

Geometria, espaço-tempo e gravitação: conexão entre conceitos da relatividade geral

(*Geometry, space-time and gravitation: relating basic concepts of general relativity*)

F.T. Falciano¹

Coordenação de Cosmologia, Relatividade e Astrofísica, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro, RJ, Brasil
Recebido em 27/4/2009; Revisado em 8/8/2009; Aceito em 12/8/2009; Publicado em 18/2/2010

A teoria da relatividade geral possui uma formulação matemática que embora extremamente precisa, é também complexa, podendo inviabilizar o seu entendimento. No entanto, o seu desenvolvimento foi fundamentado em princípios e idéias que, embora não triviais, são acessíveis a qualquer um. Sem a pretensão de nos atermos ao seu desenvolvimento histórico, propomos uma reflexão filosófica sobre as idéias que guiaram o pensamento de Einstein na construção da teoria da relatividade geral conectando conceitos a princípio tão descorrelacionados como geometria, espaço-tempos curvos e gravitação.

Palavras-chave: relatividade geral, princípio Mach, princípio de equivalência, princípio de covariância, espaço-tempo.

The theory of general relativity is formulated in a precise, but very complex, mathematical formalism. In spite of being necessary, this mathematical rigour may become an insurmountable obstacle. Notwithstanding this theory is grounded in principles and ideas accessible to anyone. We will try to construct a logical path between the ideas that helped Einstein formulate general relativity and connect concepts at first glance so apart as geometry, curved space-times and gravitation. We have chosen to favour a constructive approach at the expense of lack of accuracy from a historical perspective. We hope to clarify the main concepts and principles involved in general relativity focusing mainly on its epistemological and philosophical implications.

Keywords: general relativity, Mach's principle, equivalence principle, covariance principle, space-time.

A teoria da relatividade geral de Einstein é um dos feitos mais bem sucedidos no âmbito da ciência exata do ponto de vista de sua coerência interna. O seu desenvolvimento surgiu não por uma direta necessidade experimental, mas, sobretudo, através de reflexões sobre o conceito de inércia e pelo desejo de compatibilizar os conceitos da recente teoria da relatividade restrita com a gravitação newtoniana [1].

Antes de tratarmos propriamente dos princípios da relatividade geral, é instrutivo desenvolvermos as principais idéias da relatividade restrita para podermos nos sustentar sobre seus conceitos [2-4]. A teoria da relatividade restrita é essencialmente uma modificação cinemática da mecânica newtoniana derivada de dois princípios:

1- Referencias inerciais, no sentido newtoniano, são

equivalentes.²

2- A velocidade da luz no vácuo é uma constante universal para referencias inerciais.

A partir destes dois princípios é possível desenvolver uma série de consequências que modificam sensivelmente as noções clássicas de espaço e de tempo. De fato, as noções de espaço e de tempo passam a depender do estado de movimento do observador inercial. Isto significa que, ao contrário do caso newtoniano, dois referencias inerciais com velocidades diferentes não irão mais concordar, por exemplo, sobre a sincronização de seus relógios e, de uma maneira geral, o que um observador chama de espaço não é mais equivalente ao que o outro observador define como espaço. Esta relativização dos conceitos de espaço e de tempo estão intrinsecamente ligados a relativização do conceito de

¹E-mail: ftovar@cbpf.br.

²Newton incorporou a noção galileniana de referencias inerciais os quais são definidos por estarem em repouso ou descrevem um movimento retilíneo uniforme, ou seja, referencias não acelerados. O termo equivalente é empregado no sentido de que observadores associados a estes referencias descreverão igualmente os mesmos fenômenos físicos, porém, claramente, não quer dizer que eles devam atribuir valores iguais para quaisquer quantidades físicas. As quantidades físicas as quais assumem o mesmo valor para referencias equivalentes são chamadas de invariante. É importante notar esta diferença, pois o que era tido como invariante para observadores na teoria newtoniana, como, por exemplo, o comprimento de um corpo, pode deixar de sê-lo para teorias relativísticas.

simultaneidade. O espaço nada mais é do que o locus de todos os pontos associados ao mesmo valor de tempo, ou seja, é uma superfície de simultaneidade. Isto nos diz que a dependência da passagem de tempo com relação ao estado de movimento do observador implica que as superfícies de simultaneidade também deverão depender do observador.

É importante salientar que a modificação introduzida pela relatividade restrita é apenas de cunho cinemático enquanto que a dinâmica newtoniana é localmente preservada. Apesar disso, devido aos seus conceitos serem de natureza contrária ao senso comum desenvolvido pela vivência humana ao longo de toda a sua história [5], as consequências derivadas desta teoria são difíceis de serem compreendidas. A necessidade de adequação nesta nova maneira de pensar foi debate na comunidade científica durante anos, os quais geraram os chamados pseudo-paradoxos da relatividade restrita (para uma discussão moderna sobre o paradoxo dos gêmeos veja a Ref. [6]).

No entanto, neste novo arcabouço teórico, os referenciais inerciais ainda possuem um papel privilegiado. Existe uma distinção qualitativa entre referenciais inerciais e referenciais não-inerciais ou tidos como acelerado no sentido newtoniano. Os referenciais não-inerciais, por exemplo, não são capazes de sincronizar relógios que estejam espacialmente separados entre si. Mesmo que, por definição, se queira identificar num dado instante o mesmo valor temporal para todos os pontos do espaço, com o passar do tempo, os relógios que possuam distâncias diferentes do observador terão ritmos diferentes fazendo com que a “sincronização” inicial, criada artificialmente, seja completamente perdida.

Esta não equivalência entre os referenciais inerciais e não-inerciais é manifestada na manutenção do caráter absoluto da estrutura espaço-temporal. Na teoria newtoniana tanto o tempo quanto o espaço são objetos absolutos.³ O tempo é considerado como um contínuo que flui constantemente enquanto que o espaço é definido como um substrato não-material infinito que exerce influência sobre os corpos materiais porém que é imutável.

