

Introdução ao teorema de Nash e às Branas-mundo

(Introduction to Nash's theorem and brane-worlds)

A.J.S. Capistrano¹ e P.I. Odon²

¹Universidade Federal do Tocantins, Porto Nacional, TO, Brasil

²Odyssey School, Boston MA, USA

Recebido em 6/5/2009; Aceito em 1/7/2009; Publicado em 26/3/2010

Apesar dos modelos de Branas-mundo terem recebido atenção considerável nos últimos anos por fornecerem várias opções à física contemporânea, seus mecanismos não são completamente entendidos ou apropriadamente justificados. Tendo em vista tal dificuldade, neste trabalho fornecemos uma contribuição pedagógica dirigida especialmente aos alunos de pós-graduação em física, fazendo uma abordagem introdutória a um dos temas importantes em física e geometria no que diz respeito aos fundamentos da teoria de imersão de variedades. Apresentamos uma descrição do teorema de imersão de Nash de 1956 que mostra como fazer uma imersão local entre variedades Riemannianas mantendo a regularidade e diferenciabilidade das funções de imersão, e de como isso é aplicado à física sob o ponto de vista das Branas-mundo.

Palavras-chave: Branas-mundo, teoria de Imersão, teorema de Nash.

Although brane-world models have gained considerable attention in the last years for providing several options for contemporary physics, their mechanisms are not completely understood or properly justified. Taking into account such difficulty, in this work we provide a pedagogical contribution, written especially for physics graduate students, and present an introductory approach to one of the important themes in physics and geometry concerning the foundations of immersion theory of manifolds. We present a description of Nash's embedding theorem of 1956 which shows how to do a local embedding between Riemannian manifolds while preserving the regularity and differentiability of the embedding functions, and how it can be applied to physics in the context of the brane-worlds.

Keywords: Brane-world, Immersion theory, Nash's theorem.

1. Introdução

A geometria Riemanniana tem exercido uma forte influência na física desde o início do século XX com o advento da relatividade geral. Tanto é assim que os estudantes de física aprofundam seus conhecimentos em geometria através do estudo da geometria Riemanniana. No entanto, ela não é a única opção disponível, no sentido de que estruturas mais gerais têm sido amplamente estudadas, como a teoria de imersões de variedades. Porém, particularmente em física, o tema é muito pouco comentado tanto nos cursos básicos de graduação quanto nos cursos de pós-graduação devido à sua especificidade. Com o objetivo de dar uma contribuição suprimindo esta questão, discutimos um dos trabalhos importantes na história da geometria, e invariavelmente repercutindo nas teorias físicas, proposto há pouco mais de cinquenta anos por John Nash. Nash [1, 2] apresentou dois trabalhos sendo que o primeiro, no ano de 1954, tratava de imersões globais e o se-

gundo, de 1956, resolvia o clássico problema da imersão local entre variedades Riemannianas usando argumentos de regularidade e diferenciabilidade das funções de imersão, onde iremos focar nossa atenção.

O presente trabalho é dirigido principalmente aos estudantes de pós-graduação das áreas de relatividade geral e teorias multidimensionais. Damos ênfase ao resgate de pontos principais acerca da geometria imersões locais, tais como seu desenvolvimento histórico, conceitos e esclarecimento de passagens matemáticas muitas vezes obscurecidas na literatura mais especializada no que diz respeito à imersão. No entanto, dada a complexidade do tema, limitamo-nos a uma breve descrição do teorema de Nash e sua aplicação na estruturação de equações gerais comuns a quaisquer modelos de Branas-mundo, os quais são fundamentalmente variedades imersas. Formulado sob um contexto multidimensional com inspiração nos modelos de Supercordas, o programa de Branas-mundo foi proposto originalmente em 1998 como tentativa de re-

¹E-mail: capistrano@mail.uft.edu.br.

solver o problema de hierarquia das interações fundamentais. Tal problema pode ser resumido no questionamento acerca de como a interação gravitacional é mais fraca quando comparada às demais interações fundamentais e de como podemos unificá-las com a elaboração de uma teoria física mais geral, incluindo aspectos quânticos e gravitacionais. Atualmente, os modelos de Branas-mundo têm sido amplamente estudados particularmente em aplicações à cosmologia, como, por exemplo, o problema da expansão acelerada do universo.

O artigo está organizado em cinco seções. Na seção II apresentamos uma introdução histórica e conceitual do problema da imersão. Aspectos mais técnicos como a descrição do teorema de Nash, da obtenção das equações de Gauss-Codazzi-Ricci e do princípio de ação Einstein-Hilbert adaptado às Branas-mundo são introduzidos na seção III. Na seção IV apresentamos uma discussão acerca de trabalhos com base na teoria de imersões. Finalmente, na última seção apresentamos as considerações finais.

2. O problema da imersão

O desenvolvimento da teoria de Imersões confunde-se com a história da geometria Riemanniana. Antes de 1850, uma superfície bidimensional era considerada apenas como uma superfície *imersa* no espaço \mathcal{R}^3 . Por exemplo, considere uma superfície onde cada um dos seus pontos podem ser definidos pela parametrização de Monge $\mathcal{X} : R^2 \rightarrow R^3$

$$\mathcal{X}(u, v) = (u, v, f(u, v)), \quad (1)$$

onde $u = x$ e $v = y$, sendo que $f(u, v)$ é uma função diferenciável. Esta parametrização é caracterizada pela equação

$$g(x, y, z) = cte, \quad (2)$$

onde $g(x, y, z) : R^3 \rightarrow R^2$ é também uma função regular e diferenciável. A característica da função de ser regular permite-nos usar o teorema das funções implícitas o que possibilita extrair outra função diferenciável $z = f(x, y)$. O vetor normal à superfície pode ser obtido pela relação

$$\hat{n} = \frac{\nabla g}{|\nabla g|}, \quad (3)$$

onde concluímos que

$$dg = \langle \nabla g, dl \rangle = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial z} dz = 0, \quad (4)$$

sendo $dl = (dx, dy, dz)$ tangente à superfície. Ao variarmos a direção do vetor tangente, a noção de forma local de uma superfície pode ser obtida pela análise de como os vetores normais variam sobre a mesma ou, equivalentemente, de como a superfície se afasta do plano

tangente local. As variações máximas e mínimas das direções no vetor normal \hat{n} são dadas respectivamente por k_1 e k_2 . Estes extremos são usados para calcular as direções principais pela fórmula de Euler

$$k(u) = k_1 \cos(\theta) + k_2 \sin(\theta). \quad (5)$$

Por outro lado, C.F Gauss propôs idéias bem diferentes contribuindo decisivamente para o que conhecemos hoje por geometria *não-Euclidiana* [3–5]. O quinto postulado de Euclides, conhecido como o *postulado das paralelas*, só pode ser violado se não existirem retas paralelas ou se existir mais de uma reta paralela à outra passando por algum ponto externo, algo que era inconcebível naquela época. O espaço descoberto por Gauss, J. Bolyai e N.I. Lobachevsky chamado de *espaço hiperbólico*, é o espaço onde o postulado das paralelas de Euclides é substituído pela suposição de que, para qualquer reta, não existe apenas uma, mas muitas retas paralelas passando por qualquer ponto externo dado. Isso implica que a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que 180° e que não existem triângulos semelhantes.

A partir de 1816, Gauss fez um levantamento geodésico de certas áreas da Alemanha e observou que bastavam medidas tangenciais para descrever a topografia do condado e assim, produziu um mapa bidimensional a partir de dados tridimensionais. O conceito inovador de Gauss foi extremamente importante na teoria da relatividade geral de Einstein aplicando a idéia de que a geometria de uma superfície curva pode ser estudada sem a referência a um espaço Euclidiano de dimensão superior. Essa idéia foi desenvolvida por B. Riemann que apresentou a Gauss um outro tipo de espaço não-Euclidiano, o *espaço elíptico*. Da mesma forma que o espaço hiperbólico, o espaço elíptico também se baseia na quebra do quinto postulado de Euclides: as retas paralelas não existem e como H. Poincaré [6], Riemann deu sua interpretação para os termos ponto, reta e plano. Como plano, ele escolheu a superfície da esfera. Seus pontos, como os de Poincaré, continuavam sendo as posições descritas por Descartes. As retas de Riemann eram os círculos máximos, *i.e.*, as geodésicas sobre uma esfera.

