

Artigos Gerais

Órbitas fechadas e o potencial harmônico de Manev

(Closed orbits and the harmonic Manev potential)

H.E.S. Velten^{1,2} e R.V. Sampaio³

¹Grupo de Gravitação e Cosmologia, Departamento de Física, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, ES, Brasil

²Fakultät für Physik, Universität Bielefeld, Bielefeld, Alemanha

³Grupo de Física Aplicada, Departamento de Física, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, ES, Brasil

Recebido em 12/9/2008; Aceito em 24/11/2008; Publicado em 30/4/2009

Estudamos condições para a existência de órbitas fechadas em três potenciais distintos. Primeiramente, confirmamos condições já conhecidas para o problema de Manev. Em um segundo passo, inspirados pelo teorema de Bertrand, construímos o potencial harmônico de Manev substituindo o termo do oscilador harmônico no lugar do termo Newtoniano no potencial de Manev. Assim como no potencial de Manev, encontramos condições similares para a existência de órbitas fechadas que são relacionadas com valores restritos do momento angular. Analisamos também um potencial Newtoniano corrigido com o termo harmônico.

Palavras-chave: potencial de Manev, teorema de Bertrand, órbitas fechadas.

We study conditions for the existence of closed orbits in three distinct potentials. Firstly, we confirm well known conditions for the Manev problem. In a second step, inspired by the result of Bertrand's theorem, we construct a harmonic Manev potential with a harmonic oscillator term instead of the Newtonian one. As in the original Manev potential we find similar conditions for closed orbits that are correlated with restrict values of angular momenta. We analyse also a harmonic corrected Newtonian potential.

Keywords: Manev potential, Bertrand's theorem, closed orbits.

1. Introdução

Conhecer a trajetória de uma partícula em um campo de força central é um problema extremamente importante em dois ramos bem diferentes da física, como por exemplo, o movimento de corpos celestes e certos tipos de situações em mecânica quântica. Muitos tipos de potenciais têm sido estudados nos últimos quatro séculos desde o começo da era moderna do estudo da mecânica com o *Principia* de Newton [1]. O potencial Newtoniano $V_N \propto r^{-1}$ e o potencial do oscilador harmônico $V_H \propto r^2$ já foram exaustivamente aplicados em diversas situações físicas dentro da mecânica clássica [2]. Entretanto, é importante notar que, como é bem conhecido, esses potenciais também são importantes em mecânica quântica [3]. Além do que, esses potenciais são também importantes sob um ponto de vista semi-clássico [4]. Outro resultado que compreende estes potenciais é o teorema de Bertrand [5]. Este resultado, nos diz que somente forças centrais do tipo $V(r) \propto r^n$, que resultam em órbitas fechadas para todas as partículas radialmente ligadas, são o potencial Newtoniano $n = -1$ (ou problema de Kepler) e o potencial do oscilador

harmônico simples $n = 2$ (ou Lei de Hooke). Diferentes provas do teorema de Bertrand podem ser encontradas nas Refs. [6, 7].

Dentro do estudo da mecânica celeste, com o advento da relatividade geral, temos uma nova maneira de descrever processos físicos gravitacionais. No limite de campos fracos da relatividade geral um corpo de prova orbitando sob um campo gravitacional é governado pelo potencial $V_R \propto (r^{-1} + r^{-3})$. Esse resultado explica com grande precisão as observações da precessão do perihélio de Mercúrio. No entanto, uma tentativa clássica de reproduzir os resultados da relatividade geral foi feito pelo físico búlgaro Georgi Manev a partir da segunda década do século passado, quando este introduziu um potencial da forma [8]²

$$V_M = \frac{A}{r} + \frac{3B}{2c^2 r^2}, \quad (1)$$

onde A é o produto da constante gravitacional pela massa do corpo ($A = GM$), B é uma constante e c é a velocidade da luz. A partir do potencial de Manev (1) obtemos o potencial newtoniano com o limite não relativístico $B \ll c^2$. Devemos fazer referência que mesmo Newton já havia considerado este potencial e

¹E-mail: velten@cce.ufes.br.

²Como as publicações de Manev eram em francês ou em alemão se diz Maneff.

descoberto que para um corpo orbitando neste campo gravitacional sua trajetória seria uma elipse que precessiona em torno do plano de movimento. No entanto, nenhum outro trabalho foi realizado com este potencial por Newton ou pelos que lhe sucederam, até a época de Manev.