Na relatividade restrita, como salientado por Minkowski [8], as noções separadamente de espaço absoluto e tempo absoluto devem ser abandonadas e no seu lugar é introduzida uma nova noção de espaço-tempo absoluto. Note que, embora tenhamos uma generalização para a noção de espaço-tempo, a teoria preserva a entidade absoluta que define a arena na qual os fenômenos físicos devem se desenrolar. Esta nova entidade quadridimensional, o espaço-tempo absoluto, pode ser caracterizada por uma pseudo-métrica⁴ com assinatura

$(- + + +)$. De forma análoga a um observador inercial newtoniano que pode construir um sistema de coordenada com uma métrica dada pela matriz identidade, os referenciais inerciais na relatividade restrita podem, cada um deles, construir um sistema de coordenada onde a métrica é diagonal e cujos autovalores são respectivamente -1 , $+1$, $+1$ e $+1$. Esta caracterização é equivalente a afirmar que um dado observador inercial é sempre capaz de construir um sistema de coordenada comóvel onde o tempo absoluto e o espaço absoluto newtoniano são reproduzidos. De uma certa forma, em relatividade restrita, a geometria associada ao espaço definido pelos referenciais inerciais é a própria geometria euclidiana.

É importante salientar que a “origem” da inércia dos corpos materiais está fundamentada na existência do espaço-tempo absoluto pois é com relação a este espaço que ela é definida. Claro está que todas as críticas dirigidas ao espaço absoluto newtoniano por parte de filósofos como Leibniz e Mach permanecem válidas [9, 10]. Deste ponto de vista a relatividade restrita prorroga o projeto de construção de uma mecânica relacional. Porém, ao contrário da relatividade restrita, a teoria da relatividade geral não discrimina uma classe privilegiada de referenciais. Todos os referenciais, sejam eles inerciais ou acelerados no sentido newtoniano, são equivalentes de um ponto de vista físico.⁵

A matematização da ciência como prática quantitativa e descritiva se consolidou através dos trabalhos de Galileo Galilei [11]. Influenciado por estas idéias Renascentistas, Newton estrutura a sua teoria em noções geométricas de espaço e de tempo fazendo uma identificação entre conceitos matemáticos abstratos e o mundo natural [12, 13]. Neste contexto, o tempo é identificado com a reta Real enquanto que o espaço tridimensional é identificado com a geometria euclidiana, *i.e.* um espaço tri-dimensional plano, infinito e imutável [14, 15]. Na relatividade restrita, ao invés de tratar separadamente as noções de tempo e de espaço, é o objeto espaço-tempo que é geometrizado. Este espaço-tempo absoluto é identificado com o espaço-tempo de Minkowski. Esta identificação feita por Minkowski foi extremamente importante para o desenvolvimento da teoria da relatividade geral.

Einstein considerava que a relatividade restrita possuía dois fortes entraves conceituais: a manutenção de uma classe privilegiada de referenciais e a sua incompatibilidade com a gravitação newtoniana [16, 17]. A partir de 1907, ele percebeu que estes dois problemas estavam intimamente ligados e que, talvez, através da geometrização da gravitação eles pudessem ser simultaneamente resolvidos.

³O termo objeto não deve ser confundido com a idéia de objeto físico. As quantidades a que nos referimos são objetos matemáticos da teoria em questão que caracterizam a sua cinemática e por conseguinte estão presentes em toda e qualquer solução [7].

⁴A “métrica” do espaço-tempo é chamada de pseudo-métrica pois um de seus autovalores é negativo. No entanto, não vamos nos preocupar com esta distinção e usaremos o termo métrica como um abuso de linguagem como é comumente feito em física.

⁵Esta é a origem do termo relatividade restrita. Restrita por descrever apenas os referenciais inerciais enquanto que a relatividade geral descreve quaisquer referenciais.

Na mecânica clássica, a gravitação é uma força puramente atrativa do tipo ação-a-distância.⁶ Como seria possível associarmos a geometria do espaço-tempo a esta força instantânea? Além do mais, o simples fato de geometrizar uma força fundamental da Natureza não deveria necessariamente implicar no abandono da geometria euclidiana. Para melhor entendermos qual é a ligação entre espaço-tempo curvo e gravitação, analisaremos um experimento “gedanken” (termo alemão usado para designar um experimento mental) desenvolvido por Einstein na Ref. [2].

Suponha que um observador é colocado a girar num círculo de raio fixo e com uma velocidade de rotação constante. Vamos ainda supor que a sua velocidade tangencial é comparável com a velocidade da luz no vácuo de forma que os efeitos relativísticos tenham que ser levados em conta.

A teoria da relatividade restrita nos ensina que um observador em movimento uniforme (velocidade constante) descreverá o espaço e o tempo de forma que, ao longo da direção de sua velocidade, o espaço medido por suas réguas se contraia e o tempo medido por seus relógios se dilate, ou seja, este observador medirá comprimentos menores e períodos maiores (para uma discussão mais detalhada ver Refs. [18, 19]).

No caso de nosso experimento “gedanken”, o observador que gira com velocidade constante está sendo acelerado, porém a sua velocidade tangencial é constante. Este observador medirá um comprimento tangencial a sua trajetória menor do que um observador que esteja parado com relação a ele. Isto significa que o valor que ele atribuirá ao comprimento do círculo (uma volta completa em sua trajetória) será menor do que o comprimento medido pelo observador parado. Além disso, esta diferença dependerá do raio de sua trajetória uma vez que a velocidade tangencial é função do raio para movimentos com velocidade angular constante. Uma vez que os comprimentos em direções perpendiculares a velocidade não são alterados, ambos os referenciais, tanto o que gira com velocidade constante quanto o que está parado com relação a ele, medirão o mesmo valor para o raio da circunferência. Isto nos mostra que o observador em movimento acelerado não concordará com a descrição euclidiana. Para ele, a razão entre comprimento e raio da circunferência não será mais igual a $2\pi.r$. Ao contrário, este observador nos dirá que o comprimento da circunferência é uma outra função, não-linear, do raio.

