

Alguns estudos de fluxo de fluido utilizando software gráfico

(Some fluid flow investigations using graphical software)

Edvaldo Lima da Silva¹, Aguinaldo Robinson de Souza² e Emília Mendonça Rosa Marques³

¹Programa de Pós-graduação em Ciência e Tecnologia de Materiais, Universidade Estadual Paulista, Bauru, SP, Brasil

²Departamento de Química, Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Paulista, Bauru, SP, Brasil

³Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Paulista, Bauru, SP, Brasil

Recebido em 12/3/2009; Aceito em 10/4/2009; Publicado em 22/9/2009

Analisamos alguns modelos de fluxo de fluido utilizando o software gráfico $F(C)$: *Funções Complexas*. Descrevemos as equações que expressam o potencial complexo, bem como a velocidade complexa para cada modelo. Os modelos estudados são fluxo uniforme, com fonte, com sumidouro, composto, circular e com obstáculo. Apresentamos o conceito de Domínio de Cores e o mecanismo de leitura dos gráficos. Cada modelo é apresentado de forma exemplificada, incluindo representações geométricas das curvas de fluxo e equipotenciais, bem como os gráficos do potencial complexo e velocidade complexa.

Palavras-chave: fluxo de fluido, funções complexas, software gráfico.

We review some models of fluid flow using the graphical software $F(C)$: *Complex Functions*. We explain the equations that describe the complex potential as well the complex velocity for each model. The studied models are uniform, source and sink flows, superposition of flow and flow around circular obstacle. We present the concept of Color Domain and the way to read a graph. Examples are given for each model, including geometric representations of equipotential lines and streamlines, as well complex potential and velocity graphs.

Keywords: fluid flow, complex functions, graphical software.

1. Introdução

A solução de alguns problemas no estudo de fluxo de fluido como, por exemplo, dinâmica de fluidos, hidrodinâmica e aerodinâmica, pode ser encontrada a partir da utilização de métodos de variáveis complexas [1, 2].

Neste trabalho propomos uma interpretação gráfica para alguns modelos de fluxo de fluido que podem ser mais bem compreendidos e explorados através do uso do software $F(C)$: *Funções Complexas*.

Explorações gráficas de fenômenos modelados por métodos de variáveis complexas já são realizadas de modo a estender a compreensão de situações complexas e abstratas [3, 4].

Sendo assim, propomos algumas análises de modelos de fluxo de fluido, tendo como base a representação gráfica através da técnica denominada Domínio de Cores. Apresentaremos argumentos e resultados que demonstrem o auxílio na compreensão desses fenômenos.

2. Apresentação do problema

Algumas suposições básicas são aplicadas na elaboração dos modelos aqui tratados. Observamos um sistema de fluxo em duas dimensões, cuja extensão para o espaço é feita a partir de um conjunto de planos paralelos, em que as características do movimento do fluido e o padrão do fluxo são sempre iguais.

O fluxo é estacionário, ou seja, a velocidade do fluido é independente do tempo. Os componentes da velocidade são obtidos através da descrição do seguinte potencial complexo

$$\Omega(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y), \quad (1)$$

onde a função $\Phi(x, y)$ denota a função potencial de velocidade que quando igualada a uma constante ($\Phi(x, y) = \alpha$) indica pontos que possuem mesmo potencial (curvas equipotenciais). $\Psi(x, y)$ é a função de fluxo, que representa o caminho real das partículas do fluido no modelo de fluxo (a igualdade $\Psi(x, y) = \beta$ indica cada caminho possível que o fluido percorre) e $i = \sqrt{-1}$ representa a unidade imaginária.

O fluido é considerado incompressível, onde há conservação da densidade. Também não apresenta viscosi-

²E-mail: arobinso@fc.unesp.br.

dade, é um fluido ideal (o movimento de um fluido viscoso tende a aderir na superfície de um obstáculo localizado em seu caminho).

A função potencial complexo ($\Omega(z)$) fornece informações que caracterizam o modelo de fluxo. A partir desta, é possível obter a velocidade complexa (V) através da conjugação da derivada da função potencial [1]

$$V = \overline{\Omega'(z)}. \quad (2)$$

A velocidade complexa é composta pela sua magnitude ou módulo ($|\overline{\Omega'(z)}|$) e pela direção. Uma observação importante a ser destacada no modelo de fluxo de fluido é a de pontos de estagnação, como o próprio nome sugere, pontos em que a velocidade do fluxo é nula ($|\overline{\Omega'(z)}| = 0$).

A função potencial complexo (assim como a função velocidade complexa) é definida no conjunto dos números complexos, ou seja, $\Omega : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, com domínio e contradomínio subconjuntos de \mathbb{C} .

Se um elemento z do domínio da função Ω pode ser expresso em termos de uma soma de números reais, $z = x + yi$ com x e $y \in \mathbb{R}$, e o elemento correspondente $\Omega(z) = w$ do contradomínio (ou imagem) da função Ω também, $w = a + bi$ com a e $b \in \mathbb{R}$, então uma representação gráfica plausível deverá relacionar x , y , a e b .

Considerando ainda que cada dimensão real (eixo orientado) pode ser associada a uma variável real (x , y , a e b), são necessários 4 eixos para representar a relação entre estas variáveis.

Como alternativa, utilizaremos o conceito de domínio de cores para representar e interpretar alguns modelos de fluxos nas condições inicialmente apresentadas.

3. Domínio de cores para funções de uma variável complexa

Chamamos de Mapa do Plano Complexo uma distribuição de cores num plano em que cada ponto desse plano (cada número complexo) pode ser identificado por sua respectiva cor (Fig. 1 (b)).

Neste Mapa cada ponto do plano possui uma única cor (a menos da limitação humana de distinção) e, mais importante, cada cor aparece para apenas um único ponto, ou número complexo. Se dois números complexos são diferentes, as cores associadas a estes números também o serão. Existem, nessa distribuição, duas variações de cores perceptíveis: a angular (variação da composição da cor) e a modular (tonalidades claras e escuras). As variações angulares se dão em torno da origem e as distâncias, em relação a origem. Este comportamento coincide com uma característica dos números complexos: argumento e módulo, sendo então melhor observada utilizando a representação polar ($z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$) [4].

