

# Quaternions, números complexos e os ensembles de matrizes aleatórias

(*Quaternions, complex numbers and random matrices ensembles*)

A.C. Bertuola<sup>1</sup>

*Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil*

Recebido em 29/5/2009; Revisado em 2/8/2009; Aceito em 14/9/2009; Publicado em 18/2/2010

Neste trabalho dois ensembles de matrizes aleatórias são construídos com detalhes refinados. São eles: o Ensemble Gaussiano Unitário cujos elementos das matrizes são números complexos e o Ensemble Gaussiano Simplético, cujos elementos das matrizes são quaternions.

**Palavras-chave:** quaternion, matrizes aleatórias, ensemble unitário, ensemble simplético.

In this work two ensembles of random matrices are built with refinements of details. They are them Ensemble Unitary Gaussian whose elements of the matrices are complex numbers and Ensemble Gaussian Symplectic containing matrices with quaternions elements.

**Keywords:** quaternion, random matrix, unitary ensemble, symplectic ensemble.

## 1. Introdução

Este trabalho é a continuação natural de outro trabalho publicado anteriormente nessa mesma revista [1], onde foi apresentado o principal ensemble de matrizes aleatórias de ordem dois denominado Ensemble Ortogonal Gaussiano (GOE). Por motivo de completeza, dois ensembles serão construídos em detalhes: o Ensemble Unitário (GUE) cujos elementos são números complexos aleatórios e o Ensemble Simplético (GSE) cujos elementos das matrizes são quaternions. Para tanto, lembraremos inicialmente alguns aspectos relevantes já inseridos no trabalho anterior e que serão utilizados repetidamente neste trabalho.

Para construir o ensemble gaussiano de matrizes desejado, define-se uma função auxiliar  $F$  que reúne, em uma única expressão analítica, a entropia da informação e os dois vínculos necessários conforme a expressão matemática

$$F = - \int dHP \ln P + \lambda_1 \left( 1 - \int dHP \right) + \lambda_2 \left( \mu - \int dH \text{tr} H^2 P \right). \quad (1)$$

O primeiro vínculo identificado na Eq. (1) é a normalização da distribuição, que reconhecidamente é reescrita na forma

$$\int dHP(H) = 1. \quad (2)$$

<sup>1</sup>E-mail: bertuola@if.usp.br.

Por outro lado, define-se  $\mu = \langle \text{tr} H^2 \rangle$  que representa o segundo vínculo na Eq. (1), ou então de maneira explícita

$$\mu = \int dH \text{tr} H^2 P(H). \quad (3)$$

A diferencial matricial  $dH$  sintetiza o produto diferencial de todos elementos independentes da matriz considerada. Os parâmetros  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  que acompanham os vínculos na Eq. (1) são os famosos multiplicadores de Lagrange. A densidade de probabilidade  $P = P(H)$  é determinada impondo a condição  $\delta F = 0$  e, após considerável cálculo, chega-se à expressão geral

$$P(H) = \frac{1}{Z} \exp(-\alpha \text{tr} H^2). \quad (4)$$

Para determinar a função de partição substitui-se a distribuição das matrizes aleatórias (4) na condição de normalização (2) e, dessa forma, chega-se imediatamente a igualdade

$$Z = \int dH \exp(-\alpha \text{tr} H^2). \quad (5)$$

Para construir os ensembles gaussianos basta determinar o traço do quadrado da matriz ( $\text{tr} H^2$ ) e a função de partição definida imediatamente acima na Eq. (5). Estas tarefas serão realizadas a seguir detalhadamente.