O problema do espaço de Riemann era que além de ser inconsistente com o 5º postulado de Euclides também era incompatível com dois outros postulados. Ele reinterpretou o 2º postulado declarando que este apenas garantia que as retas não tivessem limites. Entretanto Riemann não foi tão feliz em solucionar os problemas do espaço elíptico com o 1º postulado de Euclides, que diz *dados dois pontos, há um segmento de reta que os une*. Apesar disso, sua obra e a necessidade de quebrar outros postulados além do postulado das paralelas causaram um impacto na matemática do final do século XIX.

O conceito abstrato de uma variedade Riemanniana, sendo esta definida intrinsecamente, foi formulada

no trabalho de Riemman [7] em 1850 em que descreveu a forma local da superfície de uma variedade com o tensor de curvatura

$$R(U, V)W = \nabla_U \nabla_V W - \nabla_V \nabla_U W - \nabla_{[U, V]}W ,$$

o qual depende apenas da métrica, porém restrita a uma *classe de equivalência* de variedades, isto é, diferentes variedades que possuem o mesmo tensor de curvatura. Neste sentido, não há referência prévia a um padrão de forma ou curvatura. Por exemplo, ao tomarmos um plano temos que o tensor de curvatura R_{1212} coincide com a curvatura gaussiana K , conforme o *teorema egregium* de Gauss $K = k_1 k_2$, que é nula. O mesmo resultado ocorre para um toro, assim, para a geometria Riemanianna um toro é essencialmente um plano. Note que de acordo com a geometria diferencial devemos definir duas quantidades chamadas *curvatura gaussiana* e *curvatura média* para podermos definir a forma de uma superfície.

No entanto, a curvatura gaussiana, por si mesma, não define a forma local sendo somente uma quantidade intrínseca à geometria. Para tanto, faz-se necessário a introdução da curvatura média H , que por sua vez, é uma quantidade extrínseca, *i.e.*, está vinculada com a definição do vetor normal \hat{n} , dada por

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} .$$

Por conseguinte, se formos ao \mathfrak{R}^3 , encontramos que $R_{1212} = K$, onde recaímos no mesmo problema, pois a quantidade H está ausente. Daí a noção de curvatura extrínseca [8] que mede a variação do vetor normal à superfície. Portanto, a forma local fica definida em termos destes dois números, K e H .

De fato, como a geometria Riemanniana carece da quantidade H , segundo os críticos de Riemann, a mesma tirava a noção intuitiva necessária à geometria no sentido de impossibilitar uma melhor conceituação acerca das formas das coisas. A noção intuitiva de formas foi perdida no contexto Riemanniano e foi contestada de forma vigorosa principalmente pelos filósofos Kantianos. [9] no livro *Crítica da Razão Pura* defende que

O conceito de espaço [Euclidiano] não é de forma alguma de origem empírica mas uma necessidade do pensamento.

A definição da forma local da geometria Riemanniana foi objeto de uma conjectura feita por L. Schlaefli [10,11] em 1873 supondo que uma variedade Riemanniana deveria ser consistente com a teoria gaussiana das superfícies imersas. Em outras palavras, para resolver a

²Nas equações de Gauss-Codazzi-Ricci, denotamos que os índices próximos aos colchetes são anti-simétricos onde fazemos a indicação com a inclusão da barra vertical ao lado do índice próximo ao colchete, *i.e.*,

$$2A_{[\gamma|ma}A_{\delta]nb} = A_{\gamma ma}A_{\delta nb} - A_{\delta ma}A_{\gamma nb}.$$

ambiguidade do tensor de Riemann qualquer variedade deveria ser imersa em uma variedade maior, sendo esta última a referência de curvatura. Mas, como fazer a imersão de uma variedade? Uma indicação inicial acerca de uma possível solução veio com as equações de Gauss-Codazzi-Ricci.

Com base na suposição de Schlaefli, podemos conceber genericamente uma imersão como sendo a aplicação $\mathcal{X}^A : \bar{V}_n \rightarrow V_D$ em que \bar{V}_n é uma subvariedade Riemanniana a ser imersa em V_D que é o espaço ambiente ou *bulk* Riemanniano onde será feita a imersão. As componentes $\mathcal{X}^A = f^A(x^1, x^2, \dots, x^D)$ associam cada ponto de \bar{V}_n de dimensão n com forma quadrática $\phi = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ um ponto de V_D de métrica \mathcal{G}_{AB} e coordenada \mathcal{X}^A , tal que

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \mathcal{G}_{AB}\mathcal{X}_{,\mu}^A\mathcal{X}_{,\nu}^B .$$

Assim, podemos encontrar a primeira equação de imersão

$$g_{\mu\nu} = \mathcal{G}_{AB}\mathcal{X}_{,\mu}^A\mathcal{X}_{,\nu}^B ,$$

onde os $\mathcal{X}_{,\mu}^A$ são componentes de vetores tangentes à \bar{V}_n . Em termos de notação, para a derivada comum usaremos a simbologia $(,)$ e para a derivada covariante $(;)$. Além disso devemos ter $m - n$ vetores normais à \bar{V}_n que satisfazem a equação de ortogonalidade

$$\mathcal{G}_{AB}\mathcal{X}_{,\mu}^A\eta_b^B = 0 .$$

Escolhendo os vetores η_a^A como sendo mutuamente ortogonais e de norma ± 1

$$\mathcal{G}_{AB}\eta_a^A\eta_b^B = g_{ab} = \pm\delta_{ab} .$$

As equações de imersão nos informam basicamente como a variedade imersa e o espaço ambiente estão relacionados uma vez determinadas as variáveis de imersão \mathcal{X}^A e η_a^A .

A geometria imersa é determinada pela solução destas equações que definem

$$k_{\mu\nu a} = -\mathcal{X}_{,\mu}^B\eta_{a,\nu}^A\mathcal{G}_{AB} , \tag{6}$$

$$A_{\mu ab} = \eta_{a,\mu}^A\eta_b^B\mathcal{G}_{AB} , \tag{7}$$

onde $k_{\mu\nu a}$ e $A_{\mu ab}$ são respectivamente a curvatura extrínseca (segunda forma fundamental) e o vetor torção (terceira forma fundamental). Para mostrar a existência da solução devemos calcular as condições de integrabilidade das equações de imersão. Tais condições são fornecidas pelas equações de Gauss, Codazzi e Ricci²

$$R_{\alpha\beta\gamma\sigma} = 2g^{ab}k_{a\alpha[\gamma}k_{b\sigma]\beta} + \mathcal{R}_{ABCD}\mathcal{X}_{,\alpha}^A\mathcal{X}_{,\beta}^B\mathcal{X}_{,\gamma}^C\mathcal{X}_{,\sigma}^D$$

$$2k_{a[\alpha\beta;\gamma]} = 2g^{cd}A_{[cd\gamma}k_{c\alpha]\beta} + \mathcal{R}_{ABCD}\mathcal{X}_{,\alpha}^A\eta_a^B\mathcal{X}_{,\beta}^C\mathcal{X}_{,\gamma}^D$$

$$2A_{[ba\gamma;\delta]} = 2g^{cd}A_{[cb\delta}A_{d]a\gamma} + 2g^{cd}k_{[c\gamma\delta}k_{d]\delta\gamma} + \mathcal{R}_{ABCD}\eta_a^A\eta_b^B\mathcal{X}_{,\gamma}^C\mathcal{X}_{,\delta}^D,$$

onde $A, B \rightarrow 1\dots D$, $\alpha, \beta \rightarrow 1\dots n$, $\bar{g}_{\alpha\beta}$ é a métrica da subvariedade imersa não-perturbada \bar{V}_n cuja barra indica que o elemento em questão não sofreu uma perturbação. Os $\bar{\eta}_a, \bar{\eta}_b$ são as componentes de vetores normais a \bar{V}_n com métrica \bar{g}_{ab} do espaço interno B_n desses vetores, onde $a, b \rightarrow n + 1\dots D$.

