Aceito em 18/10/2007

La flexión de vigas es una importante área en los cursos de física e ingeniería para el estudio de las propiedades elásticas de una gran variedad de materiales que se emplean en la industria. En el presente trabajo se realiza un experimento de la flexión de láminas delgadas de vidrio en voladizo, sometiénolas a un ensayo de flexión por medio de masas que se colocan en el extremo libre. Lo anterior con el fin de determinar hasta que grado el material es elástico y observar la dependencia del punto de fractura con la longitud y el ancho de la lámina de vidrio. Se examina si el material presenta histéresis mecánica. Finalmente se compara la curva experimental de la elástica con la calculada a partir del modelo de pequeñas pendientes. Este es un experimento de muy bajo costo, que puede ser implementado fácilmente en los laboratorios de física o de ingeniería para ilustrar las propiedades elásticas de materiales.

Palabras-clave: lámina en voladizo, módulo de Young.

The beams deflection is an important subject in physics and engineering courses to study the elastic properties of a great variety of industrial materials. In this work the experimental deflection of thin glass sheets in cantilever is presented. The deflection test is realized putting weights on the free extreme of glass sheets, in order to determine the dependence of elastic properties and breaking point with length and width of the beams. The material is also examined to verified if presents mechanical hysteresis. Finally a comparison between the experimental elastic curve and the calculated whit the small slopes model is performed. This is a very cheap experiment which could be implemented easily in physics or engineering labs to illustrate materials elastic properties.

Keywords: beams deflection, Young module.

1. Introducción

Una parte importante en la mecánica de sólidos es el estudio de la flexión y pandeo de vigas, que son cuerpos sólidos alargados (longitud mucho mayor que el ancho) con sección transversal recta y constante. Las estructuras son deformadas cuando se aplica un esfuerzo, y dichos esfuerzos son originados por cargas de origen estático, dinámico, térmico, hidrodinámico, etc [1-8].

En el presente trabajo se hace un análisis del comportamiento de láminas de vidrio en voladizo, las cuales fueron sometidas a esfuerzos de origen mecánico en pruebas destructivas para el estudio de sus propiedades elásticas y plásticas. Se examina la dependencia del punto de fractura con el ancho de la lámina, se hace la comparación con el modelo teórico en la aproximación de pequeñas pendientes (pequeños desplazamientos de la lámina) y se muestra una discusión acerca de la validez de dicha aproximación.

2. Planteamiento teórico

2.1. Elástica y flecha para un material lineal

Tal como se ilustra en la Fig. 1, se considera una barra delgada de longitud L y sección rectangular constante de base b (ancho) y altura h (espesor) empotrada en un extremo. La lámina está sometida a una carga uniformemente distribuida originada por el propio peso de la viga y una carga puntual aplicada en el extremo libre. Se supone que el material del que está constituida la viga tiene un comportamiento elástico lineal y se harán las siguientes consideraciones acerca de las características de la deformación [3]: las secciones transversales de la viga permanecen planas y perpendiculares a la línea neutra, (que es una línea imaginaria que une los centros de gravedad de las secciones transversales a lo largo de la barra), la cual no cambia su longitud durante la deformación. Adicionalmente se supone que el comportamiento del material es idéntico bajo compresión y tracción. Con estas consideraciones podemos

¹E-mail: jaocampo@unal.edu.co. ²E-mail: fefajardot@unal.edu.co.

afirmar que el momento flector se puede expresar como

$$M = \frac{EI}{\rho}, \quad (1)$$

donde E es el módulo de Young del material, ρ es el radio de curvatura e I es el momento de inercia de la sección transversal dado por