## 2. Ensemble Unitário Gaussiano

A matriz complexa hermiteana é escrita na forma

$$H_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_0 + iV \\ H_0 - iV & H_{22} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

cujas diagonais principais são os elementos reais  $H_{11}$  e  $H_{22}$  e, na outra diagonal o número complexo  $H_0 + iV$  e seu respectivo complexo conjugado.<sup>2</sup>

O traço do quadrado da matriz  $H_{2 \times 2}$  na Eq. (6) é dado explicitamente por

$$\text{tr} H_{2 \times 2}^2 = H_{11}^2 + H_{22}^2 + 2(H_0^2 + V^2). \quad (7)$$

Os autovalores da matriz hermiteana  $H_{2 \times 2}$  tem sua existência garantida no campo dos números reais. De fato, seus dois valores reais são as raízes do polinômio característico de segundo grau

$$\begin{vmatrix} H_{11} - E & H_0 + iV \\ H_0 - iV & H_{22} - E \end{vmatrix} = 0, \quad (8)$$

que assume explicitamente os valores

$$E_{\pm} = \frac{(H_{11} + H_{22}) \pm \sqrt{(H_{11} - H_{22})^2 + 4H_0^2 + 4V^2}}{2}. \quad (9)$$

Tendo em vista que cada elemento complexo da matriz  $H_{2 \times 2}$  definida na Eq. (6) pode ser representado por uma matriz, somos tentados a escrever a citada matriz na forma

$$H_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} H_{11} & 0 & H_0 & V \\ 0 & H_{11} & -V & H_0 \\ H_0 & -V & H_{22} & 0 \\ V & H_0 & 0 & H_{22} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Surge uma curiosidade em relação ao traço do quadrado da matriz  $H_{4 \times 4}$ . O valor pode ser calculado por meio de uma quantidade de trabalho algébrico de onde se constata a igualdade

$$\text{tr} H_{4 \times 4}^2 = 2 \text{tr} H_{2 \times 2}^2. \quad (11)$$

Isso significa que é permitido calcular o traço da matriz  $2 \times 2$  por meio do traço da matriz  $4 \times 4$ , cujos elementos são todos reais. É necessário porém lembrar que existe um fator numérico de correção a ser considerado segundo a igualdade (11). Os autovalores da matriz  $H_{4 \times 4}$  são calculados por meio do polinômio característico

$$\begin{vmatrix} H_{11} - E & 0 & H_0 & V \\ 0 & H_{11} - E & -V & H_0 \\ H_0 & -V & H_{22} - E & 0 \\ V & H_0 & 0 & H_{22} - E \end{vmatrix} = 0. \quad (12)$$

<sup>2</sup>O leitor pode provar tais afirmações supondo, inicialmente, uma matriz de ordem dois, cujos elementos são números complexos distintos entre si a priori e, então impor a condição de hermiticidade  $H^T = \bar{H}$ , melhor dizendo, a transposta da matriz é igual a sua respectiva conjugada.

<sup>3</sup>A menos de uma degenerescência nas raízes do polinômio de quarto grau

<sup>4</sup>O elemento de volume para  $N$  graus de liberdade é dado por  $\Omega(R, \delta R) = \frac{2\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma(\frac{N}{2})} R^{N-1} \delta R$ . Para uma demonstração veja o apêndice da Ref. [3].

Este polinômio é de quarto grau e pode ser fatorado na forma

$$[(H_{11} - E)(H_{22} - E) - (V^2 + H_0^2)]^2 = 0. \quad (13)$$

Os autovalores obtidos a partir da igualdade (13) coincidem<sup>3</sup> com aqueles apresentados na Eq. (9), confirmando que as matrizes  $H_{2 \times 2}$  e  $H_{4 \times 4}$  possuem os mesmos autovalores.

## 2.1. Distribuição das matrizes de elementos complexos

Substituindo o valor do traço (7) na igualdade (4), a expressão analítica da distribuição das matrizes aleatórias no ensemble unitário é dada por

$$P(H) = \frac{1}{Z_{GUE}} \exp[-\alpha_u (H_{11}^2 + H_{22}^2 + 2H_0^2 + 2V^2)], \quad (14)$$

mostrando que  $P(H) = P(H_{11}, H_{22}, V, H_0)$ .