Podemos dizer que tudo começou quando Max Planck, em 1908, verificou que o princípio de ação e reação Newtoniano não condizia com a relatividade especial. Para isso Planck reformulou o princípio de ação e reação, utilizando o conceito de quantidade de movimento eletromagnético, introduzido por M. Abraham em 1903. O trabalho de Manev consistiu em mostrar que aplicando a formulação de Planck para o princípio de ação e reação à mecânica clássica, o potencial $A/r + B/r^2$ surge naturalmente e a partir disso passou a considerar que esse modelo poderia substituir a teoria relativista. Os cálculos de Manev mostram novos resultados, principalmente em mecânica celeste, que não são encontrados com o potencial Newtoniano. Pelo menos em nível de sistema solar, as previsões teóricas de Manev são igualmente condizentes com as observações, assim como a relatividade geral também o é. No entanto, é fundamental perceber que com o potencial de Manev sempre estaremos trabalhando dentro da mecânica clássica, ganhando assim em transparência e simplicidade. Ao passo que, para utilizarmos o potencial relativístico V_R , devemos primeiramente analisar se realmente o problema se encontra no limite de campo fraco da relatividade geral. Além do que, o potencial V_R é apenas uma primeira aproximação, negligenciando termos de ordens superiores.

Após 1930, ano da última publicação de Manev sobre o assunto, seus trabalhos permaneceram desconhecidos por mais de meio século até que seu modelo voltou a ser fonte de estudo no final do século passado. Recentes resultados mostraram que o potencial de Manev é o análogo clássico do modelo de Schwarzschild [9]. Alguns problemas em astrofísica podem ser modelados com o potencial de Manev, como o colapso de uma esfera homogênea [10]; estudos não perturbativos da precessão de órbitas elípticas [11] e singularidades nuas em relatividade geral [12]. Essa redescoberta do potencial de Manev levou a uma série de novos resultados que colocam o potencial de Manev como uma ponte entre a mecânica Newtoniana e a relatividade geral. Vale ressaltar que a idéia de se trabalhar com variações do potencial Newtoniano também se aplica em muitas teorias mais recentes, como no contexto de dinâmicas modificadas [13] ou em teorias com dimensões superiores [14].

Na Ref. [15] diversos resultados sobre a dinâmica do potencial de Manev foram encontrados. Entre estes resultados, existem condições explícitas para as quais são permitidas órbitas fechadas em trajetórias clássicas governados pelo potencial de Manev (1). Estes autores encontraram que existem órbitas fechadas para

o problema de Manev somente quando o momento angular do corpo teste assume valores muito específicos. No entanto, o teorema de Bertrand não julga situações onde o potencial possui mais do que um termo. Dessa forma, os resultados obtidos com o potencial de Manev introduzem novas condições para a existência de órbitas fechadas não tratadas pelo teorema de Bertrand.

Neste artigo buscamos resolver a equação para órbitas numericamente, tanto para o potencial de Manev quanto para variantes deste. Para isso seguimos o seguinte roteiro: na segunda seção estudamos o formalismo clássico para o estudo de órbitas. Para o potencial de Manev confirmamos as condições conhecidas na literatura, relacionadas ao momento angular, que determinam a existência de órbitas fechadas. Na terceira seção, motivados pelo teorema de Bertrand, construímos o potencial harmônico de Bertrand, substituindo o termo (r^{-1}) no potencial original de Manev (1) pelo termo do oscilador harmônico (r^2) . Na quarta seção, fazemo-nos a seguinte pergunta: se os potenciais Newtoniano e harmônico separadamente resultam em órbitas fechadas, será que juntos também reproduziriam tal resultado? Finalmente, apresentamos nossas conclusões na quinta seção.

2. Descrição do movimento

Uma importante classe de campos centrais é caracterizada por uma energia potencial inversamente proporcional a r . Isto inclui o potencial gravitacional Newtoniano e o potencial eletrostático Coulombiano. É fato que estes potenciais contêm apenas um termo. Porém, há diferentes situações em que existem mais de um termo no potencial. Por exemplo, em mecânica celeste, ao estudarmos o movimento de planetas em nosso sistema solar, esperamos que, por causa de perturbações introduzidas pela existência dos demais planetas, a força experimentada por um corpo não varie exatamente como $1/r^2$, onde r é a distância medida a partir do Sol [16].

Nesta seção queremos estudar o movimento de um corpo de teste submetido ao potencial de Manev (1). Para encontrar as equações de movimento construímos a lagrangiana do sistema

$$L = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right) - \frac{A}{r} - \frac{3B}{2c^2 r^2}. \quad (2)$$

Se restringirmos o movimento ao plano $\theta = \text{const} = \frac{\pi}{2}$, obteremos equações de movimento em coordenadas polares

$$\left(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 \right) = F(r), \quad (3)$$

$$\left(r^2 \ddot{\phi} + 2r\dot{r}\dot{\phi} \right) = 0, \quad (4)$$

onde $F(r)$ é a força por unidade de massa. A Eq. (4) pode ser imediatamente integrada, o que leva a

$$r^2 \dot{\phi} = \text{constant} = l_\phi. \quad (5)$$

Essa equação expressa a conservação do momento angular sobre o eixo z e fornece uma das integrais de movimento. Esta lei de conservação possui uma simples interpretação pois está conectada com a segunda lei de Kepler para o movimento planetário. Para ir adiante, usamos a Eq. (5) para substituir o tempo t pelo ângulo ϕ como variável independente na Eq. (4). Uma vez que (5) implica em

$$\frac{d}{dt} = \frac{l_\phi}{r^2} \frac{d}{d\phi}, \quad (6)$$

a Eq. (3) se torna

$$\frac{l_\phi^2}{r^2} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi} \right) - \frac{l_\phi^2}{r^3} = F(r). \quad (7)$$

esta equação pode ser simplificada pela substituição

$$u = \frac{1}{r}, \quad (8)$$

que coloca (7) na forma

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = -\frac{F(1/u)}{l_\phi^2 u^2}. \quad (9)$$