$$I = \frac{bh^3}{12}. \quad (2)$$

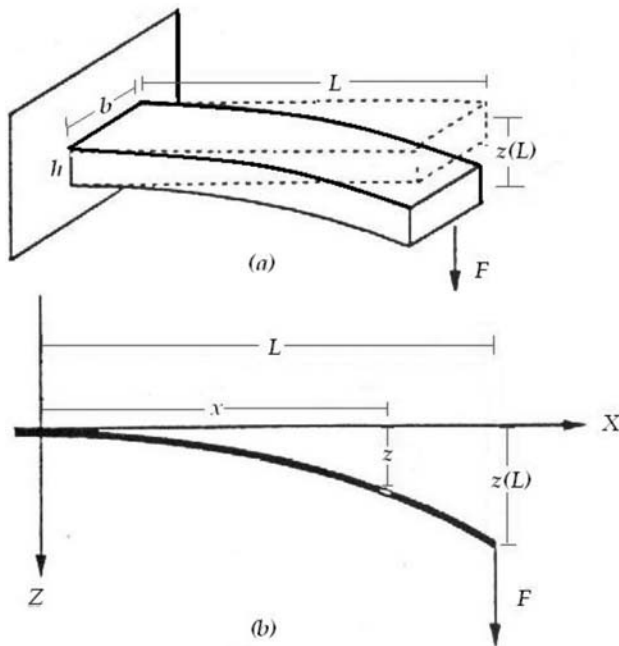


Figura 1 - (a) Flexión de una viga en voladizo de sección rectangular al aplicar una carga en el extremo libre. (b) Elástica de la viga en voladizo.

El radio de curvatura ρ de una curva $z(x)$ se puede calcular mediante la siguiente ecuación [1]

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2z/dx^2}{(1 + (d^2z/dx^2)^2)^{3/2}}, \quad (3)$$

y para el caso particular de la aproximación de pequeñas pendientes se tiene que

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2z}{dx^2}, \quad (4)$$

por tanto de Ec. (1) y Ec. (4) se puede escribir la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{M}{EI}. \quad (5)$$

Para obtener la ecuación de la curva elástica es necesario conocer el momento flector M , que esta asociado al torque producido por las fuerzas que comprimen y estiran el material. Para la viga en voladizo

considerada, el momento flector M_F debido a la carga puntual F es [1, 4]

$$M_F = F(L - x), \quad (6)$$

mientras que el momento flector debido a la carga uniformemente distribuida P es [1, 4]

$$M_F = \frac{P}{2L}(L - x)^2. \quad (7)$$

Por tanto el momento flector total $M(x)$ será la suma de los dos anteriores. Sustituyendo el valor de $M(x)$ en Ec. (5) bajo las condiciones de contorno $z(0) = 0$ y $(dz/dx)_{x=0} = 0$ se puede solucionar la ecuación analíticamente, obteniéndose la ecuación de la elástica

$$z(x) = \frac{1}{6EI} \left[F\{(L - x)^3 + 3L^2x - L^3\} + P \left\{ \frac{(L - x)^4}{4L} + L^2x - \frac{L^3}{4} \right\} \right]. \quad (8)$$

Esta ecuación permite calcular el desplazamiento vertical z en cada punto de la viga (ver Fig. 1b). Cuando $x = L$ en la ecuación anterior se obtiene una relación lineal entre la flecha² y la fuerza aplicada; así

$$z(L) = \frac{L^3}{24EI} (8F + 3P), \quad (9)$$

de donde se puede determinar el módulo de Young del material con su error absoluto a partir del valor de la pendiente de esta recta.

3. Montaje experimental

La Fig. 2 muestra el diagrama de la lámina en voladizo, sobre la cuál se aplica una fuerza vertical concentrada en el extremo libre. La lámina de vidrio se ha empujado 5 cm de longitud entre un par de bloques de madera sujetos con una prensa, para que la presión sea uniforme sobre la sección a sujetar. Los valores de b y h de la sección rectangular se han determinado con ayuda de un calibrador, tomando medidas de b y h cada 10 cm a lo largo de la lámina y se ha calculado la media de cada una de las series. Con ayuda de una regla se midió el desplazamiento vertical del extremo libre de la lámina con respecto al extremo empujado, y en el extremo libre se acopló una aguja para marcar de forma mas precisa la deformación. El procedimiento de medición se realizó variando la fuerza concentrada en el extremo de la lámina a través de unas pesas, que proporcionaban tensión y provocaban una deformación medible. El error de la medición en las masa de las pesas es de ± 0.0001 kg, lo que ocasiona que el error en F sea de ± 0.001 N. En la medición de la flecha, el error es de ± 0.5 mm. Las pesas con que se ejercía la tensión colgaban del extremo de la lámina siempre durante 30 segundos. Se recomienda el uso de lentes protectoras para evitar que una esquirla de vidrio entre en un ojo.