Assim, ao nos referirmos ao número $1 + 0i$ (ou a posição $(1, 0)$), por exemplo, estaremos utilizando a cor vermelha na tonalidade em que a distribuimos no Mapa (Fig. 1 (b)). Para representar o número $0 + 0i$ (ou a posição $(0, 0)$), utilizaremos a cor preta. E assim sucessivamente.

O conceito mais importante nessa representação é o de que a cor toma lugar do número complexo, e conseqüentemente, da posição. Essa substituição é bem proposital, uma vez que posição, enquanto representação, possui dimensão, ou seja, ocupa lugar no espaço. Já a cor, em termos menos rigorosos e imprecisos, não ocupa espaço físico. Um plano colorido não terá mais dimensões do que outro sem cores.

O gráfico de uma função de variável complexa (Fig. 1 (a)) é representado da seguinte forma: é uma representação colorida em duas dimensões em que as posições cartesianas no gráfico representam os elementos do domínio (z) e as cores representam os elementos do conjunto imagem (w) da função. Cada ponto no plano possui uma cor associada, e é essa associação que distingue uma função de outra. Para cada função haverá uma associação única entre pontos e cores no gráfico [5].

No entanto, é necessário atribuir um significado numérico em \mathbb{C} , para as cores. Para isso, há o suporte do Mapa do Plano Complexo (Fig. 1 (b)), cujo papel é o de auxiliar o usuário no processo de tradução de cor para número complexo. Cada gráfico precisa de um Mapa para que haja significado. Para os estudos aqui tratados, utilizaremos inicialmente o Mapa apresentado na Fig. 1 (b).

A Fig. 1 mostra um esquema típico de leitura de gráficos gerados pelo domínio de cores.

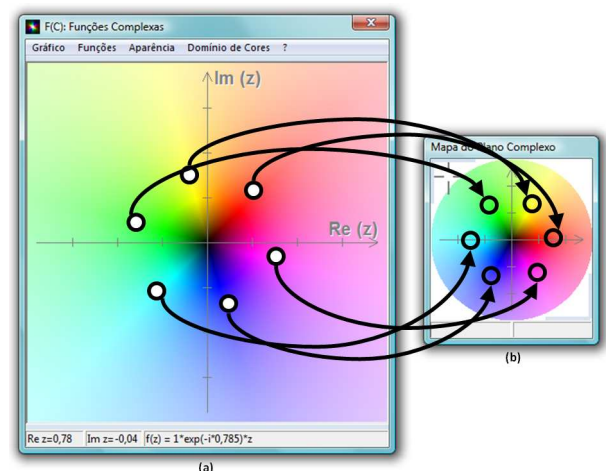


Figura 1 - (colorida na versão eletrônica) Leitura do gráfico da função $\Omega(z) = V_0 e^{-i\theta} z$, para $V_0 = 1$ e $\theta = \pi/4$, utilizando o domínio de cores.

Os gráficos aqui utilizados foram gerados a partir do software *F(C): Funções Complexas*, desenvolvido pelos autores e disponível gratuitamente no endereço <http://wwp.f.c.unesp.br/~edvaldo> [6].

4. Fluxo uniforme

O modelo mais elementar de fluxo é o uniforme sem obstáculo, representado na Fig. 2. Nesse fluxo, o fluido se move a uma velocidade constante V_0 , cujo sentido define um ângulo θ com a direção positiva do eixo x .

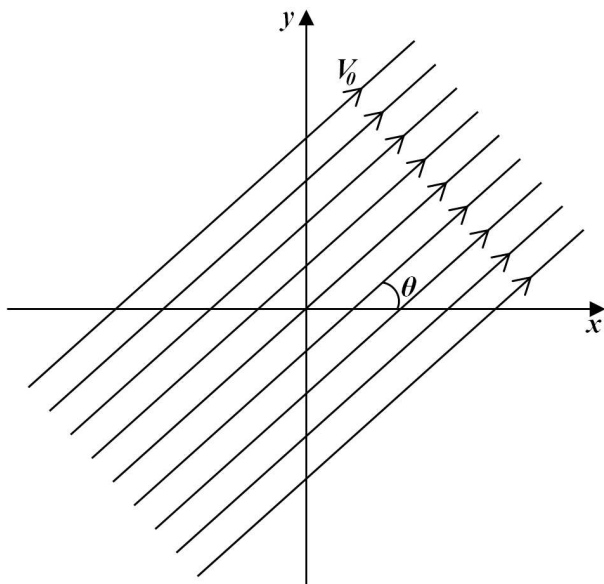


Figura 2 - Representação geométrica planar do fluxo com velocidade constante V_0 e ângulo de inclinação θ com o sentido positivo do eixo x .

O potencial complexo para o fluxo apresentado na Fig. 2 é dado por $\Omega(z) = V_0 e^{-i\theta} z$, onde podemos verificar trigonometricamente a relação entre as componentes da velocidade complexa

$$V = V_x + iV_y = V_0 \cos \theta + iV_0 \sin \theta = V_0 e^{i\theta}.$$

Pela Eq. (2), temos

$$\begin{aligned} V &= \overline{\Omega'(z)} = V_0 e^{i\theta}, \\ \Omega'(z) &= V_0 e^{-i\theta}, \\ \Omega(z) &= V_0 e^{-i\theta} z, \end{aligned}$$

desconsiderando a constante de integração.

O gráfico da função potencial complexo ($\Omega(z)$) é o mostrado na Fig. 1 (a). Note que é evidente a rotação das cores em torno da origem do sistema de coordenadas, associada ao valor $\theta = \pi/4$ da equação (sentido anti-horário).

Nesse modelo, a velocidade potencial é constante, já que $\Omega'(z) = V_0 e^{-i\theta}$.