O passo adiante será calcular a função de partição  $Z_{GUE}$  por meio da integral múltipla definida na igualdade (5) e reescrita agora na forma

$$Z_{GUE} = \int \int \int \int dH_{11} dH_{22} dV dH_0 \times \exp[-\alpha_u (H_{11}^2 + H_{22}^2 + 2H_0^2 + 2V^2)]. \quad (15)$$

Muitos passos utilizados para resolver a integral na Eq. (15) são semelhantes àqueles já apresentados no trabalho anterior [1]. No entanto, existem algumas diferenças que justificam o detalhamento dos cálculos.

O primeiro passo é realizar as mudanças de variáveis

$$\begin{cases} \sqrt{2}H_0 = H'_0 \\ \sqrt{2}V = V' \end{cases}, \quad (16)$$

cujas consequências imediatas são a mudança do integrando na Eq. (15) para a forma

$$Z_{GUE} = \frac{1}{2} \int \int \int \int dH_{11} dH_{22} dV' dH'_0 \exp[-\alpha_u (H_{11}^2 + H_{22}^2 + H_0'^2 + V'^2)]. \quad (17)$$

O elemento de volume<sup>4</sup> para quatro graus de liberdade em coordenadas hiperesféricas é dado por

$$dH_{11} dH_{22} dV' dH'_0 = \frac{2\pi^2}{\Gamma(2)} R^3 \delta R. \quad (18)$$

Substituindo a Eq. (18) na Eq. (17) as integrais múltiplas são calculadas automaticamente, restando apenas uma única integral na variável radial  $R$ . Deste

modo a função de partição é agora calculada pela igualdade

$$Z_{GUE} = \pi^2 \int_0^\infty R \delta R R^2 \exp(-\alpha_u R^2). \quad (19)$$

Realizando a mudança de variável  $t = R^2$ , a integral na Eq. (19) assume a forma mais simplificada

$$Z_{GUE} = \pi^2 \int_0^\infty t dt \exp(-\alpha_u t). \quad (20)$$

Usando a igualdade  $\frac{\partial}{\partial \alpha} e^{-\alpha t} = -t e^{-\alpha t}$ , a integral na Eq. (20) assume a forma

$$Z_{GUE} = \frac{\pi^2}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha_u} \left( \alpha_u^{-1} \int_0^\infty dt \frac{d}{dt} e^{-\alpha_u t} \right), \quad (21)$$

que pode ser rapidamente resolvida. De fato, a função de partição do GUE assume o valor final

$$Z_{GUE} = \frac{\pi^2}{2\alpha_u^2}. \quad (22)$$

Com esse resultado a distribuição das matrizes do ensemble unitário fica bem definida quando se considera a igualdade (14) e o valor da função de partição na Eq. (22). A expressão analítica da distribuição das matrizes é dada explicitamente por

$$P(H) = \frac{2\alpha_u^2}{\pi^2} \exp[-\alpha_u (H_{11}^2 + H_{22}^2 + 2H_0^2 + 2V^2)]. \quad (23)$$

Salienta-se a arbitrariedade do parâmetro  $\alpha_u$  que será fixado mais adiante adotando o valor unitário para o espaçamento médio entre níveis vizinhos. Para alcançar esse ponto é necessário determinar a distribuição dos espaçamentos entre níveis vizinhos, como discutido na próxima seção.

## 2.2. Distribuição de espaçamentos no GUE

Cada matriz aleatória do ensemble possui dois autovalores associados  $E_+$  e  $E_-$  apresentados explicitamente na Eq. (9). Isto permite obter um único espaçamento  $s = |E_+ - E_-|$ , cujo valor é

$$s = \sqrt{(H_{11} - H_{22})^2 + 4H_0^2 + 4V^2}. \quad (24)$$

A distribuição dos espaçamentos entre níveis vizinhos será obtida efetuando as integrações indicadas na igualdade

$$P(s) = \int dHP(H) \delta \left[ s - \sqrt{(H_{11} - H_{22})^2 + 4H_0^2 + 4V^2} \right]. \quad (25)$$