Por um raciocínio análogo, este observador acelerado que por construção possui uma velocidade tangencial que é função do raio do círculo que ele descreve, não conseguirá manter seus relógios sincronizados. Para

este observador, a passagem de tempo também dependerá de maneira não-linear do raio. Claramente este observador não conseguirá descrever o mundo a partir da geometria euclidiana ou, para ser mais preciso, do espaço-tempo absoluto de Minkowski.

Assim, se a teoria da relatividade restrita for válida e se considerarmos a possibilidade de não fazermos distinção entre referenciais inerciais, os quais descrevem o espaço-tempo como o de Minkowski, e referenciais acelerados, os quais não conseguem descrever o espaço-tempo de maneira independente de sua aceleração e sobretudo não associam o espaço-tempo ao de Minkowski, então seremos forçados a considerar que a Natureza seja de fato descrita por geometrias não-euclidianas.⁷

Uma vez estabelecida uma possível conexão entre referenciais acelerados e espaço-tempos curvos, para associarmos a gravitação a espaço-tempos curvos, basta conseguirmos associar gravitação com referenciais acelerados. Para isto, tomemos um novo experimento “gedanken”.

Considere um observador que seja solto do repouso em um campo gravitacional homogêneo. De acordo com a teoria newtoniana, teremos a seguinte equação para o seu movimento

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \sum_k \mathbf{F}_k (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) + m_g \cdot \mathbf{g}.$$

Na expressão acima, assumimos que só existem forças que dependam apenas da distância entre a fonte e o observador. Se fizermos uma transformação não-linear de coordenada na forma

$$x' = x \quad , \quad y' = y \quad , \quad z' = z + \frac{1}{2} g \cdot t^2,$$

onde escolhemos a direção z como a direção vertical na qual temos o campo gravitacional homogêneo, teremos que a partir dessas novas coordenadas a equação se escreve

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{x}'}{dt^2} = \sum_k \mathbf{F}_k (\mathbf{x}' - \mathbf{x}'_k) + (m_g - m_i) \cdot \mathbf{g}$$

Note que neste sistema de coordenada o termo referente a força gravitacional é proporcional a diferença entre a massa gravitacional e a massa inercial. Caso o valor da massa gravitacional seja idêntico a massa inercial, a força gravitacional desaparece da equação. Vemos assim que em um campo gravitacional homogêneo é possível anular os efeitos gravitacionais ao se passar para um sistema de coordenada através de uma transformação não-linear. Dito de outra forma, podemos

⁶Força ação-a-distância descreve uma interação instantânea cuja intensidade depende apenas da distância a fonte. Isto quer dizer, por exemplo, que se o Sol explodisse todos os planetas do sistema solar “perceberiam” a sua ausência instantaneamente e independentemente de sua distância ao Sol.

⁷Durante o desenvolvimento da teoria da relatividade geral, todo o formalismo de geometrias não-euclidianas de que Einstein viria a precisar já havia sido desenvolvido desde meados do século XIX por matemáticos como Bolyai, Lobachevsky, Gauss, Riemann, etc. [20-22]

anular a gravitação ao passarmos para um sistema de coordenada acelerado. Graças a equivalência entre massa inercial e massa gravitacional, a inversa também é verdadeira. Se por um lado os efeitos gravitacionais podem ser anulados através de uma transformação não-linear, podemos acelerar um observador de forma a criarmos efeitos idênticos a de um campo gravitacional homogêneo.

Considere um observador fechado em um compartimento sem contato com o exterior, nem mesmo através de contato visual, de forma que sua única possibilidade de estudar o mundo exterior seja através de experimentos internos ao compartimento.⁸ Este observador, ao sentir uma força gravitacional homogênea ao longo da direção vertical, poderia afirmar que ao invés de existir um campo gravitacional, na realidade, ele está sendo puxado com aceleração constante ao longo desta mesma direção, porém no sentido contrário. Isto se deve ao fato de que a aceleração gera um sentimento de peso contra o piso do compartimento idêntico a um campo gravitacional homogêneo. Por outro lado, se este observador estivesse numa região do espaço na ausência de campos gravitacionais e por meio de um cabo puxássemos o seu compartimento com aceleração constante, este observador poderia concluir que, ao invés de estar sendo acelerado, ele se encontrasse parado num campo gravitacional homogêneo.

Esta indiscernibilidade entre estar sendo acelerado na ausência de gravitação ou estar parado na presença de um campo gravitacional homogêneo nos permite vislumbrar uma associação entre gravitação e movimento acelerado. Se de fato podemos “imitar” a gravitação através de acelerações e, reciprocamente, podemos anular a contribuição de um campo gravitacional homogêneo ao descrevermos o sistema a partir de um sistema acelerado, então é possível que haja uma associação não trivial entre estes dois fenômenos.

Vale lembrar que esta indiscernibilidade entre gravitação e movimento acelerado não é exata pois na Natureza não encontramos campos gravitacionais estritamente homogêneos. O observador dentro do compartimento consegue distinguir entre as duas situações descritas acima ao estudar as forças de marés do campo gravitacional.⁹ Estas forças nada mais são do que a manifestação da convergência e divergência das linhas de força do campo gravitacional [23]

Os argumentos apresentados até agora servem apenas para mostrar a razoabilidade na associação entre espaço-tempos curvos e aceleração e entre aceleração e gravitação. Vamos agora descrever alguns dos

princípios que guiaram Einstein na construção da teoria da relatividade geral.¹⁰

Um resultado bem conhecido de longa data, porém que era tomado apenas como um fato experimental, é a equivalência entre a massa inercial e a massa gravitacional de um determinado corpo material. Na mecânica clássica, a massa inercial é definida como a constante de proporcionalidade entre a força exercida sobre um corpo e a aceleração que ele adquire ao sofrer esta força. Neste sentido, a massa inercial mede a resistência a mudança do estado de movimento manifestada em movimentos acelerados. No entanto, sabemos que a noção de inércia de um corpo não se restringe apenas a movimentos acelerados. Ao contrário, o princípio de inércia de Galileo nos diz que, contrariamente ao movimento acelerado, quando não há aceleração os corpos mantêm seu estado de movimento indefinidamente. Embora a quantificação da massa inercial só seja possível em movimentos acelerados, a noção de inércia dos corpos materiais caracteriza uma propriedade cinemática das interações.