5. Fluxo com fonte

O potencial complexo do modelo de fluxo com fonte é dado por

$$\Omega(z) = k \ln(z - a), \tag{3}$$

com $k \in \mathbb{R} | k > 0$ e $a \in \mathbb{C}$, onde k é a intensidade da fonte e a é o ponto de localização da fonte. Consideramos que o fluido está emergindo a uma taxa constante.

Na Fig. 3 representamos as curvas do fluxo (caminho das partículas do fluido) com linhas preenchidas e as curvas equipotenciais (mesmo potencial de velocidade) com linhas tracejadas

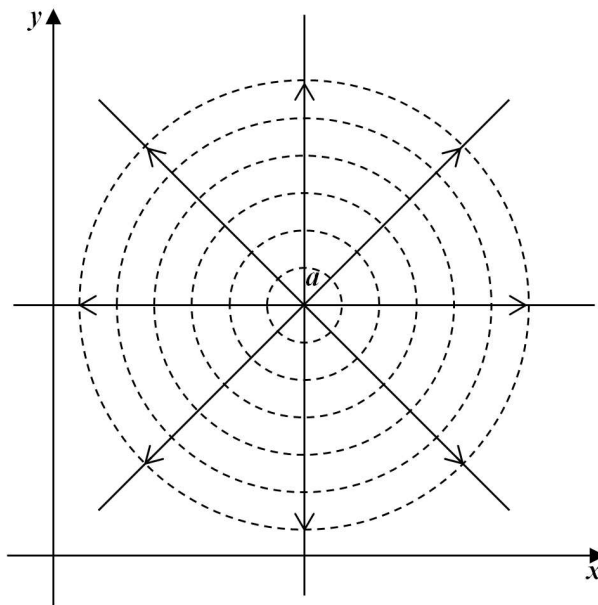


Figura 3 - Representação geométrica planar do fluxo emergindo da fonte no ponto a em taxa constante.

A Fig. 4 apresenta o gráfico do potencial complexo para um caso exemplificado ($\Omega(z) = \ln(z - (1 + i))$). É possível observar que há uma descontinuidade da função determinada por $z = x + i$, com $x \leq 1$ (mudança brusca da cor amarelo claro para magenta claro). Nessa mesma região, há uma indeterminação que pode ser verificada algebricamente

$$\begin{aligned} \Omega(x + i) &= \ln(x + i - (1 + i)), \\ \Omega(x + i) &= \ln(x + i - 1 - i), \\ \Omega(x + i) &= \ln(x - 1), \end{aligned}$$

sendo $\ln(x - 1)$, com $x \in \mathbb{R}$, uma função real definida apenas para $x > 1$.

A porção preta ao redor do ponto $(2, 1)$ indica que o valor da função é, ou está próximo de, zero. Para verificar fazemos

$$\begin{aligned} \Omega(2 + i) &= \ln(2 + i - (1 + i)), \\ \Omega(2 + i) &= \ln(2 + i - 1 - i), \\ \Omega(2 + i) &= \ln(1), \\ \Omega(2 + i) &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, $2+i$ é raiz da função $\Omega(z) = \ln(z-(1+i))$. De forma similar, é possível verificar que $z = a + 1$ é a solução para a Eq. (3)

$$\begin{aligned}\ln(z-a) &= 0, \\ e^0 &= z-a, \\ 1 &= z-a, \\ z &= a+1.\end{aligned}$$

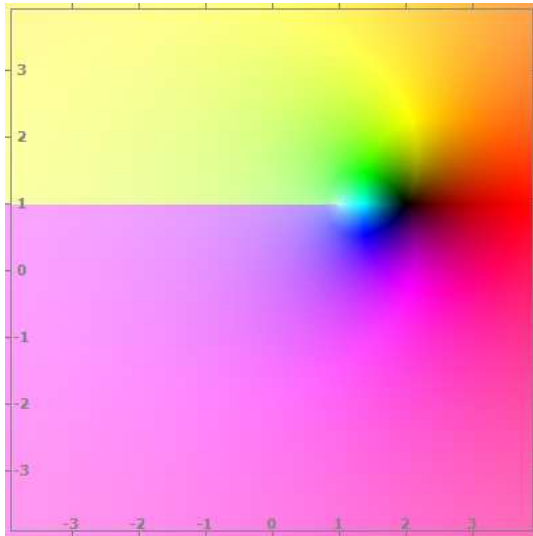


Figura 4 - (colorida na versão eletrônica) Gráfico de $\Omega(z) = k \ln(z-a)$, com $k = 1$ e $a = 1 + i$.

A velocidade complexa desse modelo de fluxo é dada por

$$\overline{\Omega'(z)} = \text{conj} \left(\frac{k}{z-a} \right), \quad (4)$$

com $k \in \mathbb{R} | k > 0$ e $a \in \mathbb{C} | a \neq z$.

A Fig. 5 representa o gráfico da velocidade complexa para o fluxo com fonte no ponto $a = 1 + i$ e $k = 1$. Através desse gráfico, percebe-se que as cores claras estão próximas ao ponto $(1, 1)$, centro da fonte, indicando valores cujo módulo é de valor grande.

A preservação das tonalidades de cores ao longo das direções radiais em consonância com a disposição no Mapa do Plano Complexo (Fig. 1 (b)) indica que não há mudança de direção do escoamento. Podemos verificar

$$\overline{\Omega'(z)} = \text{conj} \left(\frac{1}{z-(1+i)} \right).$$

Fazendo $w = z - (1 + i)$, temos

$$\begin{aligned}\overline{\Omega'(w+1+i)} &= \text{conj} \left(\frac{1}{w} \right), \\ \overline{\Omega'(w+1+i)} &= \text{conj} \left(\frac{1}{w} \right) \left(\frac{\bar{w}}{\bar{w}} \right), \\ \overline{\Omega'(w+1+i)} &= \text{conj} \left(\frac{\bar{w}}{|w|^2} \right), \\ \overline{\Omega'(w+1+i)} &= \frac{w}{|w|^2}.\end{aligned}$$

Utilizando a forma polar, $w = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, com $r = |w|$ e $\theta = \arctan \left(\frac{\text{Im}(w)}{\text{Re}(w)} \right)$, chegamos a

$$\begin{aligned}\overline{\Omega'(w+1+i)} &= \frac{r(\cos \theta + i \sin \theta)}{r^2}, \\ \overline{\Omega'(w+1+i)} &= r^{-1}(\cos \theta + i \sin \theta),\end{aligned}$$

onde é plausível perceber a inversão no módulo (r^{-1}) e deslocamento: para cada ponto $w + 1 + i$ tem-se a imagem w , com módulo invertido.