Substituindo a distribuição das matrizes estabelecida na Eq. (23) na igualdade imediatamente acima temos

$$\begin{aligned} P(s) &= \frac{2\alpha_u^2}{\pi^2} \int \int \int \int dH_{11} dH_{22} dV dH_0 \times \dots \\ &\dots \times \exp \left[ -\alpha_u (H_{11}^2 + H_{22}^2 + 2H_0^2 + 2V^2) \right] \times \dots \\ &\dots \times \delta \left[ s - \sqrt{(H_{11} - H_{22})^2 + 4H_0^2 + 4V^2} \right], \end{aligned} \quad (26)$$

na qual as integrações são efetuados sobre todas as variáveis independentes que caracterizam a matriz aleatória. Para uma maior simplificação sugere-se uma mudança das variáveis

$$\begin{cases} H_{11} - H_{22} = 2x \\ H_{11} + H_{22} = 2y \end{cases}, \quad (27)$$

notando que vale a propriedade  $H_{11}^2 + H_{22}^2 = 2x^2 + 2y^2$  e que o jacobiano vale  $\left| \frac{\partial(H_{11}, H_{22})}{\partial(x, y)} \right| = 2$ . Reunindo todos estes resultados nas integrais múltiplas na Eq. (26), estas se modificam para

$$\begin{aligned} P(s) &= \sqrt{\frac{8\alpha_u^3}{\pi^3}} \int \int \int dx dH_0 dV \\ &\exp[-2\alpha_u (x^2 + H_0^2 + V^2)] \times \dots \\ &\dots \times \delta \left( s - 2\sqrt{x^2 + H_0^2 + V^2} \right), \end{aligned} \quad (28)$$

na qual a integral correspondente a variável  $y$  já foi efetuada. As integrais na igualdade imediatamente acima sugerem outras mudanças entre variáveis do tipo  $(x, H_0, V) \rightarrow (r, \theta, \varphi)$ . Nesse caso, o elemento de volume é dado por

$$dx dH_0 dV = 4\pi r^2 dr, \quad (29)$$

e, reconhecendo que as novas variáveis são coordenadas esféricas, vale a igualdade

$$x^2 + H_0^2 + V^2 = r^2. \quad (30)$$

Essa mudança permite realizar duas integrações imediatamente, restando apenas uma única integral na variável  $r$  para ser resolvida, ou seja, a igualdade (28) se torna

$$P(s) = \sqrt{\frac{2\alpha_u^3}{\pi}} \int_0^\infty d(2r)(2r)^2 \exp \left[ -\frac{\alpha_u}{2} (2r)^2 \right] \delta(s - 2r). \quad (31)$$

Utilizando a propriedade da distribuição delta de Dirac, essa integral se torna relativamente simples e o resultado é

$$P(s) = \sqrt{\frac{2\alpha_u^3}{\pi}} s^2 \exp \left( -\frac{\alpha_u}{2} s^2 \right). \quad (32)$$

Para fixar o valor do parâmetro arbitrário  $\alpha_u$  usa-se uma renormalização dada por  $\langle s \rangle = 1$ . Em outras palavras o espaçamento médio assume o valor unitário. Em notação matemática temos assim

$$\int_0^\infty ds P(s) s = 1. \quad (33)$$

Substituindo a expressão analítica da distribuição dos espaçamentos da Eq. (32) na igualdade (33), tem-se explicitamente

$$\sqrt{\frac{2\alpha_u^3}{\pi}} \int ds s^2 \exp \left( -\frac{\alpha_u}{2} s^2 \right) = 1. \quad (34)$$

Fazendo a mudança de variável  $t = \frac{s^2}{2}$  a integral é simplificada consideravelmente e a integração é efetuada sem maiores problemas. O resultado é

$$\alpha_u = \frac{8}{\pi}. \quad (35)$$

Usando este valor na Eq. (32) tem-se finalmente

$$P(s) = \frac{32}{\pi^2} s^2 \exp\left(-\frac{4}{\pi} s^2\right). \quad (36)$$

Esta distribuição de espaçamento caracteriza o ensemble unitário por meio do grau do polinômio que multiplica a função exponencial. Este valor<sup>5</sup> determina a intensidade da repulsão entre os níveis vizinhos ( $\beta = 2$ ).