Por outro lado, a noção de massa gravitacional possui, a princípio, uma natureza completamente distinta. A massa gravitacional deve ser entendida como a carga gravitacional da mesma forma que no eletromagnetismo temos as cargas elétricas. A carga elétrica de uma partícula é a constante que determina a intensidade da interação com um campo eletromagnético ou com outras cargas elétricas. Da mesma forma, a carga gravitacional, que costumamos chamar de massa gravitacional, nos fornece a intensidade da interação gravitacional de um corpo com um campo gravitacional. Esta é a associação entre massa de um corpo com o seu peso.¹¹ Porém, é importante salientar algumas particularidades da gravitação que a distingue das outras forças da Natureza. A gravitação é a única força universal da Natureza, ou seja, tudo o que existe sofre e gera gravitação. Além disso, ao contrário, por exemplo, do eletromagnetismo onde temos forças atrativas e repulsivas, a gravitação é uma força estritamente atrativa.

No âmbito da teoria da relatividade geral, esta coincidência nada trivial entre massa inercial e massa gravitacional ganha o status de um princípio - princípio de equivalência. O princípio de equivalência afirma que o valor da massa inercial é exatamente igual ao valor da massa gravitacional. Hoje em dia, a verificação experimental dessa igualdade atinge valores com precisão até a décima segunda casa decimal 10^{-12} [27]. Apesar dos experimentos corroborarem com este princípio, existe uma grande diferença entre duas quantidades terem

⁸Este experimento “gedanken” é conhecido como elevador de Einstein.

⁹O nome forças de maré advém do fato deste ser o tipo de fenômeno responsável pelas variações das marés dos oceanos terrestres devido a atração gravitacional da Lua.

¹⁰Nesta abordagem optamos por privilegiar o encadeamento lógico dos conceitos em detrimento de uma possível fidelidade histórica do desenvolvimento desta teoria. Para uma apresentação mais completa sobre o assunto, veja a Ref. [24], enquanto que referências técnicas sobre a formulação da relatividade geral podem ser encontradas nas Refs. [25-26].

¹¹O peso de um objeto na Lua é menor do que na Terra justamente porque, apesar da massa do corpo ser a mesma, a interação gravitacional depende também do outro agente que no caso são respectivamente a Lua e a Terra.

valores muito próximos ou serem precisamente iguais. A relatividade geral é fundamentada na hipótese da equivalência exata. Einstein cria este princípio com o intuito de propor que a inércia dos corpos e a gravitação possuam de fato a mesma origem. Esta igualdade deve ser um indicativo de uma propriedade fundamental das interações mecânicas.

Jusqu'a présent la mécanique a, il est vrai, enregistré cet énoncé, mais elle ne l'a pas interprété. On ne peut arriver a une interprétation satisfaisante qu'en reconnaissant ce fait: La même qualité d'un corps se manifeste, suivant les circonstances, comme 'inertie' ou comme 'poids'. [16]

Até hoje em dia, a mecânica, de fato, enunciou esta afirmação porém não a interpretou. Só será possível construirmos uma interpretação satisfatória se reconhecermos o seguinte fato: a mesma qualidade de um corpo se manifesta, de acordo com as circunstâncias, como 'inércia' ou como 'peso'. (tradução do autor)

Esta associação é reforçada ao lembrarmos que dois corpos caem da mesma forma em um campo gravitacional independentemente de suas massas, ou seja, a queda livre que nada mais é do que o movimento devido a ação da força gravitacional é independente da carga gravitacional. Uma outra questão importante a ser tratada com relação a mecânica não-relativista é o porque dos referenciais inerciais possuírem um papel privilegiado na descrição da Natureza. Os referenciais inerciais são por definição aqueles referenciais os quais não sofrem nenhum tipo de força, ou seja, são referenciais que estão parados ou em movimento retilíneo uniforme com relação a um outro referencial inercial.

No entanto, para não cairmos em uma argumentação circular, somos forçados a conceituar um referencial absoluto,¹² como o espaço absoluto de Newton ou o espaço-tempo absoluto de Minkowski, de forma que possamos definir os referenciais inerciais a partir do seu movimento com relação a este objeto absoluto [9, 10]. Note que este espaço absoluto é necessário até mesmo para podermos definir a classe de referenciais chamados de referenciais inerciais. Dada a sua existência, duas questões imediatamente se colocam:

1- Por que existe esta assimetria ontológica entre o objeto absoluto e o resto da Natureza?

Enquanto o objeto absoluto age sobre objetos físicos, as suas propriedades são essencialmente imutáveis e completamente independente do mundo Natural. Assim, concluímos que a maneira pela qual este objeto absoluto age sobre os corpos ponderáveis não pode ser por meio de nenhum tipo de interação

pois, por definição, interação pressupõe uma influência mútua.

2- Este objeto absoluto postulado por motivos de coerência interna é passível de observação?

Newton propôs um experimento que comprovasse experimentalmente a existência do espaço absoluto [10, 22]. Peguemos um balde cheio de água preso a uma corda que por sua vez está amarrada ao teto. Se girarmos o balde, naturalmente, a corda irá se enroscar. Uma vez que a corda esteja completamente enroscada soltemos o balde e observemos o que acontece com a superfície da água no balde. No início, o balde começa a girar porém a superfície da água no seu interior permanece inalterada. Com a permanência da rotação do balde, o movimento deste é transferido a água que por sua vez também começa a girar e por isso sua superfície se torna curva (côncava). Uma vez que a corda se desenrole completamente o balde pára de girar, porém, por inércia, a água continua a girar permanecendo com a sua superfície curva até o ponto em que ela finalmente pára e assim a sua superfície retoma a forma plana.