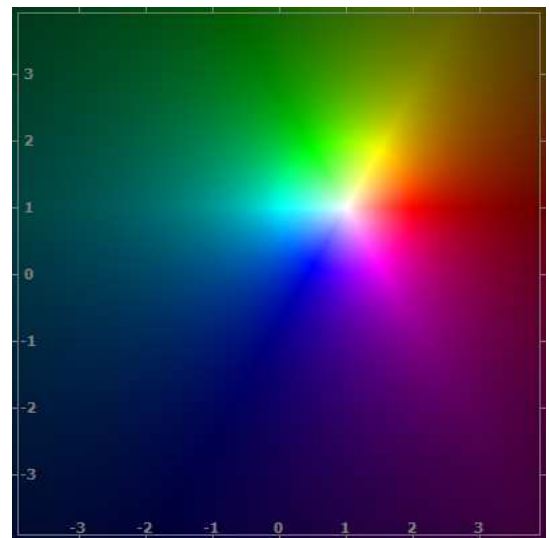


Figura 5 - (colorida na versão eletrônica) Gráfico de $\overline{\Omega'(z)} = \text{conj} \frac{k}{z-a}$, com $k = 1$ e $a = 1 + i$.

6. Fluxo com sumidouro

Similar ao modelo anterior, o potencial complexo do modelo de fluxo com sumidouro é dado por

$$\Omega(z) = -k \ln(z-a), \quad (5)$$

com $k \in \mathbb{R} | k > 0$ e $a \in \mathbb{C}$, onde k é a intensidade da fonte e a é o ponto de localização do sumidouro.

As curvas de fluxo e equipotenciais são representadas na Fig. 6.

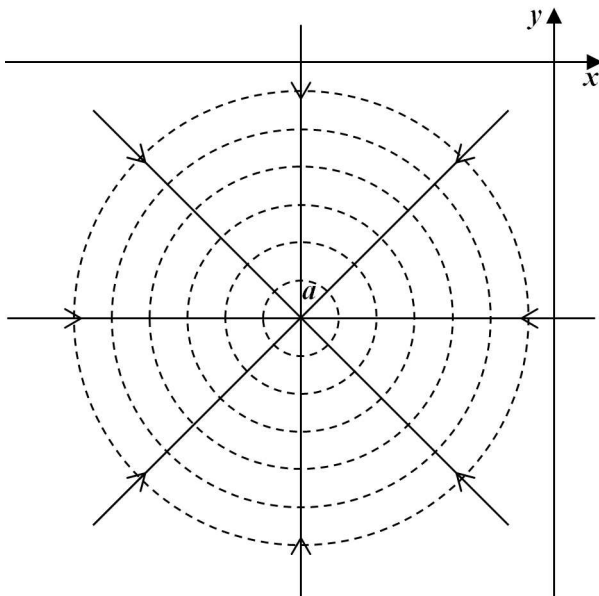


Figura 6 - Representação geométrica planar do fluxo desaparecendo do sumidouro no ponto a em taxa constante.

Podemos analisar o potencial complexo do caso representado na Fig. 7 de modo análogo ao modelo anterior. Existe descontinuidade e indeterminação para $z = x - i$, com $x \leq 1$.

O ponto $(0, -1)$ é raiz da função, já que $\Omega(0 - i) = -\ln(0 - i - (-1 - i)) = -\ln(1) = 0$.

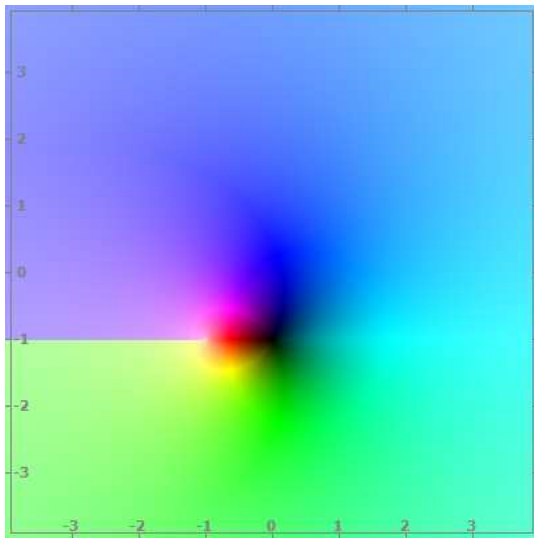


Figura 7 - (colorida na versão eletrônica) Gráfico de $\Omega(z) = -k \ln(z - a)$, com $k = 1$ e $a = -1 - i$.

A velocidade complexa é dada por

$$\overline{\Omega'(z)} = \text{conj} \left(\frac{-k}{z - a} \right), \tag{6}$$

com $k \in \mathbb{R} | k > 0$ e $a \in \mathbb{C} | a \neq z$.

Na Fig. 8 o entorno do ponto $(-1, -1)$, centro do sumidouro, indica valores cujo módulo é de magnitude grande. Percebe-se que desta vez as cores estão em posições contrárias ao centro do sumidouro, indicando

uma inversão de sentido do fluxo (basta associar cada cor como um vetor direção associado).