A Fig. 1 mostra o gráfico<sup>6</sup> correspondente a densidade de probabilidade de espaçamentos estabelecida na Eq. (36).

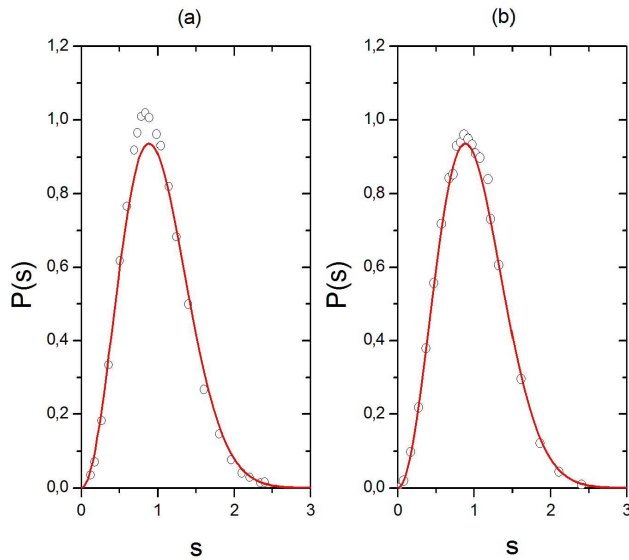


Figura 1 - Distribuição de espaçamentos do GUE.

As curvas desenhadas com linhas contínuas na Fig. 1(a) e na Fig. 1(b) correspondem à distribuição de espaçamentos no GUE. Os pequenos círculos representam os zeros  $0, 5 \pm \gamma_n$  ( $\gamma_n$  real), da função zeta de Riemann sobre a linha crítica [2]. A Fig. 1(a) mostra uma discrepância entre os valores dos zeros da função zeta, obtidos no intervalo  $0 < \gamma_n < 10^5$  e a distribuição de espaçamentos do GUE, principalmente em torno do seu valor máximo. A Fig. 1(b) mostra o excelente ajuste dos valores dos zeros da função zeta obtidos no intervalo  $10^2 < \gamma_n < 10^{12} + 10^5$  obtidos via distribuição de espaçamentos do GUE. Essas situações de ajustes manifestam a ausência da invariância translacional, no estudo do espectro dos zeros da função zeta. A invariância translacional não é uma característica fundamental do GUE.

<sup>5</sup>Leia a introdução da Ref. [1].

<sup>6</sup>Os pontos simulados foram obtidos da Ref. [2].

### 3. Ensemble Simplético Gaussiano

Supondo inicialmente que uma matriz de ordem dois com elementos quaternions não necessariamente iguais entre si seja representada pela matriz

$$\mathcal{H}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}. \quad (37)$$

A condição de hermiticidade ( $\mathcal{H}^T = \bar{\mathcal{H}}$ ) representada na forma de matriz é dada por

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{21} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{h}_{11} & \bar{h}_{12} \\ \bar{h}_{21} & \bar{h}_{22} \end{bmatrix}. \quad (38)$$

A igualdade de duas matrizes quadrada de ordem dois é uma forma sintética de exibir quatro igualdades entre quaternions dois a dois. De fato a igualdade entre os primeiros elementos das matrizes na Eq. (38) é simplesmente  $h_{11} = \bar{h}_{11}$ . Representando o quaternion  $h_{11}$  na forma matricial, essa igualdade se modifica para

$$\begin{bmatrix} z & \omega \\ -\bar{\omega} & \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{z} & \bar{\omega} \\ -\omega & z \end{bmatrix}. \quad (39)$$