Neste experimento, Newton argumenta observar a manifestação do espaço absoluto nos movimentos circulares através da curvatura da superfície da água que ocorre quando esta gira com relação ao espaço absoluto e não com relação ao balde. No início, quando o balde gira com relação a água, a superfície da água permanece plana. No entanto, na configuração oposta quando a água está parada com relação ao balde, porém ambos estão girando, a sua superfície é curva. Através deste raciocínio, Newton argumenta que é girando com referência ao espaço absoluto que surge a curvatura da superfície da água e não com relação ao balde (corpos materiais). Note que, na teoria newtoniana, a noção de aceleração possui um caráter absoluto.

Embora já houvesse uma insatisfação com a noção de espaço absoluto desde a formulação da teoria newtoniana como, por exemplo, o filósofo alemão Gottfried W. Leibniz, o primeiro a formular uma solução alternativa ao experimento do balde de Newton foi Ernst Mach. Para Mach o espaço absoluto newtoniano deveria ser associado as estrelas fixas pois só deve fazer sentido noções de movimentos relativos entre corpos materiais. Assim, para Mach, os sistemas de referência têm que ser definidos a partir dos corpos materiais.

For me only relative motion exist... when a body rotates relatively to the fixed stars, centrifugal forces are produced; when it rotates, it rotates relatively to some different body, not relatively to the fixed stars, no centrifugal forces are produced. I have no objection to calling the first rotation as long as it be remembered that nothing is meant except relative motion with respect to the

¹²Neste trabalho vamos nos limitar a ressaltar algumas das críticas e opções que auxiliaram o Einstein na formulação da teoria da relatividade geral, sem entrar numa discussão sobre teorias relacionais onde seria necessário analisar os argumentos de ambos os lados [28, 29].

fixed stars. [30]

Ao meu ver só existe movimento relativo... quando um corpo gira com relação as estrelas fixas, são produzidas forças centrífugas; quando ele gira, girando com relação a algum outro corpo, não relativo as estrelas fixas, não surge nenhuma força centrífuga. Eu não tenho nenhuma objeção em chamar a primeira de rotação desde que seja lembrado de que não significa nada mais do que movimento com relação as estrelas fixas. (tradução do autor)

Com relação ao experimento do balde, Mach argumenta que a superfície da água se curva, não por estar em rotação com relação ao espaço absoluto, mas porque ela gira com relação as estrelas fixas que para nós servem como um sistema de referência estático. Mach considera que os efeitos inerciais se dão exclusivamente a movimentos relativos entre os corpos materiais. Note que em termos de movimento relativo, girar o balde com relação as estrelas fixas é equivalente a mantermos o balde fixo e girarmos rigidamente as estrelas fixas. Contrariamente, para Newton, as estrelas fixas são apenas uma maneira conveniente de se referir ao espaço absoluto uma vez que estas estão paradas com relação a este espaço. Mach vai além e considera que as estrelas fixas fazem parte da própria definição de sistema de inércia. Assim, este princípio de Mach, como o próprio Einstein denominou após ter formulado a teoria da relatividade geral, requer que o sistema de inércia seja determinado pela distribuição de matéria do Universo.¹³ A inércia de um corpo é o resultado de sua interação com o resto de matéria do Universo. Note que, devido a teoria da relatividade restrita, essa interação que define a inércia dos corpos não pode mais ser do tipo ação-a-distância como, por exemplo, acontece com a gravitação newtoniana. A relatividade restrita impõe a existência de uma velocidade máxima de propagação de qualquer informação ou interação. A formulação do princípio de Mach de Einstein generaliza as idéias do próprio Mach expostas em seu *The Science of Mechanics* propondo que a interação que determina a inércia dos corpos a partir da distribuição de matéria do Universo deva ser feita através de um campo que naturalmente será função da posição espacial dos corpos.

Apesar de sua importância no pensamento de Einstein, na realidade, o princípio de Mach não é totalmente realizado na relatividade geral. Posteriormente ao seu desenvolvimento, o próprio Einstein percebeu que a sua teoria não implementava integralmente este princípio e

¹³A relatividade restrita mostra que a inércia de um corpo é função de sua energia uma vez que a massa inercial aumenta ou diminui conforme a velocidade do corpo aumenta ou diminui. Inclusive, é possível interpretarmos a massa inercial, quando em repouso, como uma energia potencial $E = mc^2$. Logo, doravante, o termo matéria deve ser entendido como englobando tanto a distribuição de matéria quanto de energia.

¹⁴Talvez a melhor terminologia fosse, ao invés de espaço absoluto, chamá-lo de éter, porém, se assim o fizéssemos, seríamos forçados a nos determos mais do que o desejado para podermos situar e contextualizar esta discussão.

até chegou a propor que este princípio não devesse valer na forma citada acima. Essas reflexões sobre a implementação do princípio de Mach na relatividade geral levaram o Einstein a re-considerar o conceito de Éter. O curioso é que um dos feitos da relatividade restrita havia sido justamente abdicar deste conceito para se explicar a propagação das ondas eletromagnéticas no vácuo. Caso o princípio de Mach fosse de fato implementado em toda a sua extensão, na ausência completa de matéria não poderia haver nenhum traço de propriedades inerciais. Claramente este não é o caso da teoria da relatividade geral cuja solução de vazio é o espaço-tempo de Minkowski.

Uma outra maneira pela qual a teoria da relatividade geral não satisfaz o princípio de Mach é através do estudo das condições de contorno do espaço-tempo. A partir deste estudo, Einstein foi levado a propor como primeiro modelo cosmológico relativístico um Universo espacialmente fechado. Para Universos espacialmente infinitos, a inércia não é definida exclusivamente pela distribuição de matéria do Universo mas apresenta uma arbitrariedade associada a uma noção de espaço absoluto. Este resquício de espaço absoluto é construído pela escolha do comportamento assintótico da métrica espacial [31]. Estas questões são devidamente analisadas numa discussão de cosmologia e que infelizmente fogem do escopo deste trabalho. Por isso, nos limitaremos a indicar algumas referências [32, 35]. Note, porém, que agora esta noção de espaço absoluto deve ser entendida de uma maneira completamente diferente. Na teoria da relatividade geral o espaço-tempo é um campo dinâmico com propriedades físicas definidas e que interage com o conteúdo de matéria e energia do Universo.¹⁴

Se quiséssemos que a relatividade geral implementasse o princípio de Mach, a inércia dos corpos deveria ser definida apenas pela distribuição de matéria e energia do Universo. Se por um lado a teoria da relatividade geral não é uma teoria relacional estrito senso, em que sentido ela avança com relação a teoria da relatividade restrita?