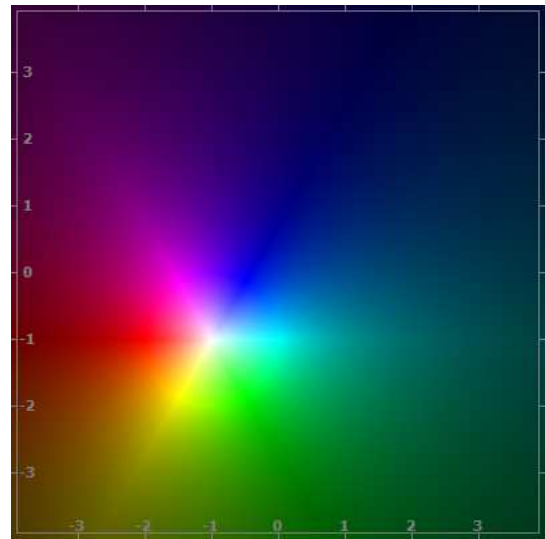


Figura 8 - (colorida na versão eletrônica) Gráfico de $\overline{\Omega'(z)} = \text{conj} \frac{-k}{z - a}$, com $k = 1$ e $a = -1 - i$.

7. Fluxo composto

Esse modelo combina os dois tipos de fluxos anteriores. O potencial complexo é dado por

$$\Omega(z) = k \ln \left(\frac{z - a}{z - b} \right), \tag{7}$$

com $k \in \mathbb{R} | k > 0$, $a \in \mathbb{C}$ e $b \in \mathbb{C}$, onde a é o ponto de localização da fonte e b o ponto do sumidouro.

É admissível deduzir essa função a partir da composição das Eqs. (3) e (5)

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= [k \ln(z - a)] + [-k \ln(z - b)], \\ \Omega(z) &= k[\ln(z - a) - \ln(z - b)], \\ \Omega(z) &= k \ln \left(\frac{z - a}{z - b} \right). \end{aligned}$$

Na Fig. 9 representamos este modelo composto pela fonte e sumidouro.

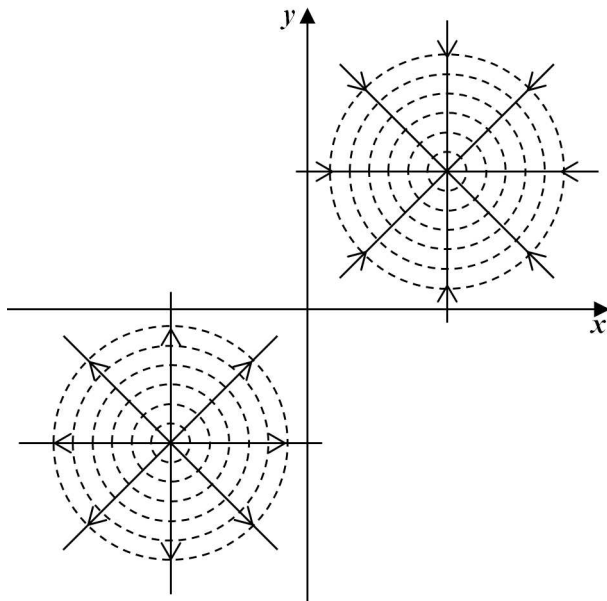


Figura 9 - Representação geométrica planar do fluxo composto por uma fonte e um sumidouro em taxa constante.

Para os gráficos das Figs. 10 e 11 utilizamos $k = 1$, $a = 1 + i$ e $b = -1 - i$.

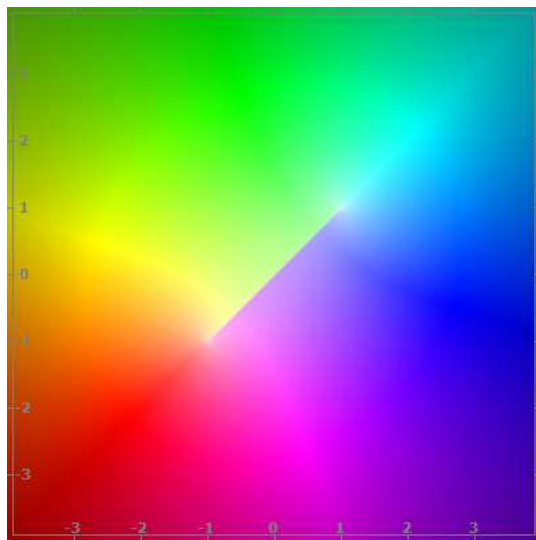


Figura 10 - (colorida na versão eletrônica) Gráfico de $\Omega(z) = k \ln \frac{z-a}{z-b}$, com $k = 1$ e $a = 1 + i$.

O gráfico do potencial complexo (Fig. 10) mostra uma descontinuidade no segmento formado pelos centros do fluxo e sumidouro. Analisando algebricamente essa região ($z = x + xi$, $-1 \leq x \leq 1$), temos

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= \ln \left(\frac{z - (1 + i)}{z - (-1 - i)} \right), \\ \Omega(x + xi) &= \ln \left(\frac{x + xi - (1 + i)}{x + xi - (-1 - i)} \right), \\ \Omega(x + xi) &= \ln \left(\frac{x(1 + i) - (1 + i)}{x(1 + i) - (-1 - i)} \right), \\ \Omega(x + xi) &= \ln \left(\frac{x(1 + i) - (1 + i)}{x(1 + i) + (1 + i)} \right), \\ \Omega(x + xi) &= \ln \left(\frac{(1 + i)(x - 1)}{(1 + i)(x + 1)} \right), \\ \Omega(x + xi) &= \ln \left(\frac{x - 1}{x + 1} \right), \\ \Omega(x + xi) &= \ln(x - 1) - \ln(x + 1). \end{aligned}$$

Como $x \in \mathbb{R}$, é necessário que

$$\begin{cases} x - 1 > 0, \\ x + 1 > 0, \end{cases}$$

o que leva a $x > 1$ e $x > -1$ simultaneamente.

A velocidade complexa é esboçada na Fig. 11 e dada por

$$\overline{\Omega'(z)} = \text{conj} \left(\frac{k(a - b)}{(z - b)(z - a)} \right), \tag{8}$$

com $k \in \mathbb{R} | k > 0$, $a \in \mathbb{C}$ e $b \in \mathbb{C} | a \neq z$ e $b \neq z$.