A igualdade entre as matrizes na Eq. (39) revelam duas igualdades independentes entre números complexos. Uma delas é que  $z = \bar{z}$  implicando que  $z$  é um número real. Outra igualdade é  $\omega = -\bar{\omega}$  que implica em  $\omega = 0$ . Nesse caso,  $h_{11}$  é um quaternion que representa um número real. Essa análise é realizada de forma análoga para o elemento  $h_{22}$ , ou seja,  $h_{22} = \bar{h}_{22}$ , nos levando a concluir que esse quaternion também representa um número real. Considerando as igualdades  $h_{12} = \bar{h}_{21}$  ou  $h_{21} = \bar{h}_{12}$  na Eq. (38), as matrizes do ensemble GSE são escritas na forma geral

$$\mathcal{H}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ \bar{h}_{12} & h_{22} \end{bmatrix}, \quad (40)$$

em que  $h_{11}$  e  $h_{22}$  são números reais e,  $h_{12}$  é um quaternion arbitrário representado na forma  $h_{12} = a_1 + a_2i + a_3j + a_4k$  com seu respectivo quaternion conjugado  $\bar{h}_{12} = a_1 - a_2i - a_3j - a_4k$ .

O traço do quadrado da matriz  $\mathcal{H}_{2 \times 2}$  é calculado usando a matriz apresentada na Eq. (40) e após uma quantidade de álgebra obtém-se

$$\text{tr} \mathcal{H}_{2 \times 2}^2 = h_{11}^2 + h_{22}^2 + 2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2). \quad (41)$$

Os autovalores reais, cuja existência estão garantidos pela hermiticidade da matriz  $\mathcal{H}_{2 \times 2}$ , são calculados por meio do polinômio característico representado pelo determinante

$$\begin{vmatrix} h_{11} - E & h_{12} \\ \bar{h}_{12} & h_{22} - E \end{vmatrix} = 0. \quad (42)$$

Os dois autovalores são

$$E_{\pm} = \frac{h_{11} + h_{22} \pm \sqrt{(h_{11} - h_{22})^2 + 4a_1^2 + 4a_2^2 + 4a_3^2 + 4a_4^2}}{2}. \quad (43)$$

Da mesma forma que foi imaginada anteriormente para uma matriz complexa, os elementos quaternions podem ser representados, cada um deles, por uma matriz de elementos complexos. Então

$$\mathcal{H}_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} h_{11} & 0 & z & \omega \\ 0 & h_{11} & -\bar{\omega} & \bar{z} \\ \bar{z} & -\omega & h_{22} & 0 \\ \bar{\omega} & z & 0 & h_{22} \end{bmatrix}, \quad (44)$$

$$\mathcal{H}_{8 \times 8} = \begin{bmatrix} h_{11} & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & h_{11} & 0 & 0 & -a_2 & a_1 & -a_4 & a_3 \\ 0 & 0 & h_{11} & 0 & -a_3 & a_4 & a_1 & -a_2 \\ 0 & 0 & 0 & h_{11} & -a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \\ a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & h_{22} & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_4 & -a_3 & 0 & h_{22} & 0 & 0 \\ a_3 & -a_4 & a_1 & a_2 & 0 & 0 & h_{22} & 0 \\ a_4 & a_3 & -a_2 & a_1 & 0 & 0 & 0 & h_{22} \end{bmatrix}. \quad (45)$$

Calculando os traços dos quadrados das matrizes apresentadas nas Eqs. (40), (45) e (44), verifica-se as seguintes igualdades entre eles

$$\text{tr} \mathcal{H}_{8 \times 8}^2 = 2 \text{tr} \mathcal{H}_{4 \times 4}^2 = 4 \text{tr} \mathcal{H}_{2 \times 2}^2. \quad (46)$$

Para determinar os autovalores da matriz  $\mathcal{H}_{4 \times 4}$  estabelecida na Eq. (44) e da matriz  $\mathcal{H}_{8 \times 8}$  exibida na Eq. (45), obviamente é necessário uma quantidade não desprezível de trabalho algébrico. No entanto, aqueles que se aventurarem nessa tarefa terão oportunidade de confirmar que os autovalores dessas matrizes são iguais àqueles obtidos da matriz  $\mathcal{H}_{2 \times 2}$  e apresentados na igualdade (43).