²La flecha es el desplazamiento vertical del extremo libre.

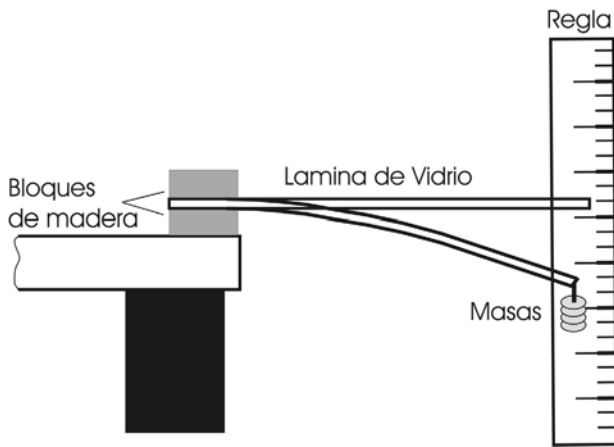


Figura 2 - Montaje experimental para el estudio de la flexión de una lámina de vidrio en voladizo.

4. Análisis y resultados

4.1. Dependencia de la flexión con la longitud de la lámina de vidrio

Se efectuaron las mediciones para longitudes de la lámina de 35, 45 y 58 cm aplicando pesas en el extremo libre hasta producir la fractura de la lámina. La respuesta obtenida en todos los casos fue la de una relación lineal entre la flecha y la carga aplicada (ver Fig. 3).

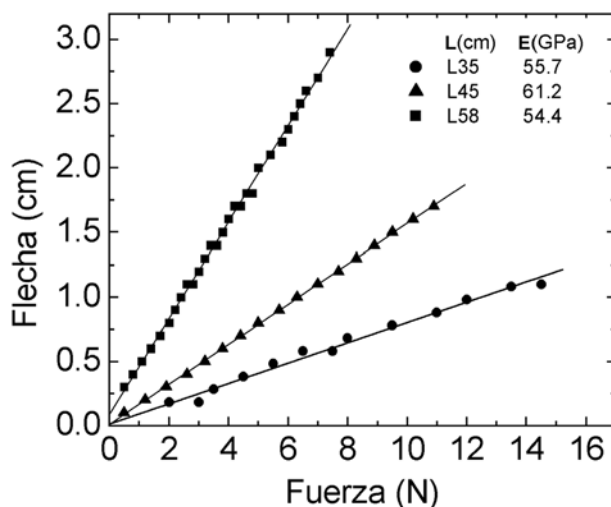


Figura 3 - Flecha en función de la fuerza aplicada F para tres diferentes longitudes de la lámina de vidrio.

Para el caso de $L = 58$ cm es evidente que la recta no pasa por el origen, ya que en las mediciones se tuvo en cuenta la deflexión producida por el peso propio de la lámina. Mientras que para $L = 45$ cm y $L = 35$ cm las láminas no se deflectan de forma apreciable, por lo que sus puntos de corte son muy cercanos al origen. Las barras de error experimental no se aprecian ya que son inferiores al tamaño de los puntos marcados en la figura. En la Tabla 1 se indican las características físicas

de las láminas empleadas. Sin embargo no es necesario conocer el valor de P correspondiente a cada lámina, puesto que E se puede determinar a través de la pendiente para la recta de la $z(L)$ en función de F como se infiere de Ec. (9). El valor promedio obtenido para las diferentes láminas fue de $E = 57.1 \pm 4.1$ GPa. Se puede decir que el módulo de Young no depende de la longitud del material, ya que en las mediciones efectuadas el valor calculado varía poco manteniéndose dentro de los estándares comúnmente reportados para el vidrio (48-78 GPa) [3]. Claramente se observa un comportamiento elástico, el cual no pasa a la región plástica, ya que el material se fractura antes de que se presente esta deformación [6].