Esta forma para a equação da órbita é particularmente útil se queremos encontrar a lei de força que fornece uma órbita particular $u = u(\phi)$. Se a equação para a órbita é conhecida na forma $r(\phi)$, podemos então resolver a equação acima e obter a lei de força $F(r)$. Da mesma maneira, para qualquer força particular, a equação para a órbita pode ser obtida integrando a equação diferencial (9). Este procedimento será realizado nesta e nas seções seguintes para resolvermos o casos sob investigação. Inserindo a força $F_M(r) = -\nabla V_M$, derivada do potencial de Manev (1), obtemos a equação para a órbita³

$$\frac{d^2 u_M}{d\phi^2} + \beta^2 u_M = \gamma, \quad (10)$$

onde introduzimos as seguintes definições:

$$\gamma = -\frac{A}{l_\phi^2} \quad \beta^2 = 1 + \frac{3B}{2c^2 l_\phi^2}. \quad (11)$$

Se $B = 0$ temos novamente o potencial Newtoniano e a Eq. (10) possui soluções bem conhecidas. A correção $\frac{3B}{2c^2 r^2}$ produz somente uma modificação no coeficiente do termo linear desta equação. A partir disso, devemos considerar três diferentes casos para o coeficiente β^2 , a saber: $\beta^2 < 0$, $\beta^2 = 0$ e $\beta^2 > 0$.

2.1. Caso $\beta^2 < 0$

Para encontrar a solução geral neste caso, a Eq. (10) pode ser reescrita como

$$\frac{d^2 u_{M1}}{d\phi^2} - |\beta|^2 u_{M1} = \gamma. \quad (12)$$

³ u_M é a equação para a órbita para o potencial de Manev.

De uma maneira direta podemos mostrar que a solução da equação acima é

$$u_{M1}(\phi) = \gamma \left[\frac{1}{\beta^2} + \epsilon \cosh(|\beta|\phi + \phi_0) \right], \quad (13)$$

onde ϵ é a excentricidade da órbita. A solução acima caracteriza uma órbita aberta como pode ser observado na Fig. 1.

2.2. Caso $\beta^2 = 0$

Nesta situação especial o termo com a constante B no potencial de Manev possui um papel atrativo ($B < 0$), uma vez que o módulo do momento angular é sempre uma quantidade positiva. A equação para a trajetória torna-se

$$\frac{d^2 u_{M2}}{d\phi^2} = \gamma. \quad (14)$$

Podemos mostrar sem dificuldades que

$$u_{M2}(\phi) = \frac{\gamma}{2} \phi^2 + b_1 \phi + c_1, \quad (15)$$

onde b_1 e c_1 são constantes de integração e podem ser encontradas a partir das condições iniciais para $u(\phi)$ e $u'(\phi)$. Para uma visualização qualitativa das órbitas podemos tomar valores arbitrários para estas constantes. A órbita resultante é mostrada no lado direito da Fig. 1 e representa uma espiral fechada, enquanto a órbita estudada no caso anterior, onde $\beta^2 < 0$, representa um espiral aberta.

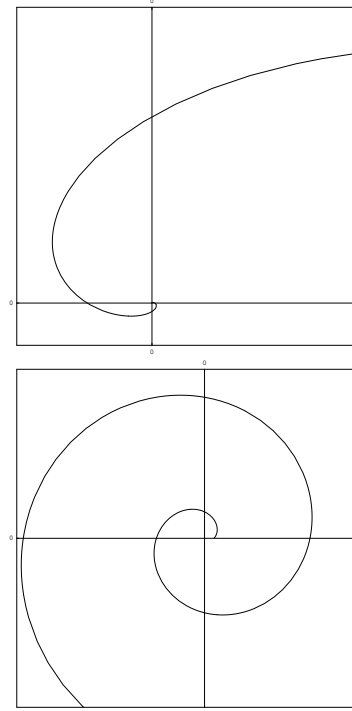


Figura 1 - A figura de cima é a órbita para a solução (13). Na figura inferior mostramos a órbita para a solução (15). Em cada figura, a interseção entre as linhas horizontal e vertical representa a origem da trajetória.