A teoria da relatividade restrita é incompatível com qualquer interação do tipo ação-a-distância e, por isso, para conciliar esta teoria com a gravitação newtoniana somos forçados a modificar uma delas ou até eventualmente ambas. De acordo com o experimento “gedanken” descrito mais acima, um observador através de experimentos locais não é capaz de determinar a diferença entre um campo gravitacional homogêneo e um sistema de referência uniformemente acelerado. Esta equivalência nos indica que, se quisermos levar em conta efeitos gravitacionais, não poderemos man-

ter o papel privilegiado dos referenciais inerciais. Isto nos mostra que o princípio de relatividade da relatividade restrita deve ser de alguma forma generalizado. Por outro lado, se um observador parado num campo gravitacional pode ser identificado com um observador uniformemente acelerado, então, percebemos que o conceito de inércia dos corpos não deve possuir um valor absoluto.

Na busca da generalização da teoria da relatividade restrita, Einstein também se valeu de um outro princípio chamado de princípio de covariância. Podemos definir o princípio de covariância como a afirmação de que as leis da Natureza devem ser expressa numa linguagem covariante. Einstein percebeu que os sistemas de coordenada são definições arbitrárias que fazemos de maneira conveniente para cada situação. O sistema de coordenada é um construto abstrato da mente humana que se vale desta ferramenta na descrição dos fenômenos físicos. De acordo com este princípio, as leis da Natureza não podem depender da nossa escolha de sistema de coordenada uma vez que esta é completamente arbitrária e, portanto, desprovida de conteúdo físico.

Assim, as leis da Natureza devem permanecer inalteradas caso façamos uma transformação arbitrária de coordenada. O princípio de covariância nos diz que as leis da Natureza devem possuir a mesma forma tanto em sistemas acelerados quanto em sistemas inerciais (no sentido newtoniano). Porém, existe uma diferença entre dependência no sistema de coordenada (covariância) e dependência no estado de movimento do observador (associado ao conceito de invariância).

Qualquer teoria espaço-temporal pode ser reescrita numa forma covariante [7]. A teoria newtoniana, por exemplo, também pode ser formulada numa maneira covariante, porém, o preço a se pagar é a necessidade de definirmos objetos absolutos. Estes objetos são absolutos no sentido em que existe um grupo de transformação que os deixa invariante. Este grupo de transformações é justamente quem definirá uma classe privilegiada de referenciais os quais estamos familiarizados a chamar de referenciais inerciais.

Neste contexto, podemos entender a formulação da relatividade restrita como uma redefinição do objeto absoluto da teoria newtoniana. Na mecânica newtoniana, o objeto absoluto é a matriz identidade tridimensional (a métrica do espaço euclidiano) enquanto que na relatividade restrita o objeto absoluto é a matriz quadri-dimensional (a pseudo-métrica do espaço-tempo de Minkowski). É bem verdade que reescrever uma dada teoria é extremamente frutífero para a sua compreensão e eventualmente para transpor eventuais desafios teóricos. Porém, apenas reescrevê-la não altera em nada o conteúdo físico que já havia nela embutido. É inegável de que houve um ganho significativo com a reformulação da mecânica newtoniana a partir dos formalismos lagrangianos e hamiltonianos. Retrospectiva-

mente, chega até a ser inconcebível o desenvolvimento da mecânica quântica, como nós a conhecemos hoje, sem fazer referência a sistemas hamiltonianos. Isto nos mostra a importância de uma releitura de uma dada teoria. No entanto, estes novos formalismos descrevem a mesma física que a mecânica newtoniana.

O fato de impormos que teorias espaço-temporais devam ser expressas de forma covariante não restringe em nada a gama de teorias possíveis. A riqueza física da idéia do princípio de covariância de Einstein está em propor que os referenciais acelerados sejam tão “bons referenciais” quanto os inerciais. Este requerimento pode ser entendido como a imposição de que a teoria não deva possuir nenhum objeto absoluto.

Embora o princípio de covariância tenha guiado o pensamento de Einstein na construção da teoria da relatividade geral, algo que poderíamos chamar de princípio de invariância é que realmente possui conteúdo físico. O princípio de invariância pode ser definido como o requerimento de que teorias espaço-temporais não contenham objetos absolutos. Uma das implicações deste princípio é que os referenciais acelerados, devido aos motivos mencionados mais acima, perceberão a estrutura do espaço-tempo como uma estrutura não-euclidiana. Se a este fato acrescentarmos a proposição de que aceleração e gravitação são indistinguíveis, podemos supor que a gravitação deva de fato alterar a estrutura do espaço-tempo. Por outro lado, através do princípio de equivalência, Einstein associa a inércia dos corpos a gravitação. Assim, o campo que define a inércia dos corpos deve ser a própria gravitação o que nos leva a concluir que é a estrutura dinâmica do espaço-tempo que determina a inércia dos corpos. Além do mais, sabemos que matéria é fonte de gravitação e por isso ela deve alterar a estrutura do espaço-tempo. Resumindo, na relatividade geral, a interação gravitacional é de tal forma que a matéria curva o espaço-tempo que por sua vez determina as trajetórias das partículas de acordo com a sua estrutura geométrica. Vamos tentar desenvolver um pouco melhor essa idéia.