Basicamente, as equações de Gauss e Ricci são equações diferenciais que relacionam as componentes tangenciais e normais, respectivamente, à curvatura extrínseca. Uma outra relação é dada pela equação de Codazzi na qual precisamos “diferenciar” a curvatura extrínseca considerada um tensor [8]. Em geral, essas equações nos fornecem como os espaços de métricas $g_{\mu\nu}$, g_{ab} e \mathcal{G}_{AB} se relacionam. Portanto, a solução do problema da imersão depende da solução dessas equações, o que não é tarefa fácil devido à forte não-linearidade das mesmas. Uma demonstração clássica sobre como obter estas equações como originalmente concebidas podem ser encontradas em [11, 12]. No entanto, iremos mostrar um processo ligeiramente diferente obtendo essas equações sob o contexto das Branas-mundo tomando como princípio o teorema de Nash.

Embora geometria Riemanniana tenha consolidado como padrão de geometria com o advento da relatividade geral em 1916, a questão da imersão de variedades Riemannianas ainda estava em aberto. Logo após Einstein ter completado seu artigo em 1915, a resposta à crítica de Kant sobre o caráter não intuitivo das geometrias não-Euclidianas, que parece ter sido atribuída ao próprio Riemann, tornou-se realizável. Riemann argumentou que se a intuição é a base da verdade geométrica, atribuindo formas e comparações, então isto é de fato algo que tem a ver com a física, já que ela depende de medidas e instrumentos. A conjectura de Schaeffli ficou conhecida como o *Problema Inverso de Riemann*, ou seja, o problema de definição da forma local de uma superfície. As equações de Gauss-Codazzi-Ricci foram inicialmente resolvidas por M. Janet [13], E. Cartan [14] e C. Burstin [15], porém usando séries de potências convergentes (funções analíticas). No entanto, devido à rápida convergência das funções, as soluções mostravam-se como soluções particulares do problema da integração dessas equações, e portanto não eram válidas para qualquer variedade. A generalidade da solução das equações de Gauss-Codazzi-Ricci viria somente décadas depois com os trabalhos de J. Nash pelo uso de um processo perturbativo na geometria com funções regulares e diferenciáveis.

3. Teoria de imersões de variedades

Com a utilização de argumentos de diferenciabilidade e regularidade das funções, o teorema proposto por

Nash [1, 2] em 1954-56 resolve o problema de imersão, mais especificamente o trabalho de 1956 onde trata a imersão local entre variedades Riemannianas. Em 1954, Nash mostrou que uma variedade C^1 pode ser imersa em espaços Euclidianos de dimensões $2n$ e em 1956 tratou o caso de C^k para $3 \leq k \leq \infty$. Ele demonstrou como fazer a imersão local de uma variedade diferenciável mantendo sua regularidade, sendo generalizado por R. Greene estendendo o teorema de Nash para variedades pseudo-Riemannianas (métricas não-positivas) [16]. Dessa forma, a dimensão D do espaço ambiente para uma imersão isométrica e local de uma variedade \bar{V}_n depende das funções de imersão. Por exemplo, se utilizarmos o teorema de Janet-Cartan-Burstin com funções analíticas, o espaço total terá o número de dimensões $D \leq n(n+1)/2$. Todavia, ao utilizarmos o teorema de Nash-Greene o número de dimensões do espaço ambiente cresce para $D \leq n(n+3)/2$ [11]. Em resumo, o teorema de Nash pode ser enunciando da seguinte forma

Seja uma função de imersão \mathcal{X} tal que a aplicação $\mathcal{X} : \bar{V}_n \rightarrow V_D$ seja regular e diferenciável, então podemos construir a imersão de qualquer variedade \bar{V}_n em uma variedade V_D suficientemente grande por deformação contínua em uma direção normal em um ponto da variedade \bar{V}_n .

O procedimento de Nash inova em dois aspectos: primeiro por mostrar que não há necessidade da hipótese de analiticidade como usado por Janet-Cartan. Segundo, pela natureza perturbativa que é dinâmica, *i.e.*, da possibilidade de obter equações de movimento e integrá-las, tal como no problema de Cauchy em mecânica. Cabe lembrar que originalmente Nash estava preocupado em resolver apenas o problema da imersão local sob o ponto de vista estritamente matemático, e não em fazer uma “física de variedades”. No entanto, se analisarmos do ponto de vista físico, como, por exemplo, em cosmologia, o processo de criação de grandes estruturas no universo, tais como galáxias, é descrito pela perturbação da geometria [17]. Fazendo uma análise mais profunda do teorema, concluímos que a proposta introduzida por Nash é compatível com a fundamentação de uma teoria gravitacional *imersa*, tal como as Branas-mundo. É importante notar que estudos sobre imersões dentro de uma abordagem perturbativa foram originalmente propostos em um trabalho póstumo por E.P. Campbell [18] em 1926, porém usando a analiticidade das funções de imersão.

3.1. Perturbações de Nash

As Branas-mundo apresentaram-se de fato como estrutura teórica em 1998 com os trabalhos de Arkani-Hamed, G. Dvali e G. Dimopolous [19], ou abreviadamente ADD, propondo de forma *sui generis*

uma solução ao problema de hierarquia das interações. Como apontado pelo esquema de ADD, a escala de Planck para a gravitação forte é desprovida de caráter experimental, portanto não impede a elaboração de uma teoria gravitacional em escala de energia menor, igual às demais interações, em escala Tev,³ o que implica que as dimensões extras devem ser maiores que o comprimento de Planck ($L_{planck} \sim 10^{-33}$ cm). Em resumo, a proposta de ADD à uma teoria de Branas-mundo contém três postulados básicos:

1. Existe uma variedade maior ou ambiente (*bulk*) com dimensão $D > 4$ que é solução das equações de Einstein;
2. O espaço-tempo quadridimensional é imerso no espaço ambiente e gerado pelo movimento de Brana-mundo no mesmo espaço;
3. Em escala Tev, a gravitação descrita pela métrica da variedade de 4 dimensões imersa oscila no espaço ambiente e as ondas geradas propagam-se no espaço ambiente, mas as demais interações permanecem confinadas à Brana-mundo.

A idéia central é que temos um estrutura teórica compatível com a teoria de imersão de variedades. Para entendermos com mais clareza o processo, podemos adaptar o teorema de Nash à brana-mundo apresentando um detalhamento de como se fazer a imersão escrevendo as equações primeiramente para o caso sem perturbação e depois estendendo-as ao caso perturbativo na próxima subseção.

Podemos inicialmente fazer uma imersão *local e isométrica* com a aplicação $\mathcal{X}^A : \bar{V}_4 \rightarrow V_D$. Nesse contexto, consideramos a variedade \bar{V}_4 como a Brana-mundo quadridimensional não-perturbada. Como veremos, a perturbação dessa variedade imersa nos dará o comportamento dinâmico da mesma em V_D que é o espaço ambiente arbitrário a ser feita a imersão. Temos também que $A = 1 \dots D$ e $D = 4 + N$, onde N representa o número de dimensões extras. As componentes $\mathcal{X}^A = f^A(x^1, x^2, \dots, x^D)$ associam cada ponto de \bar{V}_4 um ponto de V_D de coordenada \mathcal{X}^A .

Além das propriedades de regularidade e diferenciabilidade, que tais variedades, por construção, devam apresentar, \mathcal{X}^A devem também satisfazer novamente as equações de imersão:

$$\mathcal{X}_{,\alpha}^A \mathcal{X}_{,\beta}^B \mathcal{G}_{AB} = \bar{g}_{\alpha\beta} \quad , \quad (8)$$

$$\mathcal{X}_{,\alpha}^A \bar{\eta}_a^B \mathcal{G}_{AB} = 0 \quad , \quad (9)$$

$$\bar{\eta}_a^A \bar{\eta}_b^B \mathcal{G}_{AB} = \bar{g}_{ab} \quad , \quad (10)$$

onde temos a normalização dos vetores $\bar{\eta}$ para $\bar{g}_{ab} = \epsilon_a \delta_{ab}$ com $\epsilon_a = \pm 1$ cujos sinais estão relacionados às possíveis assinaturas das dimensões extras. Conforme

³Lembramos que um *eletron-volt* corresponde a energia adquirida por um elétron ao atravessar, no vácuo, uma diferença de potencial de um *volt*, assim $1 \text{ ev} = 1,6022 \times 10^{-19} \text{ J}$ e $1 \text{ Tev} = 10^{12} \text{ ev}$.

o *teorema de Nash*, ao perturbarmos a geometria da variedade no *bulk*, criamos uma nova geometria que deve estar, para nossos fins, mesmo após a perturbação, confinada no mesmo *bulk*, *i.e.*, V_D e \bar{V}_4 foram tomadas, de forma independente, como variedades Riemannianas.