2.3. Caso $\beta^2 > 0$

A partir das definições (11) uma restrição nos valores de β^2 implica que devemos considerar soluções de (10) tanto para o caso de interações repulsivas quanto atrativas do potencial Newtoniano. Isto depende do sinal de B uma vez que $B > -l_\phi^2$. A solução geral para este caso é

$$u_{M3}(\phi) = \gamma \left[\frac{1}{\beta^2} + \epsilon \cos(\beta\phi + \phi_0) \right]. \quad (16)$$

No caso limite $\beta = 1$ temos novamente a equação de órbita para o potencial Newtoniano. Na Fig. 2 mostramos várias órbitas para distintos valores de β . Vemos que para determinados valores de β e, conseqüentemente, determinados valores do momento angular (11), obtemos órbitas fechadas. Aparentemente, este resultado mostra que, no caso de potenciais combinados, a existência de órbitas fechadas requer que o momento angular assuma valores restritos. Verificamos que as órbitas mostradas na Fig. 2 são fechadas, confirmando que $r(0) = r(2\pi)$ e $r'(0) = r'(2\pi)$ para os casos onde $\beta = 1, 2, 3$. Para $\beta = 0.5, 1.5, 2.5$ as órbitas se fecham somente após duas revoluções quando

$r(0) = r(4\pi)$ e $r'(0) = r'(4\pi)$. Observamos ainda, que existem outros valores para β que produzem órbitas fechadas. Na verdade, estes valores estão conectados com o valor do ângulo apsidal que será calculado na próxima seção.

2.4. Estabilidade da órbita

Em uma órbita ligada e não circular, a distância radial entre a origem da trajetória e a partícula está sempre dentro dos limites $r_{min} \leq r \leq r_{max}$. Estes pontos de mínimos e máximos são chamados de apsides e, conseqüentemente, a separação angular entre duas apsides consecutivas é o ângulo apsidal Ψ . Por exemplo, o ângulo apsidal para uma órbita elíptica é $\pi/2$. A exigência para termos uma órbita fechada é que o ângulo apsidal seja uma fração racional de 2π [2]. Se Ψ não for uma fração racional de 2π , a partícula não retornará a sua posição original após ela completar um certo número de revoluções.

Existem duas condições para a estabilidade das órbitas, a saber [17]

$$\frac{dV_{eff}}{dr}(\bar{r}) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d^2V_{eff}}{dr^2}(\bar{r}) > 0. \quad (17)$$