Tabla 1 - Valores de la longitud (L), ancho (b), espesor (h) y peso de las láminas (P) utilizados en las curvas de la Fig. 3.

L (cm)	b (cm)	h (mm)	P (N)
35.0 ± 0.1	3.00 ± 0.05	5 ± 0.5	1.5092 ± 0.0001
45.0 ± 0.1	2.90 ± 0.05	5 ± 0.5	1.8208 ± 0.0001
58.0 ± 0.1	3.00 ± 0.05	5 ± 0.5	2.2344 ± 0.0001

En la Fig. 3 el último punto de cada curva corresponde a la carga máxima aplicada, para la cual se obtuvo la fractura de cada lámina.

En la Fig. 4 se observa una dependencia lineal entre la fuerza de fractura y la longitud para los vidrios utilizados. Además del ensayo destructivo se examinó si el material presentaba histéresis mecánica. Para esto se hizo previamente una prueba destructiva en un vidrio de 0.4 cm de espesor, 60 cm de largo y 3.4 cm de ancho con el fin de hallar el punto de fractura, que se alcanzó para una carga de 4.4 N. Este proceso se efectuó para tener control en la medida de la deformación al aumentar la carga, hasta un valor cercano del punto de fractura pero sin producir el rompimiento del vidrio. Tras efectuar el aumento de la carga hasta un valor máximo, se dejó descansar la carga durante 6 minutos para posteriormente retirarla y medir la disminución de la flexión. Se graficaron los valores de flecha en función de la carga para los valores de subida y bajada, encontrándose un comportamiento lineal con igual pendiente para ambos casos, de manera que el material no presenta histéresis mecánica (ver Fig. 5).

4.2. Dependencia de la flexión con el ancho

Se efectuaron las mediciones de la flecha para láminas de vidrio de 60 cm de longitud, 0.4 cm de espesor y anchos de 2 cm a 9 cm con variación de 1 cm, aplicando pesas en el extremo libre hasta producir la fractura de la lámina. La respuesta obtenida en todos los casos fue la de una relación lineal entre la flecha y la carga aplicada, tal como se aprecia en la Fig. 6, con un valor promedio del módulo de Young de 62 ± 6 GPa. Se muestra la concordancia con la linealidad predicha por el modelo de pequeñas pendientes. Además, las pendientes de las líneas disminuyen a medida que se aumenta el ancho de la lámina.

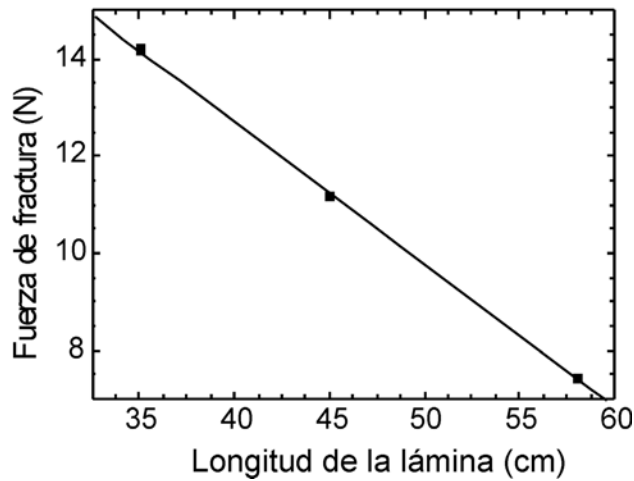


Figura 4 - Punto de fractura para los diferentes vidrios (35, 45 y 58 cm) relacionando la carga en función de la longitud.