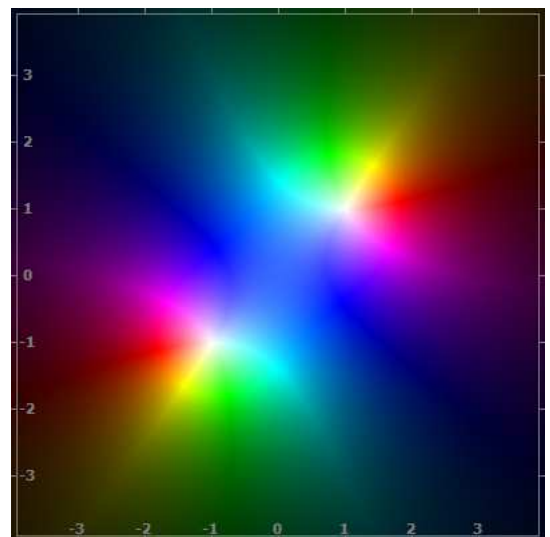


Figura 11 - (colorida na versão eletrônica) Gráfico de $\overline{\Omega'(z)} = \text{conj} \frac{k(a-b)}{(z-b)(z-a)}$, com $k = 1$ e $a = 1 + i$ e $b = -1 - i$.

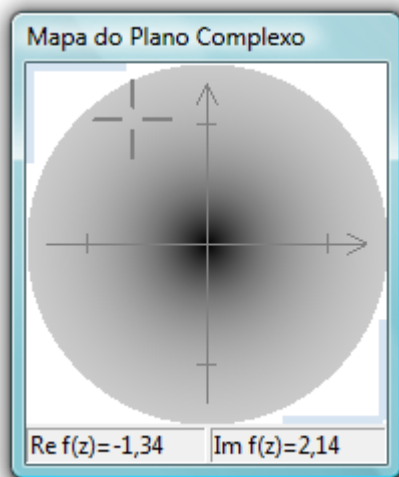


Figura 12 - Mapa do Plano Complexo que destaca apenas o módulo do número complexo.

Destacando apenas o módulo da função velocidade potencial para este modelo (usando agora o Mapa do Plano Complexo ilustrado na Fig. 12), observamos que os valores de maior grandeza (cor mais clara) estão ao longo da região que interliga os centros (Fig. 13).

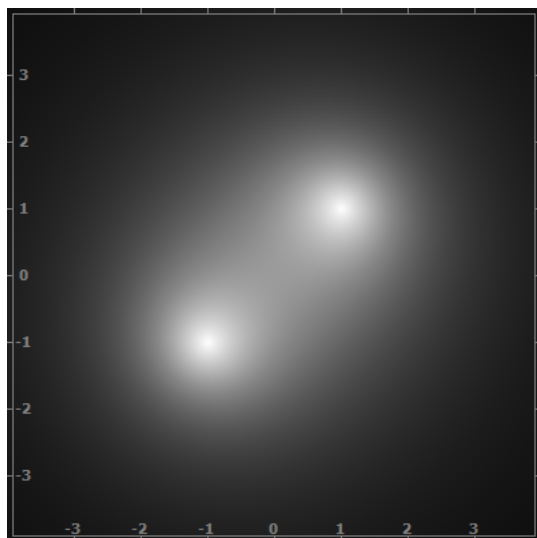


Figura 13 - Gráfico de $\overline{\Omega'(z)} = \text{conj} \frac{k(a-b)}{(z-b)(z-a)}$, com $k = 1$ e $a = 1 + i$ e $b = -1 - i$, destacando apenas o módulo.

8. Fluxo circular

O potencial complexo do fluxo circular é descrito como

$$\Omega(z) = -ik \ln(z - a), \tag{9}$$

com $k \in \mathbb{R} | k > 0$ e $a \in \mathbb{C}$, onde a é centro do fluxo, também chamado de vórtice. Para $k > 0$, temos um movimento no sentido horário e para $k < 0$ um movimento anti-horário. A Fig. 14 apresenta uma representação geométrica do modelo, para $k < 0$.

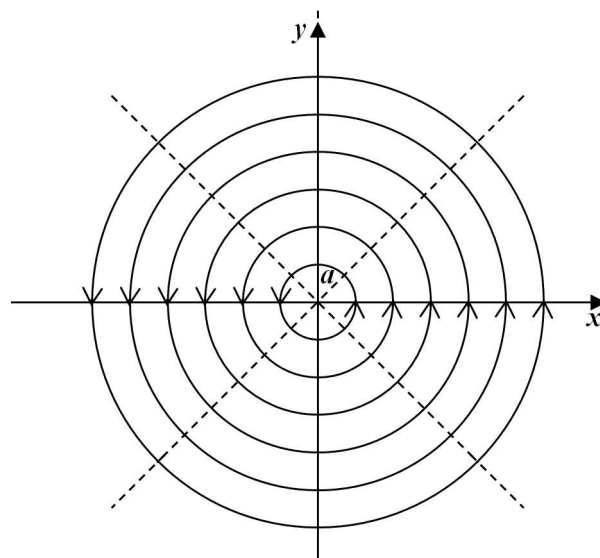


Figura 14 - Representação geométrica planar do fluxo circular anti-horário em torno do ponto a .

Como exemplo, apresentamos, na Fig. 15, um fluxo circular em torno do ponto $a = 0 + 0i$, com $k = 1$.

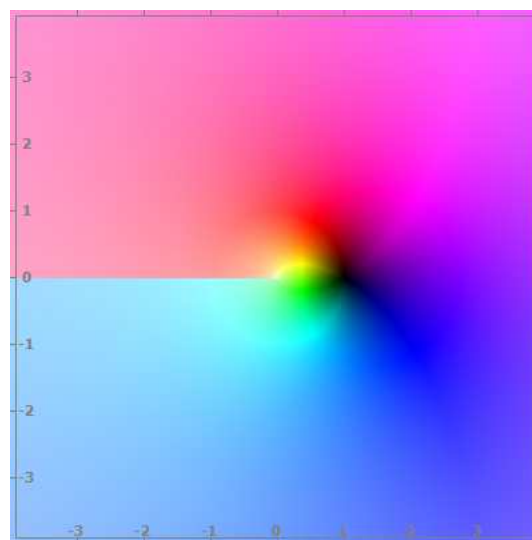


Figura 15 - (colorida na versão eletrônica) Gráfico de $\Omega(z) = -ik \ln(z - a)$, com $k = 1$ e $a = 0 + 0i$.