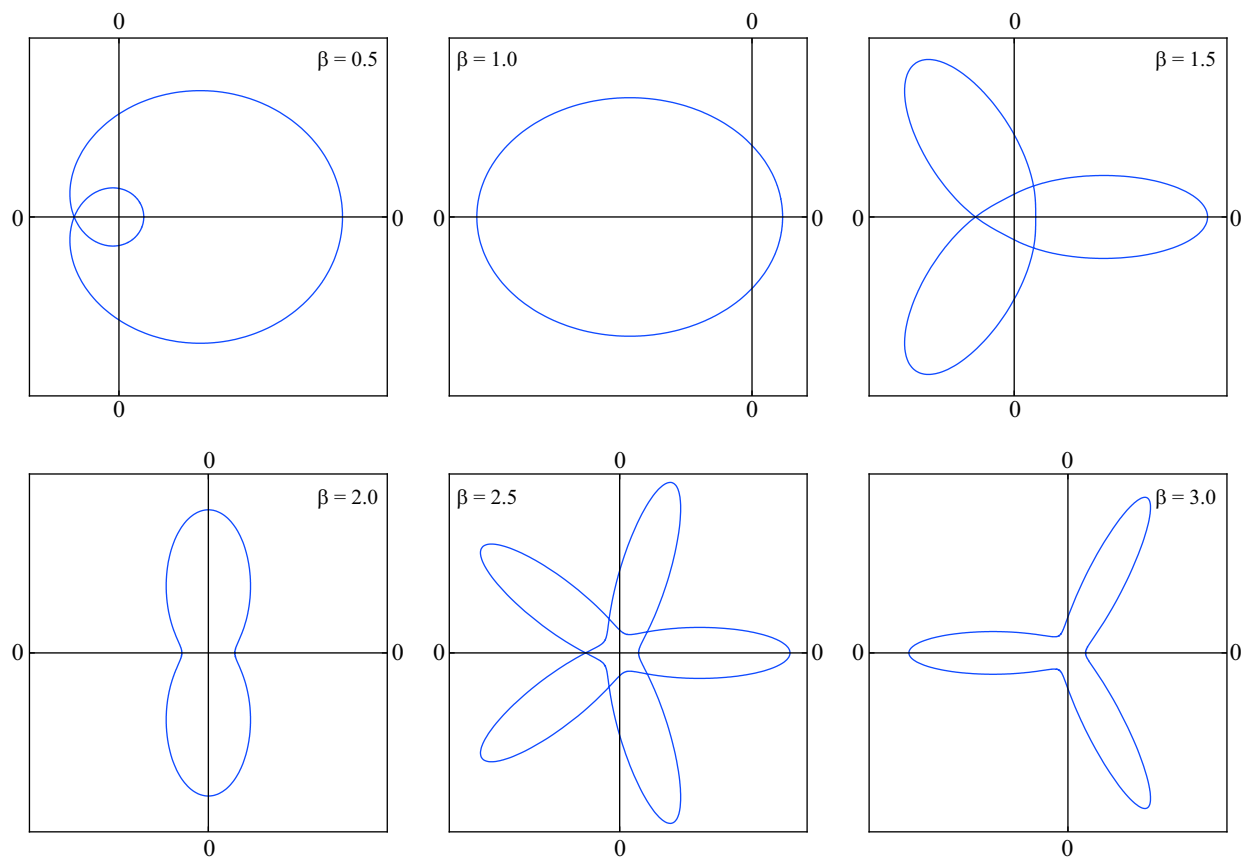


Figura 2 - Órbitas para o potencial de Manev com diferentes valores de β .

O potencial efetivo $V_{eff} = V_M(r) + l_\phi^2/2r^2$ contém o termo centrífugo $l_\phi^2/2r^2$ e para uma órbita estável ambas as condições (17) devem ser satisfeitas simultaneamente. A partir da primeira das condições acima obtemos o valor de \bar{r} , que é o raio típico de uma órbita circular estável. Para responder a questão se uma órbita é fechada ou não, precisamos primeiramente calcular o ângulo apsidal Ψ . A partir das condições (17) e analisando o comportamento de uma órbita quando pequenas perturbações são introduzidas, é possível encontrar

$$\Psi = \pi \left[3 + \bar{r} \frac{F'(\bar{r})}{F(\bar{r})} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (18)$$

Se calcularmos a força $F_M(r)$ derivada a partir do potencial de Manev (1) e introduzirmos na relação acima, obteremos

$$\Psi_M = \frac{\pi}{\beta}. \quad (19)$$

Esta relação está em acordo com as órbitas mostradas na Fig. 2. Por exemplo, quando $\beta = 2$, o ângulo formado entre duas apsides consecutivas é π . Na verdade, verificamos que para órbitas fechadas β deve ser um número racional. No entanto, como podemos observar na Fig. 3, se $\beta = \frac{n}{m}$, onde n e m são inteiros (que é

a condição para órbitas fechadas), a trajetória retorna para seu ponto original após m revoluções.

3. Potencial harmônico de Manev

Esta seção é dedicada ao potencial harmônico de Manev. Substituiremos o termo inversamente proporcional ao raio do potencial (1) pelo termo do potencial do oscilador harmônico simples. Esta mudança não é arbitrária, uma vez que nos baseamos no resultado do teorema de Bertrand. Assim, investigaremos se ao substituímos o termo r^{-1} pelo termo do oscilador harmônico simples r^2 no potencial de Manev, encontraremos órbitas fechadas assim como no potencial de Manev. Partimos do potencial harmônico de Manev

$$V_{HM}(r) = \frac{kr^2}{2} + \frac{3B}{2c^2r^2}. \quad (20)$$

Para obter a equação da órbita, calculamos a Eq. (9) com o potencial acima. Este procedimento nos leva a

$$\frac{d^2u_{HM}}{d\phi^2} + \beta^2 u_{HM} = \frac{\Gamma}{u_{HM}^3}, \quad (21)$$