3.2. Variáveis da Imersão

De acordo com o teorema de Nash, a perturbação da geometria imersa é feita em uma direção normal à superfície da mesma. Nesse sentido, para fazermos a perturbação de um objeto geométrico Ω situado em um ponto p da variedade, devemos medir a variação de Ω ao longo deste ponto tal que

$$\Omega' = \Omega_p + \delta\Omega_p.$$

A medida de Ω ao longo de uma trajetória de p é feita com a introdução da derivada de Lie \mathcal{L} definida pelo ponto p na variedade e pelo seu vetor tangente. Sendo assim, podemos por exemplo comparar dois tensores ainda que situados em pontos distintos em uma mesma curva. Essa comparação é feita pelo “arraste” (*dragging*) dos tensores ao longo da curva.

Adaptando essa idéia para o processo de imersão em Branas-mundo, a derivada de Lie nos permite fazer a conexão entre as coordenadas do *bulk* e da Brana-mundo. Para entender isso, podemos optar a seguinte perturbação orientada em uma direção normal $\xi = \bar{\eta}$ na derivada de Lie, assim temos

$$\mathcal{Z}^A = \mathcal{X}^A + \delta y^a (\mathcal{L}\mathcal{X})_a^A \quad .$$

Podemos calcular os parênteses de Lie $(\mathcal{L}\mathcal{X})_a^A = [\bar{\eta}, \mathcal{X}]_a^A$, sendo que expressamos X na base vetorial $X = X^a \frac{\partial}{\partial x^a}$ com parâmetro x^a da curva definida em um ponto qualquer na Brana-mundo, e $\bar{\eta} = \bar{\eta}^A \frac{\partial}{\partial x^A}$. Assim, temos

$$[\bar{\eta}, \mathcal{X}]_a^A = \bar{\eta}^A \frac{\partial X^a}{\partial x^A} \frac{\partial}{\partial x^a} - X^b \frac{\partial \bar{\eta}^A}{\partial x^b} \frac{\partial}{\partial x^A} \quad ,$$

como o vetor normal não depende das coordenadas x^a , então $\frac{\partial \bar{\eta}^A}{\partial x^a} = 0$, restando-nos somente

$$[\bar{\eta}, \mathcal{X}]_a^A = \bar{\eta}^A \delta_A^a \frac{\partial}{\partial x^a} = \bar{\eta}^A \frac{\partial}{\partial x^A} = \bar{\eta}$$

Obtemos então

$$\mathcal{Z}^A = \mathcal{X}^A + \delta y^a \bar{\eta}_a^A \quad , \quad (11)$$

que nos informa que a perturbação da coordenada de imersão \mathcal{X}^A é feita na direção normal à Brana-mundo, ou à variedade imersa, conforme o teorema de Nash.

De forma análoga, obtemos para perturbação do vetor normal η^A

$$\eta^A = \bar{\eta} + (\mathcal{L}\bar{\eta})^A = \bar{\eta}^A \quad .$$

Assim, concluímos que o vetor normal não se altera sob deformações, isto é $\bar{\eta} = \eta$.

O resultado \mathcal{Z}^A deve definir uma nova geometria Riemanniana de dimensão \bar{V}_4 cuja imersão é dada por \mathcal{Z}^A que portanto deve satisfazer equações semelhantes a Eqs. (8), (9) e (10). Desta forma, podemos então estabelecer as novas equações de imersão da variedade deformada como

$$\mathcal{Z}_{,\mu}^A \mathcal{Z}_{,\nu}^B \mathcal{G}_{AB} = g_{\mu\nu} , \quad (12)$$

$$\mathcal{Z}_{,\mu}^A \eta_b^B \mathcal{G}_{AB} = g_{\mu b} , \quad (13)$$

$$\eta_a^A \eta_b^B \mathcal{G}_{AB} = g_{ab} = \epsilon_a \delta_{ab} , \quad (14)$$

onde $g_{\mu\nu}$, $g_{\mu a}$ e g_{ab} são quantidades perturbadas, lembrando que o processo perturbativo *não é arbitrário*, ou seja, o espaço de imersões deve ser o mais *suave possível*.

Usando as Eqs. (9) e (11), podemos escrever a Eq. (13) como

$$g_{\mu b} = (\mathcal{X}_{,\mu}^A + \delta y^a \eta_{a,\mu}^A) \eta_b^B \mathcal{G}_{AB} = \mathcal{X}_{,\mu}^A \eta_b^B \mathcal{G}_{AB} + \delta y^a \eta_{a,\mu}^A \eta_b^B \mathcal{G}_{AB},$$

fornecendo-nos

$$g_{\mu b} = \mathcal{Z}_{,\mu}^A \eta_b^B \mathcal{G}_{AB} = \delta y^a A_{\mu ba} , \quad (15)$$

onde $A_{\mu ba}$ é o vetor torção na geometria perturbada. Note que como $\eta^A = \bar{\eta}^A$, então

$$A_{\mu ba} = \eta_{a,\mu}^A \eta_b^B \mathcal{G}_{AB} = \bar{\eta}_{a,\mu}^A \bar{\eta}_b^B \mathcal{G}_{AB} = \bar{A}_{\mu ba} ,$$

mostrando-nos que o vetor torção não se altera sob deformações. O par $\{\mathcal{Z}_{,\mu}^A, \eta_a^A\}$ é a base de imersão da Brana-mundo no *bulk* chamado *referencial Gaussiano* de coordenadas.

Vamos agora a partir das equações de imersões expressar a métrica $g_{\mu\nu}$ da Brana-mundo em termos de quantidades perturbadas. Para tanto tomaremos as Eqs. (11) e (12), tal que podemos escrever

$$g_{\mu\nu} = \mathcal{Z}_{,\mu}^A \mathcal{Z}_{,\nu}^B \mathcal{G}_{AB} = (\mathcal{X}_{,\mu}^A + \delta y^a \eta_{a,\mu}^A) (\mathcal{X}_{,\nu}^B + \delta y^b \eta_{b,\nu}^B) \mathcal{G}_{AB} = \mathcal{X}_{,\mu}^A \mathcal{X}_{,\nu}^B \mathcal{G}_{AB} + \delta y^b \mathcal{X}_{,\mu}^A \eta_{b,\nu}^B \mathcal{G}_{AB} + \delta y^a \mathcal{X}_{,\nu}^B \eta_{a,\mu}^A \mathcal{G}_{AB} + \delta y^a \delta y^b \eta_{a,\mu}^A \eta_{b,\nu}^B \mathcal{G}_{AB} .$$

Usando a Eq. (8) e a curvatura extrínseca dada pela Eq. (6), podemos escrever após uma mudança de índices

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} - 2\delta y^a \bar{k}_{\mu\nu a} + \delta y^a \delta y^b \eta_{a,\mu}^A \eta_{b,\nu}^B \mathcal{G}_{AB} . \quad (16)$$

No entanto, precisamos saber como definir o termo $\eta_{a,\mu}^A \eta_{b,\nu}^B \mathcal{G}_{AB}$ e expressá-lo em termos de quantidades extrínsecas (curvatura extrínseca e vetor torção). Essa motivação advém do teorema de Nash que nos informa

que a perturbação da geometria tem influência de elementos extrínsecos a ela. Assim, podemos tomar a seguinte expressão para $\eta_{a,\mu}^A$ como uma combinação linear em termos das bases gaussianas $\{\mathcal{X}_{,\mu}^A, \eta_a^A\}$ que correspondem às equações de Gauss-Weingerten [12]

$$\eta_{a,\mu}^A = A_{\mu ac} g^{cb} \eta_b^A - \bar{k}_{\mu\rho a} \bar{g}^{\rho\nu} \mathcal{X}_{,\nu}^A . \quad (17)$$

Note que através dessa expressão podemos reproduzir as equações que definem $\bar{k}_{\mu\rho a}$ e $A_{\mu ac}$ de acordo com as Eqs. (6) e (7). Para verificar isso, podemos contrair a Eq. (17) com a métrica \mathcal{G}_{AB} e a coordenada não deformada $\mathcal{X}_{,\mu}^A$ obtendo

$$\mathcal{X}_{,\sigma}^B \eta_{a,\mu}^A \mathcal{G}_{AB} = A_{\mu ac} g^{cb} \mathcal{X}_{,\sigma}^B \eta_b^A \mathcal{G}_{AB} - \bar{k}_{\mu\rho a} \bar{g}^{\rho\nu} \mathcal{X}_{,\sigma}^B \mathcal{X}_{,\nu}^A \mathcal{G}_{AB},$$

e de posse das Eqs. (8) e (9), obtemos a expressão para $\bar{k}_{\mu\sigma a}$ dada pela Eq. (6).