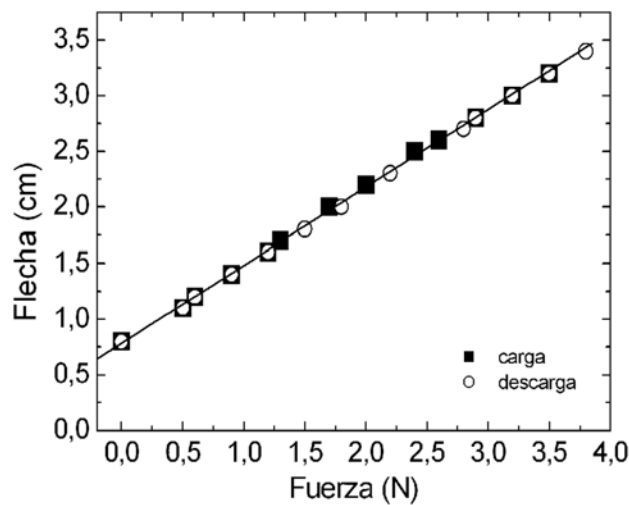


Figura 5 - Flecha en función de la fuerza en el proceso de carga y descarga para observar si hay histéresis mecánica en el vidrio.

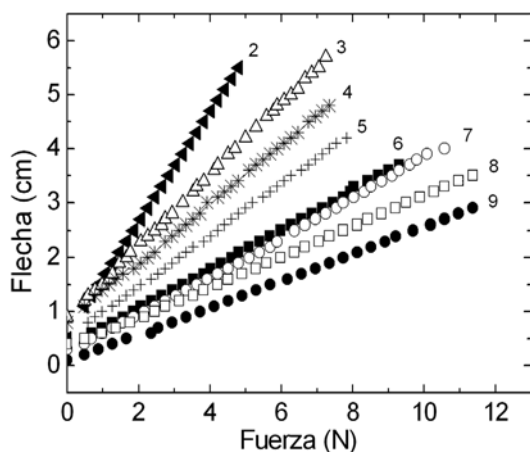


Figura 6 - Flecha en función de la fuerza aplicada F variando el ancho (número al lado de cada curva en cm) de la viga. Todas las láminas tenían una longitud de 60 cm y un espesor de 0.4 cm.

Luego, para una fuerza particular de 4.214 N se graficó la flecha en función del ancho de las láminas de vidrio, ya que en la mayoría de las mediciones efectuadas para las diferentes láminas se aplicó dicha tensión en el extremo. Obteniéndose el siguiente comportamiento (ver Fig. 7).

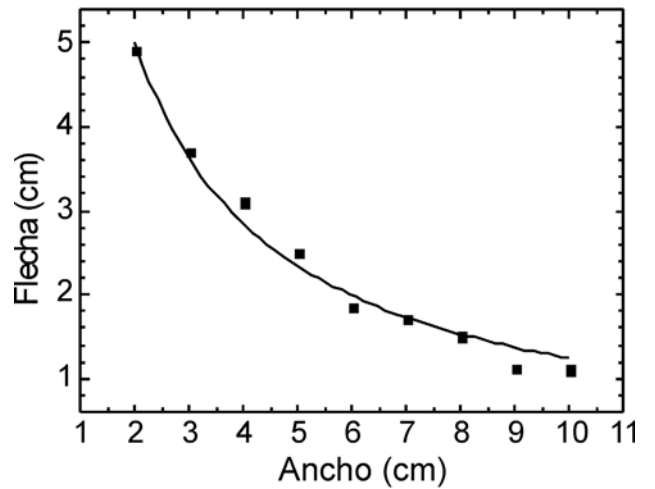


Figura 7 - Flecha en función del ancho de las láminas para una fuerza de 4,214 N.

A continuación se realiza la linealización de la figura anterior. Se observa en la Fig. 8 que la curva que mejor ajusta es una proporcional al inverso del ancho de la lámina (ver ecuaciones 2 y 9). Este resultado concuerda con el modelo teórico [1], que también predice un comportamiento lineal entre la flecha y la fuerza aplicada en el extremo libre. A partir de esta figura se calculó un valor para el módulo de Young de 58 ± 4 GPa empleando la ecuación (9) que concuerda bastante bien con el valor promedio del modulo de Young obtenido de las curvas de la Fig. 6 [3].