### 3.1. Distribuição das matrizes de elementos quaternions

A distribuição das matrizes aleatórias no ensemble GSE é dada por

$$P(H) = \frac{1}{Z_{GSE}} \times \exp \left[ -\alpha_s (h_{11}^2 + h_{22}^2 + 2a_1^2 + 2a_2^2 + 2a_3^2 + 2a_4^2) \right]. \quad (47)$$

A função de partição é obtida por meio da igualdade

$$Z_{GSE} = \int dH \times \exp \left[ -\alpha_s (h_{11}^2 + h_{22}^2 + 2a_1^2 + 2a_2^2 + 2a_3^2 + 2a_4^2) \right], \quad (48)$$

identificando  $dH = dh_{11} dh_{22} da_1 da_2 da_3 da_4$ . As integrais embutidas na Eq. (48) são resolvidas seguindo

na qual utilizou-se a representação  $h_{12} = z + j\omega$  para o quaternion da diagonal secundária. Por sua vez, quando os elementos complexos da matriz  $\mathcal{H}_{4 \times 4}$  são representados por suas respectivas matrizes, o resultado é uma matriz de maior ordem  $\mathcal{H}_{8 \times 8}$  com todos os elementos reais, explicitamente escrita na forma

os mesmos caminhos matemáticos adotados no ensemble unitário, ou seja, usando as mesmas técnicas exibidas explicitamente anteriormente. Enfim, para aqueles leitores interessados em chegar, por seus próprios esforços, na expressão da função de partição desse ensemble, esse prazeroso trabalho conduzirá ao resultado

$$Z_{GSE} = \frac{1}{4} \left( \frac{\pi}{\alpha_s} \right)^3. \quad (49)$$

Considerando as Eqs. (23) e (49), a distribuição  $P(H)$  fica estabelecida inteiramente para o GSE.

### 3.2. Distribuição de espaçamentos no GSE

A partir dos autovalores (43) determina-se de forma imediata o espaçamento entre eles, cujo valor é

$$s = \sqrt{(h_{11} - h_{22})^2 + 4(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)}. \quad (50)$$

A densidade de probabilidade dos espaçamentos entre os níveis vizinhos é obtida por meio da igualdade

$$P(s) = \int dHP(H) \delta \left[ s - \sqrt{(h_{11} - h_{22})^2 + 4(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)} \right]. \quad (51)$$

Novamente, essa integral contendo a função delta de Dirac pode ser integrada seguindo os mesmos passos dados para o caso do ensemble unitário. A densidade de espaçamentos obtida como resultado é

$$P(s) = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \alpha_s^{\frac{3}{2}} s^4 \exp \left( -\frac{\alpha_s}{2} s^2 \right). \quad (52)$$

Para pequenos valores de espaçamentos o termo polinomial é dominante, ou seja,  $P(s) \sim s^4$ . A repulsão de nível ( $\beta = 4$ ), nesse caso, é maior que aquela apresentada no Ensemble Unitário.

A renormalização (33) definida anteriormente fixa o valor da constante  $\alpha_s$  na igualdade (52). Após alguns cálculos obtém-se o valor

$$\alpha_s = \frac{128}{9\pi}. \quad (53)$$

Substituindo o valor  $\alpha_s$  da Eq. (53), na distribuição na Eq. (52), determina-se em definitivo a distribuição de espaçamentos

$$P(s) = \frac{2^{18}}{3^6 \pi^3} s^4 \exp\left(-\frac{64}{9\pi} s^2\right). \quad (54)$$

A Fig. 2 a seguir apresenta os gráficos das distribuições de espaçamentos<sup>7</sup> dos ensembles gaussianos de matrizes aleatórias de ordem dois.