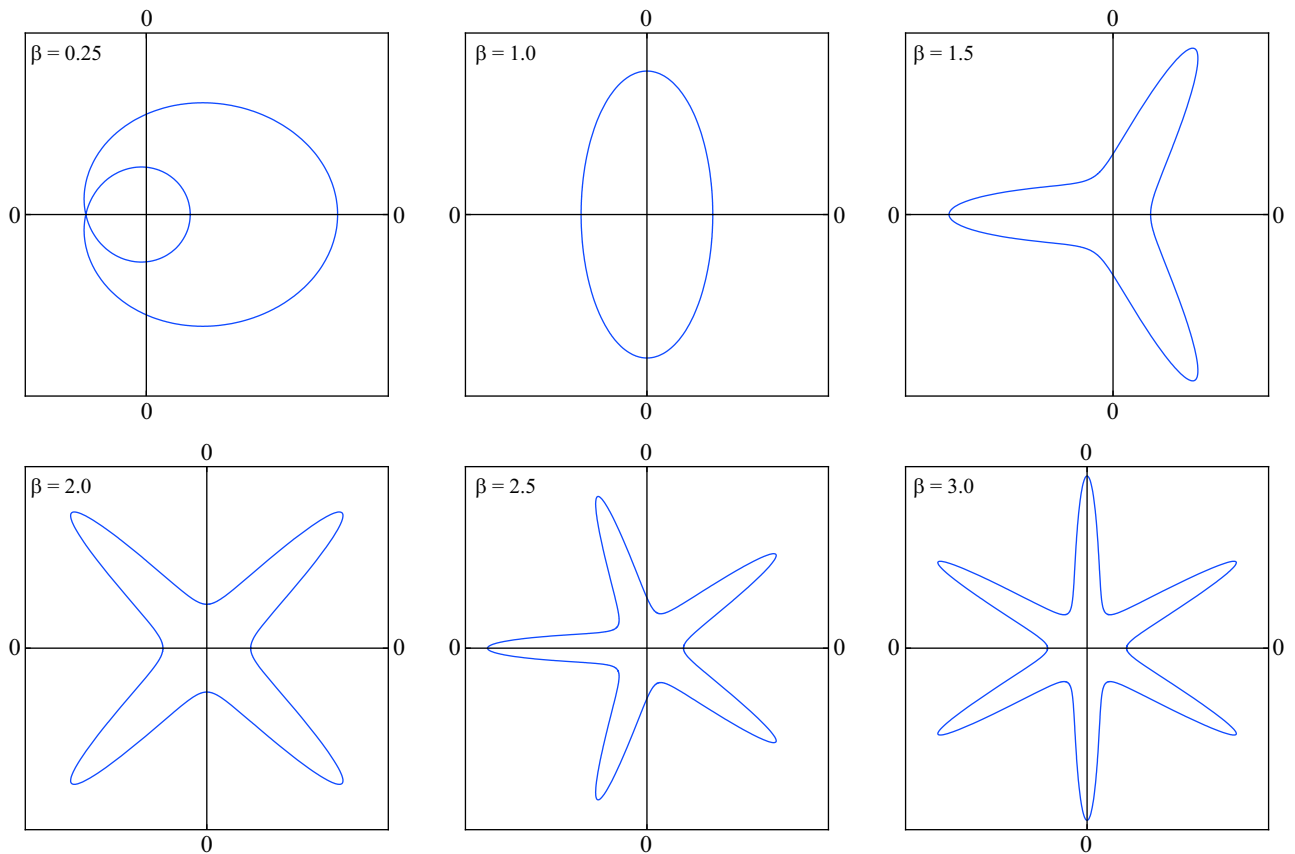


Figura 3 - Órbitas para vários valores racionais de β para o potencial harmônico de Manev. Os valores para ϵ foram convenientemente escolhidos em cada trajetória.

onde $\Gamma = k/l_\phi^2$ e $\beta^2 = 1 + 3B/c^2 l_\phi^2$. Como já conhecemos as soluções no caso do potencial original de Manev nos restringiremos a analisar o caso $\beta^2 > 0$. Assim, resolvendo esta equação para $u(\phi)$, obtemos

$$\frac{1}{u_{HM}(\phi)} = r_{HM}(\phi) = \frac{\beta}{\sqrt{1 + \epsilon \cos(2\beta\phi)}}. \quad (22)$$

Seguindo a análise na segunda seção, estudaremos as condições para a estabilidade das órbitas neste caso. Para o ângulo apsidal Ψ_{HM} encontramos

$$\Psi_{HM} = \frac{\pi}{2\beta}. \quad (23)$$

Neste caso, órbitas fechadas são permitidas desde que β assumam valores racionais. Mostramos diferentes órbitas para o potencial harmônico de Manev V_{HM} na Fig. 3.

4. Potencial newtoniano somado ao potencial do oscilador harmônico simples

Nas duas seções anteriores encontramos órbitas fechadas para o potencial de Manev e para o potencial harmônico de Manev desde que o momento angular assumam valores restritos. A condição necessária para a existência de órbitas fechadas é muito simples. Basta que o parâmetro β seja um número racional. Do teorema de Bertrand sabemos que o potencial Newtoniano e o oscilador harmônico simples produzem órbitas

fechadas. Temos até agora, que os mesmos potenciais tratados no teorema de Bertrand também produzem órbitas fechadas quando adicionamos a eles um termo proporcional a r^{-2} . Basta saber agora se os potenciais Newtoniano e harmônico simples atuando simultaneamente produzem órbitas fechadas também. Consideramos então o potencial V_3

$$V_3(r) = \frac{A}{r} + \frac{kr^2}{2}. \quad (24)$$

Com este potencial a solução da Eq. (9) é uma integral elíptica⁴

$$\int \frac{u_3 du_3}{\sqrt{-u_3^4 + pu_3^3 + qu_3^2 + s}} = \phi, \quad (25)$$

onde $s = k/l_\phi^2$, q é uma constante e $p = -2A/l_\phi^2$. Este tipo de integral é bem conhecida na literatura [18]. Para facilitar a sua resolução é importante definir a seguinte expressão integral

$$I_s = \int x^s y^{-1} dx, \quad (26)$$

onde $y^2 = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$. Se integramos as derivadas de yx^s obtemos uma fórmula de recorrência

$$(s+2)a_0I_{s+3} + \frac{1}{2}a_1(2s+3)I_{s+2} + a_2(s+1)I_{s+1} + \frac{1}{2}a_3(2s+1)I_s + sa_4I_{s-1} = x^s y. \quad (27)$$