A indeterminação para $z = x$, com $x \in \mathbb{R} | x < 0$, é evidente. Também é possível notar a possibilidade de $\Omega(1) = 0$ (raiz da função).

A velocidade complexa é dada por

$$\overline{\Omega'(z)} = \text{conj} \left(\frac{-ik}{z - a} \right), \tag{10}$$

com $k \in \mathbb{R} | k > 0$ e $a \in \mathbb{C} | a \neq z$.

Pela análise do gráfico da Fig. 17, observamos que a velocidade complexa tem, além de uma inversão em sua magnitude, uma rotação horária com ângulo de $\pi/2$. Se associarmos cada vetor posição com respectivo vetor cor observamos que a velocidade complexa também indica a direção e sentido do fluxo (Fig. 16).

Também é possível verificar que para $z = 0$ (tonalidade branca em $a = 0 + 0i$) a função velocidade complexa não está definida.

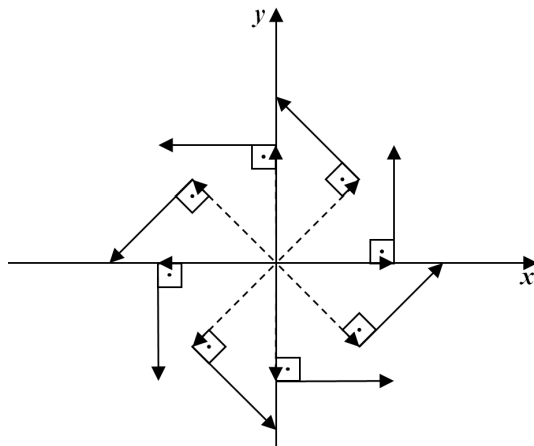


Figura 16 - Esboço de alguns vetores posição (setas pontilhadas) e cores (setas preenchidas) do fluxo circular anti-horário com centro na origem do sistema.

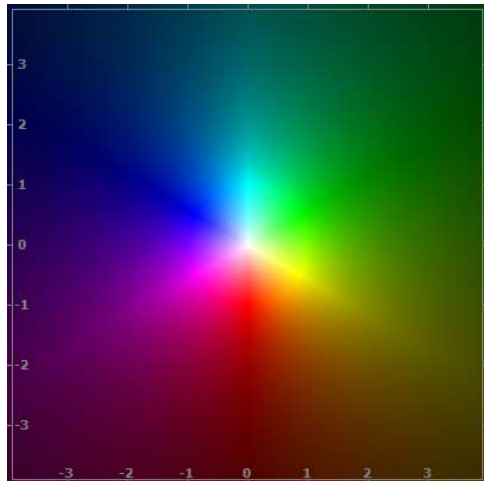


Figura 17 - (colorida na versão eletrônica) Gráfico de $\overline{\Omega'(z)} = \text{conj} \frac{-ik}{z-a}$, com $k = 1$ e $a = 0 + 0i$.

9. Fluxos com obstáculo circular

Introduzindo um obstáculo circular num fluxo uniforme (Fig. 18), obtemos o seguinte potencial complexo

$$\Omega(z) = V_0 \left(z + \frac{a^2}{z} \right), \tag{11}$$

com $V_0 \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, onde V_0 é a velocidade inicial e a é o raio da circunferência que define o obstáculo. Um conhecimento de funções de mapeamentos conformes é frequentemente utilizado para obter o potencial complexo em modelos envolvendo outras formas de obstáculos. A premissa básica é a de que o potencial complexo é definido como $\Omega(z) = V_0 z + G(z)$ onde $\lim_{z \rightarrow \infty} G'(z) = 0$, ou seja, para pontos distantes do

obstáculo o módulo da velocidade complexa tende a V_0 , e que o potencial complexo escolhido é tal que uma das curvas de fluxo representa o contorno do obstáculo [1].

A Fig. 18 ilustra as curvas de fluxo e equipotenciais deste modelo.

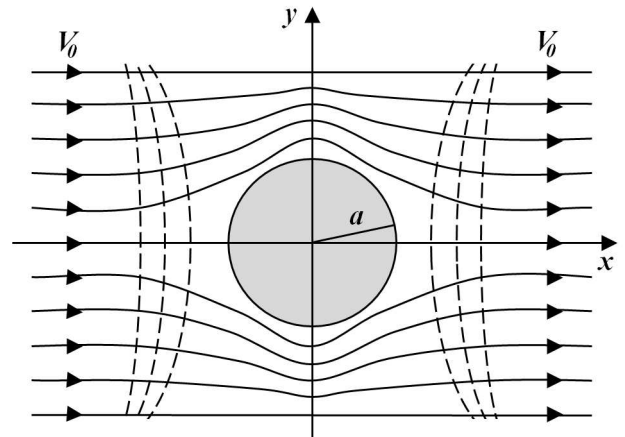


Figura 18 - Representação geométrica planar do fluxo ao redor de um obstáculo circular, de raio a .

No gráfico do potencial complexo (Fig. 19), observamos raízes nos pontos $(0,1)$ e $(0,-1)$.

$$\begin{aligned} \Omega(0,1) &= \left(i + \frac{1}{i} \right) = \frac{i^2 + 1}{i} = \frac{-1 + 1}{i} = \frac{0}{i} = 0, \\ \Omega(0,-1) &= \left(-i + \frac{1}{-i} \right) = \frac{(-i)^2 + 1}{-i} = \frac{-1 + 1}{-i} = \frac{0}{-i} = 0. \end{aligned}$$

A função $\Omega(z) = \left(z + \frac{1}{z} \right)$ não está definida para $z = 0 + 0i$.