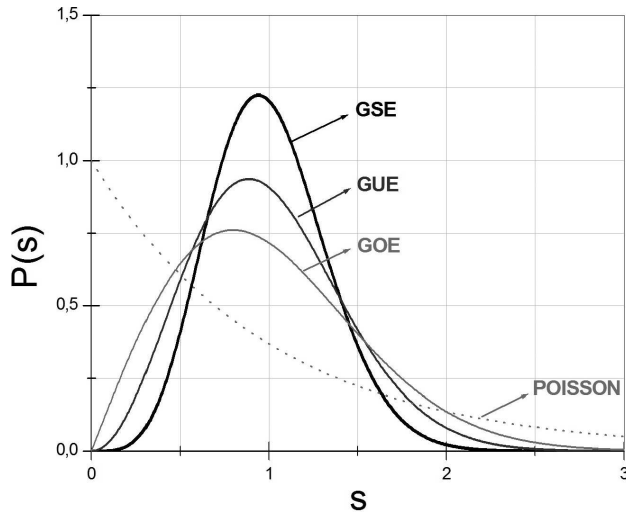


Figura 2 - Distribuições de espaçamentos.

Nota-se visualmente na Fig. 2 as diferenças entre as distribuições de espaçamentos dos ensembles de matrizes  $2 \times 2$ . O decaimento assintótico da distribuição de espaçamentos no GSE é muito maior do que aqueles apresentados pelas outras distribuições. É nesta mesma distribuição que a repulsão entre os níveis é mais forte, como podemos verificar na Fig. 2 observando que

próximo à origem a distribuição de espaçamentos do GSE está mais afastada do eixo vertical do que as distribuições de espaçamentos do GUE e do GSE. Observa-se também que o valor máximo da distribuição de espaçamentos do GSE é mais próximo do valor unitário para o espaçamento.

#### 4. Comentários finais

As distribuições de espaçamentos entre os níveis vizinhos seguem leis bem definidas e cada distribuição de espaçamentos carrega consigo um caráter de unicidade. A simetria apresentada pelo sistema seleciona qual dessas distribuições disponíveis deve ser utilizada apropriadamente para descrever um espectro específico [1, 5]. O trabalho em si é uma oportunidade de testemunhar a construção de ensembles de matrizes aleatórias utilizando um princípio variacional e rever a aplicabilidade dos conceitos dos números reais, complexos e quaternions. As construções de novos ensembles utilizando o cálculo das variações emergem da necessidade de classificar novos fenômenos que são descobertos. Atualmente, verificou-se que alguns espectros [6] se comportam em desacordo com as estatísticas gaussianas. Por exemplo, aqueles espectros que obedecem a uma lei do tipo potência ou mesmo a uma distribuição de Lévy. Mas esta é outra história que será contada em detalhes num trabalho posterior.

#### Referências

- [1] A.C. Bertuola, M.S. Hussein e M.P. Pato, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **28**, 3 (2006) .
- [2] M.L. Mehta, *Random Matrices* (Academic Press, Nova York, 1990).
- [3] R.S. Salinas, *Física Estatística* (Edusp, São Paulo, 2002).
- [4] G.B. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, (Academic Press, San Diego, 1995).
- [5] F. Haake, *Quantum Signatures of Chaos*, (Springer-Verlag, Nova York, 1991).
- [6] R.P.A. Lima, R. da Cruz, J.C. Cressoni and M.L. Lyra, *Physical Review B* **69**, 165117-1 (2004).

<sup>7</sup>As expressões analíticas da distribuição de Poisson ( $P(s) = \exp(-s)$ ) e a da distribuição de espaçamento de Wigner para o Ensemble Ortogonal (GOE) ( $P(s) = \frac{\pi}{2} s \exp -\frac{\pi}{4} s^2$ ) foram apresentadas na Ref. [1].