Inserindo a definição (26) para $s = 0, 1, 2, 3$ e 4 na fórmula de recorrência acima (27) obtemos para I_1

$$I_1 = \frac{(x-1)xy}{3a_0x^4 + \left(\frac{5a_1}{2} - 12a_0\right)x^3 + \left(2a_2 - \frac{15a_1}{2}\right)x^2 + \left(\frac{3a_3}{2} + 4a_2\right)x + \left(a_4 - \frac{3a_3}{2}\right)}. \quad (28)$$

Calculando a integral no lado esquerdo da Eq. (25), obtemos a equação para a órbita para o potencial V_3 . A integral para $s = 1$ na relação (26) é similar a integral na Eq. (25). Substituindo a expressão para y em (28) temos o seguinte resultado para (25)

$$\frac{(x-1)x\sqrt{-x^4 + dx^3 + cx^2 + a}}{-3x^4 + \left(\frac{5d}{2} + 12\right)x^3 + \left(2c - \frac{15d}{2}\right)x^2 + 4cx + a} = \phi. \quad (29)$$

Lembrando que $u \propto x$, o resultado acima nos fornece justamente a órbita para o caso do potencial V_3 . A Fig. 4 mostra o comportamento para esta órbita e revela que não obtemos uma órbita fechada. A órbita mostrada na Fig. 4 representa apenas uma das quatro possíveis soluções para $u(\phi)$ ($u \propto x$) na Eq. (29). As outras soluções possuem o mesmo comportamento e também não descrevem órbitas fechadas.

⁴ u_3 é a equação da trajetória para o potencial V_3 .

5. Conclusões

O potencial de Manev representa uma alternativa clássica de se reproduzir os resultados da relatividade geral no domínio da mecânica celeste. Neste trabalho nos concentramos em verificar as condições que levam à existência de órbitas fechadas. Nossa análise do potencial de Manev confirmou resultados já encontrados na literatura [15]. Partimos então para a construção do potencial harmônico de Manev. Ao substituirmos o termo Newtoniano pelo oscilador harmônico no potencial (1) temos em mente o resultado do teorema de Bertrand. Assim, para este novo potencial encontramos condições similares para a existência de órbitas fechadas às encontradas no potencial original de Manev. Em ambos os casos, estas condições estão associadas a valores restritos do momento angular.

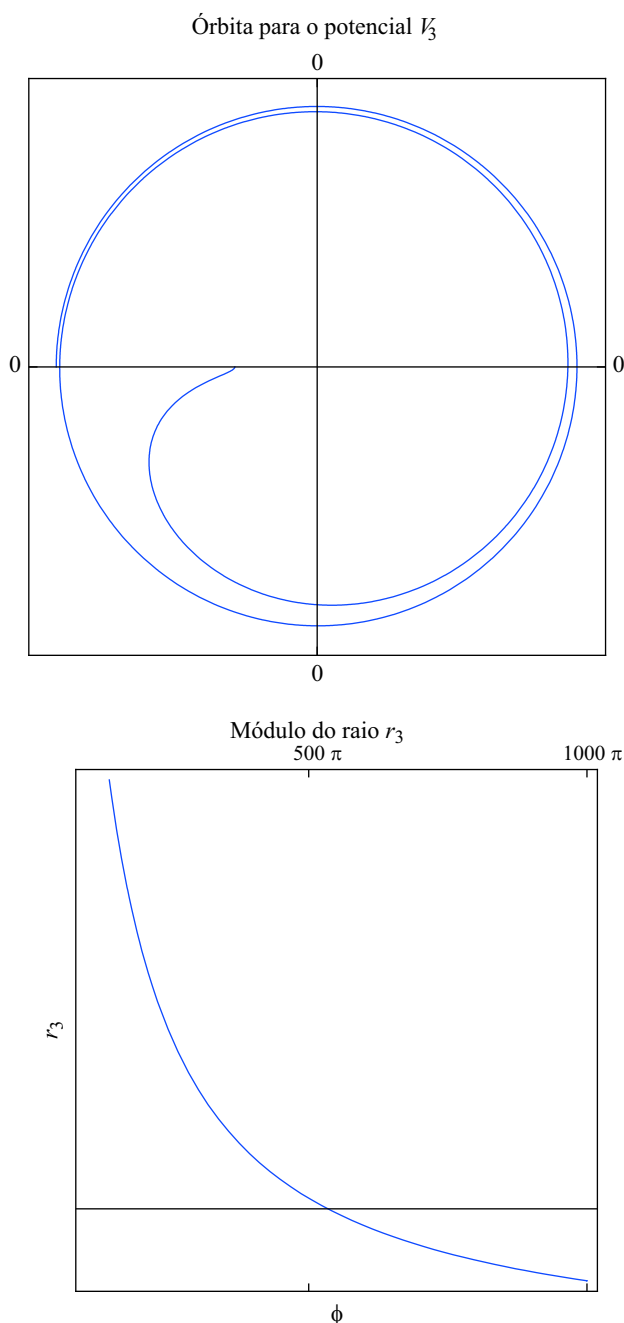


Figura 4 - No quadro superior mostramos duas revoluções ($0 < \phi < 4\pi$) para a órbita resultante do potencial V_3 . O quadro inferior mostra o módulo do raio r_3 .