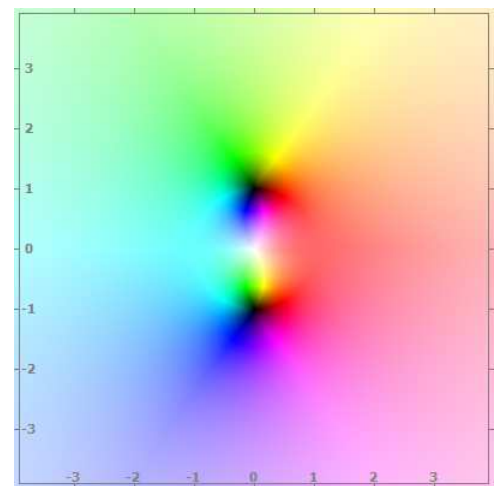


Figura 19 - (colorida na versão eletrônica) Gráfico de $\Omega(z) = V_0 z + \frac{a^2}{z}$, com $V_0 = 1$ e $a = 1$.

A velocidade complexa é definida por

$$\overline{\Omega'(z)} = \text{conj} \left(V_0 \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) \right), \tag{12}$$

com $V_0 \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$.

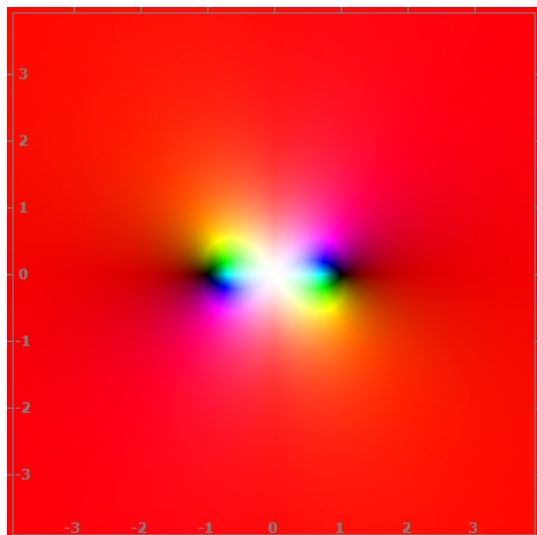


Figura 20 - (colorida na versão eletrônica) Gráfico de $\overline{\Omega'(z)} = \text{conj}(V_0 \cdot 1 - \frac{a^2}{z^2})$, com $V_0 = 1$ e $a = 1$.

Na Fig. 20 ilustramos o exemplo de um obstáculo circular na origem com raio 1 e $V_0 = 1$. Nota-se que há predominância da cor vermelha em toda a região afastada do obstáculo. Através da leitura do Mapa do Plano Complexo (Fig. 1 (b)), podemos associar a cor vermelha ao vetor $(0, 1)$ que indica módulo 1 (V_0) e direção horizontal com sentido para a parte positiva do eixo. As tonalidades de amarelo e magenta indicam uma alteração no sentido do vetor nos respectivos pontos observáveis no gráfico. Neste modelo, não faz sentido análises nas regiões interiores à circunferência.

É notável que as regiões no entorno dos pontos $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ são escuras. Verificando algebricamente, encontramos as raízes da função velocidade complexa

$$\overline{\Omega'(-1, 0)} = \text{conj}\left(1 - \frac{1}{(-1)^2}\right) = \text{conj}(1 - 1) = 0,$$

$$\overline{\Omega'(1, 0)} = \text{conj}\left(1 - \frac{1}{1^2}\right) = \text{conj}(1 - 1) = 0.$$

Para essas duas situações, chamamos de ponto de estagnação, ou seja, onde a velocidade do fluxo é nula.

A partir desse ponto, outros modelos podem ser analisados. O uso frequente do Mapa do Plano Complexo propicia uma interpretação rápida e interessante de regiões notórias dos gráficos. A partir disso, fica extremamente fácil a generalização de propriedades, que devem sempre ser acompanhadas de verificações algébricas, já que o uso apenas da percepção pode incorrer em erros [5].

O papel da velocidade complexa fica bem definido como sendo um ente que carrega a magnitude (módulo) e a direção (e sentido). O comportamento dos modelos de fluxo passa a ser, então, melhor compreendido através das representações gráficas aqui propostas.

10. Conclusão

É notória a facilidade de interpretação propiciada pelos gráficos gerados pelo software *F(C): Funções Complexas*. Estudos recentes [3-5] apontam, cada vez mais, na direção de utilização de interpretações visuais para modelos incluindo variáveis complexas.

No entanto, outros fenômenos físicos podem ser explorados com a utilização do software. Podemos citar aplicações na eletrostática, fluxo de calor, mecânica quântica etc.

Apesar de terem sido descritos comportamentos e interpretações baseadas em gráficos, o software *F(C): Funções Complexas* permite maior interação, que não pode ser explorada no papel. Entre elas, destacamos as leituras imediatas de regiões através de interações com o mouse, geração de animações (família de funções) em vídeo com variação de parâmetros previamente definidos, decomposição do gráfico em planos distintos (transformações lineares), entre outras funcionalidades. O software conta com três tipos de Mapas do Plano Complexo permitindo, mais uma vez, a decomposição dos gráficos em características particulares (módulo e argumento).

Referências

- [1] M.R. Spiegel, *Complex Variables with an Introduction to conformal Mapping and its Applications* (McGraw-Hill, New York, 1999).
- [2] G. Ávila, *Variáveis Complexas e Aplicações* (LTC, São Paulo, 2000).
- [3] T. Needham, *Visual Complex Analysis* (Clarendon Press, Oxford, 2000).
- [4] B. Thaller, *Visual Quantum Mechanics* (Springer-Verlag, New York, 2000).
- [5] E.L. Silva, A.R. de Souza e E.M.R. Marques, *Números e Funções Complexas: Representação e Interpretação Gráfica* (Cultura Acadêmica, São Paulo, 2008).
- [6] E.L. Silva, *Construção e Validação de um Objeto Tecnológico de Aprendizagem em Matemática para Funções de uma Variável Complexa*. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista 'Júlio de Mesquita Filho', 2006.