Para o vetor torção $A_{\mu ac}$ novamente podemos contrair a Eq. (17) com a métrica \mathcal{G}_{AB} , porém agora com a componente normal η_d^B

$$\eta_d^B \eta_{a,\mu}^A \mathcal{G}_{AB} = A_{\mu ac} g^{cb} \eta_b^A \eta_d^B \mathcal{G}_{AB} - \bar{k}_{\mu\rho a} \bar{g}^{\rho\nu} \mathcal{X}_{,\nu}^A \eta_c^B \mathcal{G}_{AB} ,$$

e de uso das Eqs. (9) e (10), obtemos a expressão para $A_{\mu ad}$ como visto anteriormente na Eq. (7).

De acordo com o que foi abordado anteriormente na Eq. (17), podemos desenvolver o termo $\eta_{a,\mu}^A \eta_{b,\nu}^B \mathcal{G}_{AB}$ da seguinte forma

$$\eta_{a,\mu}^A \eta_{b,\nu}^B \mathcal{G}_{AB} = (A_{\mu ac} g^{cb} \eta_b^A - \bar{k}_{\mu\rho a} \bar{g}^{\rho\nu} \mathcal{X}_{,\nu}^A) (A_{\nu bd} g^{de} \eta_e^B - \bar{k}_{\nu\sigma b} \bar{g}^{\sigma\alpha} \mathcal{X}_{,\alpha}^B \mathcal{G}_{AB}) ,$$

e assim temos

$$\begin{aligned} \eta_{a,\mu}^A \eta_{b,\nu}^B \mathcal{G}_{AB} &= g^{cb} g^{de} A_{\mu ac} A_{\nu bd} \eta_b^A \eta_e^B \mathcal{G}_{AB} \\ &\quad - g^{cb} \bar{g}^{\alpha\sigma} A_{\mu ac} \bar{k}_{\nu\sigma b} \mathcal{X}_{,\alpha}^B \eta_b^A \mathcal{G}_{AB} \\ &\quad - g^{de} \bar{g}^{\nu\rho} A_{\nu bd} \bar{k}_{\mu\rho a} \mathcal{X}_{,\nu}^A \eta_e^B \mathcal{G}_{AB} \\ &\quad + \bar{g}^{\nu\rho} \bar{g}^{\alpha\sigma} \bar{k}_{\mu\rho a} \bar{k}_{\nu\sigma b} \mathcal{X}_{,\nu}^A \mathcal{X}_{,\alpha}^B \mathcal{G}_{AB} . \end{aligned}$$

Usando as Eqs. (8), (9) e (10) podemos escrever

$$\eta_{a,\mu}^A \eta_{b,\nu}^B \mathcal{G}_{AB} = g^{cd} A_{\mu ca} A_{\nu db} + \bar{g}^{\sigma\rho} \bar{k}_{\mu\sigma a} \bar{k}_{\nu\rho b} . \quad (18)$$

Dessa forma, obtemos a expressão para a métrica perturbada

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} - 2\delta y^a \bar{k}_{\mu\nu a} + \delta y^a \delta y^b [\bar{g}^{\sigma\rho} \bar{k}_{\mu\sigma a} \bar{k}_{\nu\rho b} + g^{cd} A_{\mu ca} A_{\nu db}] \quad (19)$$

onde $\bar{g}_{\mu\nu}$ expressa a métrica da Brana-mundo não-deformada.

Podemos fazer um desenvolvimento análogo para a curvatura extrínseca sob o contexto de deformação da variedade imersa. Desta forma, a curvatura extrínseca perturbada será

$$k_{\mu\nu a} = -\eta_{a,\mu}^A \mathcal{Z}_{,\nu}^B \mathcal{G}_{AB} , \quad (20)$$

e usando a Eq. (11) podemos fazer

$$k_{\mu\nu a} = \bar{k}_{\mu\nu a} - \delta y^b \eta_{a,\mu}^A \eta_{b,\nu}^B \mathcal{G}_{AB} ,$$

e de acordo com o resultado obtido na Eq. (18), podemos obter a seguinte relação entre as curvaturas extrínsecas perturbada e não perturbada, tal que

$$k_{\mu\nu a} = \bar{k}_{\mu\nu a} - \delta y^b (g^{cd} A_{\mu ca} A_{\nu db} + \bar{g}^{\sigma\rho} \bar{k}_{\mu\sigma a} \bar{k}_{\nu\rho b}) . \quad (21)$$

Diferentemente do que mostramos com o uso da derivada de Lie, o processo perturbativo de Nash pode ser entendido também pela a relação entre a métrica e curvatura extrínseca, com a propagação da curvatura extrínseca nas dimensões extras y^a . Para tanto, podemos tomar a derivada da Eq. (19) em relação ao parâmetro perturbativo y^a obtendo

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial y^a} = -2\bar{k}_{\mu\nu a} + 2\delta y^a \delta_a^b (g^{cd} A_{\mu ca} A_{\nu db} + \bar{g}^{\sigma\rho} \bar{k}_{\mu\sigma a} \bar{k}_{\nu\rho b}) ,$$

e de acordo com a Eq. (20) podemos escrever

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial y^a} = -2k_{\mu\nu a} ,$$

logo,

$$k_{\mu\nu a} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial y^a} , \quad (22)$$

que é a relação de York que denota a evolução da métrica deformada da Brana-mundo sob o parâmetro perturbativo y^a . O teorema de Nash parte dessa relação como princípio para mostrar que toda geometria pode ser imersa diferencialmente. A expressão anterior pode ser escrita de modo diferencial como

$$\delta g_{\mu\nu} = -2\bar{k}_{\mu\nu a} \delta y^a , \quad (23)$$

a qual nos mostra que em primeira aproximação as perturbações Nash de fato podem ser produzidas a partir de pequenos incrementos somados à métrica, *i.e.*, $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} + \dots$. Assim, recuperamos a noção de definição de forma local de uma variedade Riemanniana imersa quando comparada ao espaço dimensionalmente maior a qual foi imersa. Vemos assim que o postulado de Branas-mundo sobre a propagação da gravidade nas

dimensões extras é na verdade a essência do processo perturbativo de Nash com a propagação da curvatura extrínseca que pode vir a ser interpretada como um campo independente.

3.3. As equações de Gauss-Codazzi-Ricci e princípio de *Einstein-Hilbert*

O processo perturbativo de Nash por si só não é capaz de fornecer equações de movimento da variedade imersa. Para tanto, precisamos das equações de Gauss-Codazzi-Ricci que nos fornecerão naturalmente um escalar de Curvatura tal que possamos escrever o princípio variacional Einstein-Hilbert.