Nótese además en la Fig. 8 que el material sufre una flexión menor a medida que aumenta el ancho. La linealización no pasa por el origen, ya que para anchos grandes la lámina tiene una pequeña flexión debida a su propio peso.

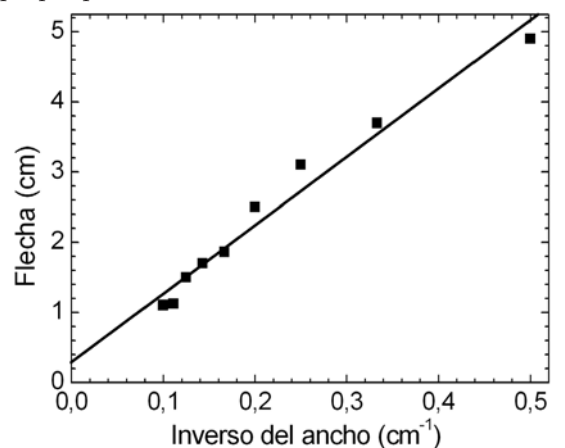


Figura 8 - Flecha en función del inverso del ancho de las láminas para una fuerza de 4,214 N.

Durante el experimento se midió el punto de fractura para los vidrios en función del ancho y se puede ver en la Fig. 9 que la fuerza necesaria para romper el vidrio es proporcional al ancho de la viga. El corrimiento en los puntos puede ser ocasionado por las oscilaciones que presenta la lámina al estar cerca del punto de fractura y a la dificultad de colocar la masa que produce justo la ruptura de la lámina de vidrio.

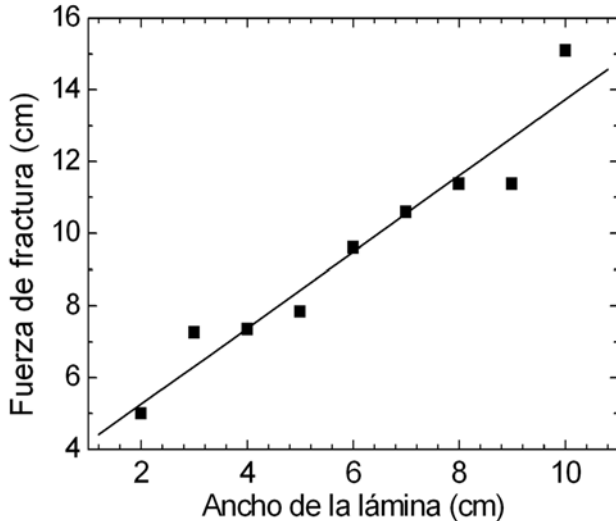


Figura 9 - Punto de fractura para los diferentes vidrios relacionando la carga en función del ancho.

5. Curva elástica

En la Fig. 10 se presenta la curva elástica para las diferentes fuerzas aplicadas, la cual se determinó experimentalmente a través de una fotografía tomada del montaje con una lámina de vidrio de 60 cm de largo, 2 cm de ancho y 0.4 cm de espesor con una carga aplicada 4,214 N. La curva teórica se realizó a partir de la ecuación (9) (ver línea continua); ésta representa la curva elástica con la deformación debida a una fuerza puntual aplicada en el extremo de la lámina y los puntos negros corresponden a la curva experimental. La barra de error para el desplazamiento vertical es de ± 1 mm debido a que el método empleado para medir dicho desplazamiento, aumenta la incertidumbre con respecto al empleado para medir la flecha en los procedimientos anteriores. De la Fig. 10 se observa que las predicciones teóricas indican una mayor flexión que la que se presenta en las mediciones experimentales. Esto ocurre porque el peso y la longitud de la viga, producen una flexión significativa, lo que impide realizar una buena estimación con el modelo teórico, ya que éste se ha construido bajo la aproximación de pequeñas pendientes, que no es suficiente puesto que los términos de segundo orden en la curvatura se hacen significativos. Por ello para hacer una mejor aproximación, es necesario considerar términos de órdenes superiores en la expansión de la expresión del radio de curvatura (3).