Devemos ter em mente que não apenas na mecânica quântica existe a discretização dos valores assumidos para quantidades como energia e momento angular, mas são também vastas as situações onde encontramos os mesmos tipos de restrições na mecânica clássica, como por exemplo em sistemas oscilantes. Para uma exposição sobre a existência destas situações em mecânica clássica, consultar [19].

O potencial harmônico de Manev que foi construído na terceira seção representa apenas uma correção no potencial para o oscilador harmônico simples e por esta razão todo sistema físico que é estudado através

da dinâmica do oscilador harmônico simples pode ser reestudado através do potencial harmônico de Manev em busca de novos resultados. Além do que, como o teorema de Bertrand cobre apenas situações onde o potencial contém apenas um termo, seria interessante verificar uma extensão deste teorema para casos onde o potencial é composto por dois ou mais termos.

Outro ponto que devemos ressaltar é que verificamos, escrevendo e resolvendo a equação de trajetória para o potencial $V_R \propto (1/r + 1/r^3)$, que é o potencial resultante no limite de campo fraco da relatividade geral, a não existência de soluções que contemplem órbitas fechadas, para qualquer valor do momento angular.

Por fim, construímos o potencial V_3 motivados pelo resultado do teorema de Bertrand. Em um único potencial, reunimos os termos Newtoniano e harmônico simples. Separadamente, estes termos produzem órbitas fechadas o que não necessariamente significa que juntos forneceram o mesmo resultado. E foi exatamente isto que encontramos na quarta seção. As órbitas para o potencial V_3 são sempre abertas e não podem corresponder a trajetórias ligadas.

6. Agradecimentos

Gostaríamos de agradecer a J.C. Fabris e W. Zimdahl pela leitura deste manuscrito e por valiosas sugestões. O trabalho de H.E.S. Velten é financiado pelo CNPq.

Referências

- [1] I. Newton *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Royal Society, London, 1687). Traduzido para o Inglês por A. Motte e revisado por F. Cajori (University of California Press, Berkeley, 1962).
- [2] H. Goldstein, *Classical Mechanics* (Addison Wesley, Nova York, 1981); J.V. José and E.J. Saletan, *Classical Dynamics - A Contemporary Approach* (Cambridge University Press, Cambridge, 1998).
- [3] L. Landau and E.M. Lifshitz, *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory* (Oxford Univ. Press, Oxford, 1975).
- [4] I.A. Ivanov, *J. Phys. A: Math. Gen.* **29**, 3203 (1996).
- [5] J. Bertrand, *C. R. Acad. Sci Paris* **77**, 849 (1873).
- [6] D.F. Greenberg, *Am. J. Phys.* **34**, 1101 (1966); V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (Springer-Verlag, Nova York, 1978).
- [7] Y. Tikochinsky, *Am. J. Phys.* **56**, 1073 (1988); L.S. Brown, *Am. J. Phys.* **46**, 930 (1978); Y. Zarmi, *Am. J. Phys.* **70**, 446 (2002).
- [8] G. Manev, *C. R. Acad. Sci. Paris* **178**, 2159 (1924); G. Manev, *Z. Phy.* **31**, 786 (1925); G. Manev, *C. R. Acad. Sci. Paris* **190**, 963 (1930); G. Manev, *C. R. Acad. Sci. Paris* **190**, 1374 (1930).
- [9] F.N. Diacu, V. Mioc and C. Stoica, *Nonlinear Analysis* **41**, 1029 (2000).
- [10] V. Ureche, *Rom. Astron. J.* **5**, 145 (1995).

- [11] E.A. Lacomba, J. Llibre and A. Nunes, *The Geometry of Hamiltonian Systems* (Springer-Verlag, Nova York, 1991).
- [12] J.C. Fabris e F.E.M. da Silveira, *Revista Brasileira do Ensino de Física* **12**, 26 (1990).
- [13] H.E.S. Velten, *Revista Brasileira do Ensino de Física* **30**, 3314 (2008).
- [14] L. Randall and R. Sundrum, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4690 (1999); L. Randall and R. Sundrum, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3370 (1999); L. Randall and R. Sundrum, *Nucl. Phys. B* 557, **79** (1999).
- [15] V. Mioc and C. Stoica, *Baltic Astronomy* **6**, 637-650 (1997).
- [16] S. Chandrasekhar, *Newton's Principia for the Common Reader* (Oxford University Press, Oxford, 1995).
- [17] K. Watari, *Mecânica Clássica* (Editora Livraria da Física, São Paulo, 2001) .
- [18] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover Publications, Nova York, 1965).
- [19] M. Gutzwiller, *J. Math. Phys.* **12**, 3 (1971).