Podemos começar fazendo uso da Eq. (12), tal que

$$g_{\mu\nu} = \mathcal{Z}_{,\mu}^A \mathcal{Z}_{,\nu}^B \mathcal{G}_{AB} \longrightarrow g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \mathcal{Z}_{,\mu}^A \mathcal{Z}_{,\nu}^B \mathcal{G}_{AB} .$$

Tendo em vista que

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = \mathcal{G}^{AB} \mathcal{G}_{AB} - g^{ab} g_{ab} ,$$

logo, temos que

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = \mathcal{G}^{AB} \mathcal{G}_{AB} - g^{ab} g_{ab} = g^{\mu\nu} \mathcal{Z}_{,\mu}^A \mathcal{Z}_{,\nu}^B \mathcal{G}_{AB} ,$$

e de posse da Eq. (14), temos então

$$\mathcal{G}^{AB} \mathcal{G}_{AB} - g^{ab} \eta_a^A \eta_b^B \mathcal{G}_{AB} = g^{\mu\nu} \mathcal{Z}_{,\mu}^A \mathcal{Z}_{,\nu}^B ,$$

que resulta na relação

$$g^{\mu\nu} \mathcal{Z}_{,\mu}^A \mathcal{Z}_{,\nu}^B = \mathcal{G}^{AB} - g^{ab} \eta_a^A \eta_b^B . \quad (24)$$

Para assegurarmos de forma completa a imersão com a deformação da Brana-mundo no mesmo *bulk*, *i.e.*, garantir que tal deformação continue uma subvariedade do *bulk*, devemos tomar as componentes do tensor de Riemann \mathcal{R}_{ABCD} do *bulk* definidas em termos das bases de imersão da geometria perturbada $\{\mathcal{Z}_{,\mu}^A, \eta_a^A\}$ [20–22] que correspondem às equações de Gauss-Codazzi-Ricci [12], dadas respectivamente por

$$\mathcal{R}_{ABCD} \mathcal{Z}_{,\mu}^A \mathcal{Z}_{,\nu}^B \mathcal{Z}_{,\rho}^C \mathcal{Z}_{,\sigma}^D = R_{\mu\nu\rho\sigma} - 2g^{cd} k_{\mu[\rho|c} k_{\nu]\sigma d} \quad (25a)$$

$$\mathcal{R}_{ABCD} \mathcal{Z}_{,\mu}^A \eta_a^B \mathcal{Z}_{,\nu}^C \mathcal{Z}_{,\rho}^D = 2k_{\mu[\nu|a;\rho]} - 2g^{cd} A_{[\rho|ca} k_{\mu|\nu]d} \quad (25b)$$

$$\mathcal{R}_{ABCD} \eta_a^A \eta_b^B \mathcal{Z}_{,\mu}^C \mathcal{Z}_{,\nu}^D = -2A_{[\mu|ab;\nu]} - 2g^{cd} A_{[\mu|ca} A_{\nu]db} - 2g^{\alpha\beta} k_{[\mu|\alpha a} k_{\nu]\beta b} \quad (25c)$$

as quais representam as condições de integrabilidade da imersão. Esta integrabilidade diz respeito à possibilidade de adição de hipersuperfícies de espaço-tempo que ao serem integradas podemos extrair as equações de movimento. Como já comentamos, com uso da analiticidade das funções como proposto por Janet, Burstin e Cartan, é possível obter as soluções do sistema. Porém,

do ponto de vista físico, essa é uma hipótese muito forte para o estudo de processos em que a origem e o fim não são bem conhecidos, como é no caso da cosmologia. Por outro lado, o teorema de Nash foi o primeiro a resolver as equações de Gauss-Codazzi-Ricci usando apenas a regularidade e diferenciabilidade das funções.

O próximo passo será deduzir a equação de Einstein

para o *bulk* partindo do princípio de *Einstein-Hilbert*, via construção de uma lagrangiana. Denotamos então a quantidade

$$K^2 = g^{ab} k_a^{\mu\nu} k_{\mu\nu b} , \quad (26)$$

e a curvatura média

$$H^2 = g^{ab} h_a h_b , \quad (27)$$

onde denotamos $h_a = g^{\mu\nu} k_{\mu\nu a}$.

Tomemos então a equação de Gauss contraindo-a com a métrica $g^{\rho\sigma}$

$$\begin{aligned} g^{\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} &= 2g^{cd} g^{\rho\sigma} k_{\mu[\rho|c} k_{\nu]\sigma d} + g^{\rho\sigma} \mathcal{R}_{ABCD} \mathcal{Z}_{,\mu}^A \mathcal{Z}_{,\nu}^B \mathcal{Z}_{,\rho}^C \mathcal{Z}_{,\sigma}^D , \\ R_{\mu\nu} &= g^{cd} (g^{\rho\sigma} k_{\mu\rho c} k_{\nu\sigma d} - k_{\mu\nu c} g^{\rho\sigma} k_{\rho\sigma d}) + g^{\rho\sigma} \mathcal{R}_{ABCD} \mathcal{Z}_{,\mu}^A \mathcal{Z}_{,\nu}^B \mathcal{Z}_{,\rho}^C \mathcal{Z}_{,\sigma}^D , \\ &= g^{cd} (g^{\rho\sigma} k_{\mu\rho c} k_{\nu\sigma d} - k_{\mu\nu c} h_d) + \mathcal{R}_{ABCD} \mathcal{Z}_{,\mu}^A \mathcal{Z}_{,\nu}^B (g^{\rho\sigma} \mathcal{Z}_{,\rho}^C \mathcal{Z}_{,\sigma}^D) , \end{aligned}$$

e usando a Eq. (24), temos

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= g^{cd} (g^{\rho\sigma} k_{\mu\rho c} k_{\nu\sigma d} - k_{\mu\nu d} h_c) + \mathcal{R}_{ABCD} \mathcal{Z}_{,\mu}^A \mathcal{Z}_{,\nu}^B (\mathcal{G}^{CD} - g^{ab} \eta_a^C \eta_b^D) , \\ &= g^{cd} (g^{\rho\sigma} k_{\mu\rho c} k_{\nu\sigma d} - k_{\mu\nu d} h_c) + \mathcal{G}^{CD} \mathcal{R}_{ABCD} \mathcal{Z}_{,\mu}^A \mathcal{Z}_{,\nu}^B - g^{ab} \mathcal{R}_{ABCD} \mathcal{Z}_{,\mu}^A \mathcal{Z}_{,\nu}^B \eta_a^C \eta_b^D , \end{aligned}$$

que resulta em

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= g^{cd} (g^{\rho\sigma} k_{\mu\rho c} k_{\nu\sigma d} - k_{\mu\nu d} h_c) + \mathcal{R}_{AB} \mathcal{Z}_{,\mu}^A \mathcal{Z}_{,\nu}^B \\ &\quad - g^{ab} \mathcal{R}_{ABCD} \eta_a^A \mathcal{Z}_{,\nu}^C \mathcal{Z}_{,\mu}^B \eta_b^D . \end{aligned} \quad (30)$$

Assim, ao tomarmos a Eq. (30) contraída novamente com uma métrica $g^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} g^{cd} g^{\rho\sigma} k_{\mu\rho c} k_{\nu\sigma d} - g^{\mu\nu} k_{\mu\nu d} g^{cd} h_c \\ &\quad + g^{\mu\nu} \mathcal{R}_{AB} \mathcal{Z}_{,\mu}^A \mathcal{Z}_{,\nu}^B - g^{ab} \mathcal{R}_{ABCD} \eta_a^A (g^{\mu\nu} \mathcal{Z}_{,\nu}^C \mathcal{Z}_{,\mu}^B) \eta_b^D . \end{aligned}$$

e de uso das Eqs. (24), (26) a (30), temos

$$\begin{aligned} R &= g^{cd} k_c^{\nu\sigma} k_{\nu\sigma d} - g^{cd} h_c h_d + \mathcal{R}_{AB} (\mathcal{G}^{AB} - g^{ab} \eta_a^A \eta_b^B) \\ &\quad - g^{ab} \mathcal{R}_{ABCD} \eta_a^A \eta_b^D (\mathcal{G}^{BC} - g^{cd} \eta_c^B \eta_d^C) \\ &= (K^2 - H^2) + \mathcal{R}_{AB} \mathcal{G}^{AB} - g^{ab} \mathcal{R}_{AB} \eta_a^A \eta_b^B \\ &\quad - g^{ab} \mathcal{G}^{BC} \mathcal{R}_{ABCD} \eta_a^A \eta_b^D + g^{ab} g^{cd} \mathcal{R}_{ABCD} \eta_a^A \eta_b^B \eta_c^C \eta_d^D , \end{aligned}$$

em que obtemos a uma equação para o escalar de curvatura

$$\begin{aligned} R &= (K^2 - H^2) + \mathcal{R} - 2g^{ab} \mathcal{R}_{AB} \eta_a^A \eta_b^B \\ &\quad + g^{ad} g^{bc} \mathcal{R}_{ABCD} \eta_a^A \eta_b^B \eta_c^C \eta_d^D . \end{aligned}$$