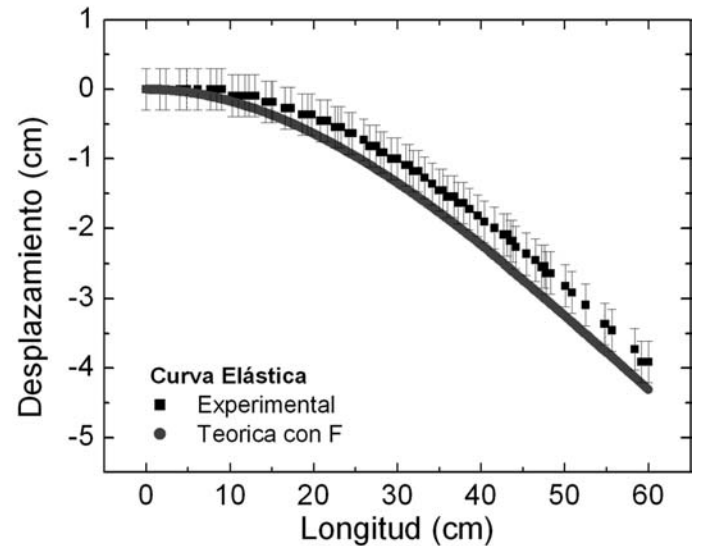


Figura 10 - Curva elástica de la lámina sometida a una fuerza de 4,214 N en el extremo libre, un módulo de Young de 66 GPa (calculado para un vidrio en un ensayo destructivo). Ancho del vidrio 2 cm, espesor 0.4 cm, longitud 60 cm y peso del vidrio 127,2 g.

6. Conclusiones

Se encontró que el vidrio es un material que presenta una respuesta lineal cuando es sometido a flexión, sin presentar el fenómeno de histéresis. Se ha determinado que el punto de fractura de una lámina de vidrio depende de la longitud, ancho y la carga aplicada. En las relaciones de carga en función de la longitud y carga en función del ancho, se observó un comportamiento lineal, llegando a la fractura sin presentar comportamiento plástico.

Se encontró que el módulo de Young es independiente de la longitud con un valor medio de $E = 57.1 \pm 4.1$ GPa el cual concuerda con valores estándares para el vidrio. Para otro conjunto de vigas con longitud constante y variando el ancho se halló un módulo de Young con un valor de $E = 62 \pm 6$ GPa. Los valores que se determinaron para el módulo de Young en los dos procedimientos son diferentes, porque las láminas empleadas en cada experimento fueron cortadas de hojas de vidrio diferentes.

De la curva elástica se ha determinado que la aproximación de pequeñas pendientes no es suficiente, porque se hace necesario tener en cuenta términos de ordenes superiores, puesto que el desplazamiento se hace significativo con respecto a la longitud de la lámina.

Este es un experimento de muy bajo costo que puede ser implementado fácilmente en los cursos de mecánica de sólidos y como un ejemplo para entender las propiedades estructurales de materiales.

Agradecimientos

Agradecemos al referi por los comentarios que permitieron precisar la forma en que se tomaron los datos experimentales.

Referencias

- [1] T. Beléndez, C. Neipp y A. Beléndez, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **24**, 399 (2002).
- [2] T. Beléndez, C. Neipp y A. Beléndez, *Eur. J. Phys.* **29**, 371 (2002).
- [3] J. Gere y S. Timoshenko, *Mecánica de Materiales* (Thomson Editores, México, 1998).
- [4] R. Feynman, R.B. Leighton y M. Sands, *Física Volumen II, Electromagnetismo y Materia* (Addison-Wesley Iberoamericana, México, 1987).
- [5] M. Sthiyamoorthy, *Nonlinear Analysis of Structures* (CRC Press LLC, Boca Raton, 1998).
- [6] http://material.fis.ucm.es/paloma/_private/notas/ejemplos/vidriosdescripcion.pdf (2006).
- [7] L.D. Landau y E.M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics, Theory of Elasticity* (Pergamon Press, Oxford, 1986).
- [8] S. Timoshenko y J.N. Goodier, *Theory of Elasticity* (Mc Graw Hill, New York, 1998).