A relatividade geral foi formulada a partir do cálculo diferencial onde é possível escrever as equações dinâmicas de forma covariante. No cálculo diferencial, as quantidades físicas são descritas por objetos matemáticos chamados tensores. Neste formalismo, a distribuição de matéria e energia é descrita pelo tensor energia-momento que nada mais é do que a generalização do conceito de energia e momento de uma partícula para a descrição de campos, *i.e.* para uma distribuição de matéria. Como argumentado anteriormente, o cenário da relatividade geral se dá em uma classe de espaços-tempos curvos a qual chamamos de espaços Riemannianos. Num espaço Riemanniano, a métrica é o tensor fundamental que caracteriza completamente a estrutura do espaço-tempo, ou seja, a sua geometria. Além disso, é a partir da métrica que conseguimos construir a noção de distâncias espaciais e

temporais entre dois eventos, conceitos indispensáveis.

Em última análise, a relatividade geral é a expressão da identificação do campo gravitacional com a métrica do espaço-tempo. A métrica é um campo dinâmico que interage com a distribuição de matéria e energia. Esta interação é descrita pela equação dinâmica da relatividade geral, a equação de Einstein, onde igualamos propriedades geométricas descritas pela métrica e por suas derivadas de primeira e segunda ordem com o tensor energia-momento. É razoável que tenhamos derivadas segundas da métrica pois, na relatividade geral, a métrica assume o papel do objeto dinâmico da teoria. A situação é análoga a mecânica newtoniana onde aparece, na equação dinâmica, a aceleração (derivada segunda temporal da posição).

O tensor energia-momento funciona como a fonte da curvatura do espaço-tempo.¹⁵ Resolver a equação de Einstein significa encontrar qual é a métrica compatível com uma dada distribuição de matéria e energia, ou seja, para um dado tensor energia-momento. A distribuição de matéria e energia impinge tensões e deformações a estrutura do espaço-tempo. Uma vez de posse da métrica, solução das equações de Einstein, podemos estudar o movimento de uma partícula teste¹⁶ utilizando a equação da geodésica. A geodésica é uma definição formal para uma curva extremal entre dois pontos. Ela é uma generalização do conceito de menor distância entre dois pontos para espaços não-euclidianos. A geodésica é para o espaço curvo o que a reta é para o espaço euclidiano. Assim, dado uma métrica, através da equação da geodésica, podemos prever qual será a trajetória de uma partícula teste. É neste sentido que dizemos que a matéria curva o espaço-tempo enquanto que este último determina a trajetória das partículas.

Note que o fato da matéria seguir as curvas geodésicas não é consequência das equações dinâmicas mas deve ser entendido como um princípio extra da Natureza. Existe uma relação evidente entre este princípio e a lei de inércia de Galileu. A lei de inércia nos diz que os corpos seguem linhas retas na ausência de forças, *i.e.* quando livres. Na relatividade geral, este princípio é reformulado pela afirmação de que os corpos seguem geodésicas na ausência de forças. Note, porém, que a gravitação não é mais tida como uma força e por isso seguir uma geodésica na ausência de forças significa que estamos considerando a situação onde só há “gravitação” atuando sobre os corpos.

Até o momento, temos, certamente, privilegiado o abandono da noção de força gravitacional a favor do conceito de espaço-tempo curvo. No entanto, uma vez feita a identificação entre gravitação e espaço-tempos

curvos, podemos, de forma análogo, abdicar da estrutura do espaço-tempo em prol do conceito de campo gravitacional. Ao invés de afirmarmos que os corpos caem devido a estrutura do espaço-tempo ser curva, podemos abandonar a descrição dos fenômenos físicos a partir de seu desenrolar no espaço-tempo, ou seja, consideramos a situação onde não há espaço-tempo. Nesta nova visão, o que chamamos de espaço-tempo é na realidade apenas a manifestação do campo gravitacional. A física passa a descrever apenas a interação entre campos, campos sobre campos, e não mais a interação de campos no espaço-tempo. Uma analogia interessante sobre esta interpretação é oferecida por Carlo Rovelli [36]

It is as if we had observed in the ocean many animals living on an island: animals on the island. Then we discover that the island itself is in fact a great whale. So the animals are no longer on the island, just animals on animals. Similarly, the Universe is not made up of fields on spacetime; it is made up of fields on fields.

É como se tivéssemos observado no oceano vários animais vivendo sobre uma ilha: animais sobre a ilha. Depois descobríamos que a ilha ela mesma é na verdade uma grande baleia. Então, os animais não estão mais sobre a ilha, apenas animais sobre animais. De maneira semelhante, o Universo não é feito de campos sobre o espaço-tempo; ele é feito de campos sobre campos. (tradução do autor)

Este raciocínio é bastante cômodo na formulação de possíveis teorias de gravitação quântica onde se requer a quantização dos campos, neste caso a quantização da própria estrutura do espaço-tempo [37]. O tempo da mecânica quântica tem um caráter similar ao tempo da física clássica [38, 39]. Na dinâmica quântica, o tempo é um parâmetro externo ao sistema, diferentemente, por exemplo, da posição espacial que se torna um operador quântico, ou seja, uma variável quântica.

Na relatividade, o tempo nada mais é do que um parâmetro do sistema de coordenada da mesma forma que a posição. De um ponto de vista formal, as coordenadas espaciais e temporais devem possuir propriedades análogas. Isto é equivalente a dizermos que a noção de espaço e tempo devem, necessariamente, ser unificadas num novo conceito de espaço-tempo.

A teoria da relatividade modificou sensivelmente a nossa visão de mundo. Após o seu desenvolvimento, fomos forçados a rever as noções mais fundamentais sobre

¹⁵Devido ao caráter não-linear das equações de Einstein, a própria gravitação curva o espaço-tempo, ou seja, mesmo na ausência de matéria existem soluções das equações de Einstein que representam espaço-tempos curvos. Isto pode ser entendido como a energia do próprio campo gravitacional ser capaz de curvar o espaço-tempo. A própria gravitação gravita.