O princípio *Einstein-Hilbert* para a geometria do *bulk*

$$S = \int \mathcal{R} \sqrt{-\mathcal{G}} d^D V ,$$

diz que a curvatura deve ser a mais suave possível. Pela Eq. (31) podemos escrever

$$\begin{aligned} S &= \int (R - (K^2 - H^2)) \sqrt{-\mathcal{G}} d^D V \\ &\quad + \int 2g^{ab} \mathcal{R}_{AB} \eta_a^A \eta_b^B \sqrt{-\mathcal{G}} d^D V \\ &\quad - \int g^{ad} g^{bc} \mathcal{R}_{ABCD} \eta_a^A \eta_b^B \eta_c^C \eta_d^D \sqrt{-\mathcal{G}} d^D V . \end{aligned}$$

Assim, podemos escrever a ação

$$S = \alpha_* \int \mathcal{S}^* \sqrt{-\mathcal{G}} d^D V ,$$

onde α_* é um parâmetro associado com a energia de escala do *bulk* e \mathcal{S}^* é a lagrangiana confinada na Brana-mundo. Tomando a variação da ação Einstein-Hilbert do *bulk*

$$\frac{\delta S}{\delta \mathcal{G}_{AB}} = 0 ,$$

temos as equações de Einstein para o *bulk*

$$\mathcal{R}_{AB} - \frac{1}{2} \mathcal{R} \mathcal{G}_{AB} = \alpha_* T_{AB}^* , \quad (31)$$

onde T_{AB}^* é o tensor energia-momento do *bulk*. Assim, vemos que o postulado de Branas-mundo sobre a adoção da métrica \mathcal{G}_{AB} do *bulk* como solução das equações de Einstein é na verdade uma consequência natural da imersão. É importante notar que as transformações de difeomorfismo bem como o princípio da equivalência da relatividade geral não são levados ao *bulk*, sendo *confinados* na Brana-mundo.

Por outro lado, a escolha de tipos específicos de *bulks* impõe diferentes restrições e equações de movimento caracterizando os vários modelos de Branas-mundo. Fundamentalmente, os modelos são necessários à medida que a teoria não existe sendo construídos no sentido de descrever ou fazer a representação de determinado sistema a ser estudado na tentativa de extrair informações para análise e conceituação do problema. Neste sentido, o termo *teoria* possui um significado mais amplo de modo a tentar prover explicação

e sistematização mais rigorosa do conhecimento, além de prever novos fenômenos. Uma teoria física deve portanto apresentar rigor matemático, lógica e simplicidade de acordo com o princípio chamado *navalha de Occam*, proposto por William de Occam no século XIV em que nos diz que “*entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem*” (as entidades não devem ser multiplicadas além da necessidade), sendo precursor do que chamamos hoje por método científico. Tendo em vista o aparecimento destes novos elementos extrínsecos que representam uma extensão da geometria Riemanniana, portanto, a geometria de Branas-mundo é bem mais rica do que a relatividade geral, o que exige estudos mais profundos e a longo prazo para a elaboração de uma teoria mais geral de gravitação propriamente dita, ou possivelmente, de unificação das interações.

4. A teoria de imersão como uma opção para a física

Em 1965 em um seminário acerca dos problemas da imersão, Y. Ne’eman e outros conjecturaram que as dimensões extras poderiam ser a fonte de simetria para partículas elementares [30]. O quadro geral naquela época era que as simetrias concordavam com as interações fracas, mas não podiam ser estendidas às interações fortes. Ne’eman sugeriu que o uso de espaços localmente imersos levaria às simetrias internas, o que atribuía às mesmas uma origem geométrica, concluindo que o uso de espaços-tempo imersos ofereceria uma teoria unificada das interações fundamentais da natureza. Em um sentido geométrico, as conexões seriam vistas como propriedades do espaço-tempo em contraste com trabalhos anteriores, tais como Weyl [31], Kaluza-Kein [32,33] e Gupta [34] os quais não levavam em consideração o uso da imersão.

O primeiro artigo do seminário é de A. Friedman [23] onde discute sobre os diversos casos de imersões globais e locais, fazendo um breve resumo sobre o que Nash havia discutido quase dez anos antes e também o que havia sido descoberto até então [24]. O artigo de J. Rosen [25] mostra vários casos de imersões de espaços relativísticos Riemannianos. R. Penrose [26] chama a atenção para o problema de imersões globais, dizendo que nem sempre uma variedade Riemanniana poderá ser imersa num espaço Euclidiano como Nash havia afirmado em 1956. Ele faz o exemplo para as métricas de ondas planas, mas recentemente se mostrou que de fato isto não era uma dificuldade desde que se considere a dinâmica das imersões [27]. C. Fronsdal [28] discute os limites entre espaços chatos e espaços curvos para uma dada teoria física enquanto que D. Joseph [29] trata da imersão do espaço-tempo num espaço pseudo-Euclidiano. Para ele, espaços pseudo-Euclidianos de dimensão maior podem ser considerados uma arena em que a relatividade geral e a mecânica quântica possam ser trabalhadas simultaneamente.

Por conseguinte, nas décadas de 1970 e 80, Regge, Teitelboim [35] e Holdom [36,37], dentre outros, consideraram a idéia de um universo imerso em uma variedade de dimensão maior. Esta idéia foi originada na teoria de Cordas, onde os objetos fundamentais são imersos. Cabe notar que, na teoria de Cordas original (*i.e.*, sem *supersimetria* a qual atribuí a cada partícula na natureza um equivalente supersimétrico, por exemplo, para cada bóson existe um férmion supersimétrico e vice-versa), os objetos são imersos em 2-dimensões, porém a imersão fica trivializada já que as superfícies bidimensionais são conformemente planas. Em 1977, em um trabalho pioneiro, Regge e Teitelboim consideraram uma teoria de membranas a qual substituí a geometria Riemanniana por uma geometria imersa.

Como colocado na seção II, em 1998, Arkani-Hamed, G. Dvali and S. Dimopoulos (ADD) [19] propuseram um modelo multidimensional para dar uma solução ao problema de hierarquia das interações fundamentais, que basicamente consiste em uma diferença quantitativa entre as escalas eletrofraca e Planckiana ($m_{pl}/m_{EW} \sim 10^{16}$) baseadas nas medidas das constantes de acoplamento. A idéia de ADD reside no fato de que não existe ainda uma comprovação experimental de que a gravidade é realmente efetiva somente em altas energias da ordem de 10^{15} TeV, mas sim que possa ser verificada a unificação na escala TeV. Dos modelos de supercordas [38], a proposta de ADD emprestou a idéia de que variedades chamadas *p*-branas são imersas em um *bulk*, sendo que a geometria do *bulk* é definida pelas equações de Einstein. Assim, uma 3-brana move-se em um *bulk* gerando uma Brana-mundo imersa que exerce o papel do espaço-tempo. Desta forma, a Brana-mundo é um objeto dinâmico originado pela oscilação de uma 3-brana determinada pelas equações de Einstein com um número de dimensões maior que 4 onde as transformações do grupo de difeomorfismo não são estendidas às dimensões extras. A partir de então muitos outros trabalhos sobre Branas-mundo foram propostos, porém, a nível de exemplo, faremos um breve comentário acerca da estrutura do modelo Randall-Sundrum, por se tratar de um modelo bastante explorado na literatura bem como sendo em conjunto com a proposta de ADD um dos trabalhos pioneiros do programa de Branas-mundo.