¹⁶Partícula teste é um conceito limite que é usado em física para dizer que a dada partícula que estamos considerando é tão pequena que não age como fonte para os campos, ou seja, esta partícula não altera a configuração dos campos físicos. A sua interação com os campos se dá apenas para determinar o seu movimento.

a nossa experiência humana. Neste contexto, o observador se torna ativo na separação e na própria definição de espaço e de tempo. Estes conceitos, antes tidos como fundamentais a experiência humana, assumem uma conotação precária e parcial ainda dentro da visão objetiva e impessoal do conhecimento científico.

Apesar da complexidade formal da teoria da relatividade, como Einstein mesmo colocou [40]

La théorie de la relativité est une théorie a principes. Pour la comprendre, il faut avant tout saisir les principes sur lesquels elle est basée.

A teoria da relatividade é uma teoria de princípios. Para compreendê-la, é necessário antes de mais nada dominar os princípios sobre os quais ela é baseada. (tradução do autor)

Para que consigamos absorver essas modificações é necessário que a complexidade matemática das teorias físicas não ofusque a epistemologia de suas inovações.

Referências

- [1] A. Einstein, *Annalen der Physik vierte folge*, band 49, (1916). Tradução em inglês in: *The Principle of Relativity* (Dover Publications, Nova York, 1923).
- [2] A. Einstein, *The Meaning of Relativity* (Princeton University Press, Princeton, 1953).
- [3] S.J. Prokhovnik, *The Logic of Special Relativity* (Cambridge University Press, Nova York, 1967).
- [4] A. Evett, *Understanding the Space-Time Concepts of Special Relativity* (John Wiley & Sons, Nova York, 1982).
- [5] G. Szamosi, *The Twin Dimensions - Inventing Time & Space* (McGraw-Hill, Nova York, 1986).
- [6] F.T. Falciano, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **29**, 19 (2007).
- [7] J. Anderson, *Principles of Relativity Physics* (Academic Press, Nova York, 1967).
- [8] H. Minkowski, *Raum und Zeit* (1908) Tradução em inglês in: *The Principle of Relativity* (Dover Publications, Nova York, 1923).
- [9] M. Jammer, *Concepts of Space - The History of Theories of Space in Physics* (Dover Publications, Nova York, 1993).
- [10] M. Ghins, *A Inércia e o Espaço-Tempo Absoluto - De Newton a Einstein* (Editora da Unicamp, Campinas, 1991).
- [11] Drake, S., *Galileo at Work - His Scientific Biography*. Chicago: University of Chicago Press (1981).
- [12] A. Koyré, *Du Monde Clos a l'Univers Infinie* (Gallimard, Paris, 1988).
- [13] R. Omnès, *Philosophie de la Science Contemporaine* (Gallimard, Paris, 1994).
- [14] I. Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687). Tradução em inglês in: *Sir Isaac Newton's mathematical principles of natural philosophy and his system of the world* (University of California Press, Berkeley, 1947).
- [15] Voltaire, *Elements of the Philosophy of Newton* (1738). Tradução em português em: *Elementos de Filosofia de Newton* (Editora da Unicamp, Campinas, 1996).
- [16] A. Einstein, *La Relativité* (Petite Bibliothèque Payot, Paris, 2001).
- [17] M. Paty, *Einstein Philosophe* (Presses Universitaires de France, Paris, 1993).
- [18] B. Russell, *ABC of Relativity* (Routledge, London, 1997).
- [19] H. Reichenbach, *From Copernicus to Einstein* (Dover Publications, Nova York, 1980).
- [20] D.E. Smith, *History of Mathematics - V. II* (Dover Publications, Nova York, 1953).
- [21] B. Mandelbrot, in: *Penser les Mathématiques*, editado por J.P. Descles, (Seuil, Paris, 1982).
- [22] H. Poincaré, *La Science et l'Hypothèse* (1902). Tradução em português em: *A Ciência e a Hipótese* (Editora UnB, Brasília, 1984).
- [23] H. Ohanian and R. Ruffini, *Gravitation and Spacetime* (W.W. Norton & Company, Nova York, 1994).
- [24] M. Paty, *Einstein Philosophe* (Presses Universitaires de France, Paris, 1993).
- [25] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (John Wiley & Sons, Nova York, 1972).
- [26] R. Wald, *General Relativity* (University of Chicago Press, Chicago, 1984).
- [27] C.M. Will, *Theory and Experiment in Gravitational Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1981).
- [28] H. Reichenbach, *The Philosophy of Space and Time* (Dover Publications, Nova York, 1957).
- [29] A. Grunbaum, *Philosophical Problems of Space and Time* (Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1973).
- [30] E. Mach, *Die Mechanik in ihrer Entwicklung* (1883). Tradução em inglês in: *The science of Mechanics* (Open Court, LaSalle, 1960).
- [31] A. Einstein, *Koniglich Preussische Akademie der Wissenschaften*. Tradução em português em: *O Princípio da Relatividade* (Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1983).
- [32] J. Merleau-Ponty, *Cosmologie du XXe Siècle* (Gallimard, Paris, 1965).
- [33] J. Merleau-Ponty, *La Science de l'Univers a l'Âge du Positivisme* (Vrin, Paris, 1983).
- [34] J. Merleau-Ponty, *Sur la Science Cosmologique* (EDP-Sciences, Paris, 2003).
- [35] J.P. Luminet, Alexandre Friedmann and George Lemaître, *Essais de Cosmologie* (Seuil, Paris, 1997).
- [36] C. Rovelli, *Quantum Gravity* (Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge 2004).
- [37] L. Smolin, *Three Roads to Quantum Gravity* (Basic Books, Nova York, 2002).

- [38] H. Reichenbach, *The Direction of Time* (Dover Publications, Nova York, 1999).
- [39] L.A. Oliveira, in: *Inquiring the Universe & Essays to Celebrate Prof. Mario Novello Jubilee*, editado por J.M. Salim, S.E.P. Bergliaffa, L.A. Oliveira e V.A. De Lorenci (Frontier Group, Paris, 2003).
- [40] A. Einstein, *Conceptions Scientifiques* (Flammarion, Paris, 1990).