Em 1999, L. Randall e R. Sundrum [39] propõem um modelo alternativo ao esquema de ADD. O primeiro modelo conhecido como RS-I é construído com um *bulk* de curvatura constante em 5-dimensões em um espaço-tempo do tipo anti-deSitter, ou, simplesmente, ADS_5 . Este tipo de espaço foi introduzido originalmente em 1917 por W. de Sitter apresentando novas soluções das equações de Einstein pela adição da constante cosmológica Λ às equações de campo no vácuo (o tensor energia momento é nulo, *i.e.*, $T_{\mu\nu} = 0$) com o elemento

de linha

$$ds^2 = \frac{1}{\cosh^2 Hr} [dt^2 - dr^2 - H^{-2} \tanh^2 Hr (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] , \quad (32)$$

onde $H = \sqrt{\Lambda/3}$ em um universo esférico quasi-estático de raio $R = 3/\Lambda$. Usando as seguintes definições [40]

$$\begin{cases} X_1 = \alpha \cosh\left(\frac{t}{\alpha}\right) \sin r \cos \theta \\ X_2 = \alpha \cosh\left(\frac{t}{\alpha}\right) \sin r \sin \theta \cos \phi \\ X_3 = \alpha \cosh\left(\frac{t}{\alpha}\right) \sin r \sin \theta \sin \phi \\ X_4 = \alpha \cosh\left(\frac{t}{\alpha}\right) \cos r \\ X_5 = \alpha \sinh\left(\frac{t}{\alpha}\right) \end{cases}$$

podemos mostrar que a solução de deSitter pode ser escrita como

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 - X_5^2 = \alpha^2 ,$$

que é equivalente à uma esfera de raio $\alpha = \Lambda^{-1}$ com centro na origem em um $M_5(4,1)$, sendo um espaço de curvatura constante com $\Lambda > 0$ cujo elemento de linha podemos escrever como

$$ds^2 = -dt^2 + \alpha^2 \cosh^2\left(\frac{t}{\alpha}\right) [dr^2 + \sin^2 r dw^2] , \quad (33)$$

onde $dw^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$.

Por outro lado, se tomarmos as seguintes mudanças

nas coordenadas no caso anterior

$$\begin{cases} \cosh\left(\frac{t}{\alpha}\right) \rightarrow \cos\left(\frac{t}{\alpha}\right) , \\ \sin r \rightarrow \sinh r , \\ \cos r \rightarrow \cosh r , \end{cases}$$

obtemos as novas coordenadas

$$\begin{cases} X_1 = \alpha \cos\left(\frac{t}{\alpha}\right) \sinh r \cos \theta \\ X_2 = \alpha \cos\left(\frac{t}{\alpha}\right) \sinh r \sin \theta \cos \phi \\ X_3 = \alpha \cos\left(\frac{t}{\alpha}\right) \sinh r \sin \theta \sin \phi \\ X_4 = \alpha \cos\left(\frac{t}{\alpha}\right) \\ X_5 = \alpha \sinh\left(\frac{t}{\alpha}\right) \end{cases}$$

que podemos escrever a equação

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - X_4^2 - X_5^2 = -\alpha^2 ,$$

que é a equação de uma esfera centrada no infinito e de raio $(i\alpha)$ em $M_5(3,2)$, tal que $\alpha = \frac{-i}{\Lambda}$, logo $\Lambda < 0$. Este espaço é chamado de anti-deSitter cujo elemento de linha pode ser escrito como

$$ds^2 = -dt^2 + \alpha^2 \cos^2\left(\frac{t}{\alpha}\right) [dr^2 + \sinh^2 r dw^2] , \quad (34)$$

onde $dw^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$.

Por conseguinte, para o modelo RS-I construído sobre o ADS_5 , Randall e Sundrum apresentam o seguinte princípio de ação

$$S = \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \sqrt{-G} - \Lambda + 2M^3 \bar{R} + \int d^4x \sqrt{-g_{vis}} (S_{vis} - V_{vis}) + \int d^4x \int d^4x \sqrt{-g_{hid}} (S_{hid} - V_{hid}), \quad (35a)$$

onde \bar{R} é o escalar de Ricci em 4 dimensões, com *ansatz*

$$\mathcal{G}_{AB} = \begin{pmatrix} e^{-2\phi} \eta_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & r_c^2 \end{pmatrix} ,$$

onde $e^{-2\phi}$ é o fator de deformação (*warp-factor*) da Brana, $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski e r_c é identificado como raio de compactificação. O segundo e terceiro termo da ação anterior dizem respeito às ações de Branas-mundo em dois diferentes universos *vis* e *hid*. Isso é consequência da adoção da simetria Z_2 de um espaço tipo S^1/Z_2 . Dessa forma, considera-se a Brana-mundo como um contorno de separação entre duas regiões do *bulk*, por exemplo, rotuladas como lados (+) e (-). Se definirmos um vetor normal η_A no lado (+) da Brana-mundo, devido à simetria Z_2 , produzirá um vetor normal na lado (-) da mesma, *i.e.*, $\eta_A \rightarrow -\eta_A$, conforme a Fig. 1. Em suma, utilizar a simetria Z_2 significa que quando um objeto se aproxima da Brana-mundo o mesmo será refletido como uma imagem no espelho.

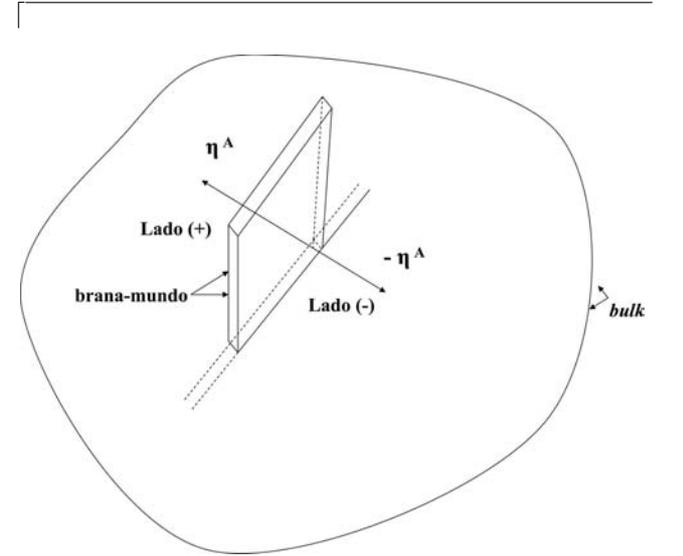


Figura 1 - Representação pictórica do modelo Randall-Sundrum. A Brana-mundo física é um contorno que separa os lados (+) e (-). Por uso da simetria Z_2 os vetores normais η^A à superfície são refletidos como em um espelho.

É importante notar que a Brana-mundo no RS-I não possui uma dinâmica sendo simplesmente um contorno fixo.

Apenas como ilustração, no modelo Randall-Sundrum, as equações de Einstein em 5-dimensões são dadas por

$$R_{MN} - \frac{1}{2}G_{MN}R = 0 ,$$

onde R_{MN} e R são respectivamente os tensores de Ricci e escalar de curvatura em 5-dimensões e G_{MN} a métrica do *bulk* pentadimensional. Assume-se ainda que exista uma solução quadridimensional que satisfaça a invariância de Poincaré. Tomando a Eq. (35a) com a métrica

$$ds^2 = e^{-2\sigma(\phi)}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + r_c^2 d\phi^2 ,$$

as equações de Einstein em 5 dimensões reduzem-se às seguintes equações

$$\begin{aligned} 6\frac{\sigma'^2}{r_c^2} &= \frac{-\Lambda}{4M^3} , \\ 3\frac{\sigma''^2}{r_c^2} &= \frac{V_{hid}\delta(\phi)}{4M^3 r_c} + \frac{V_{vis}\delta(\phi - \pi)}{4M^3 r_c} , \end{aligned}$$

onde $\sigma' = \frac{d\sigma}{d\phi}$ as quais não são equações dinâmicas pois não há dependência temporal na função σ . A solução σ satisfaz a condição de simetria Z_2 na qual $\phi \rightarrow -\phi$

$$\sigma = r_c |\phi| \sqrt{\frac{-\Lambda}{24M^3}} ,$$

tal que $\Lambda < 0$.

Note que o modelo Randall-Sundrum ao fazer a redução dimensional para o ADS_5 pelo *orbifold*⁴ S^1/Z_2 , implica que as funções imersas não sejam regulares, isto é, como não é possível obter a função inversa da variável de imersão, a imersão é dita *rígida*. O uso da simetria Z_2 em conjunto com uma condição particular, a *condição de Israel-Darmois-Lanczos* [41] (IDL), caracterizam o modelo RS-II fornecendo uma dinâmica à Brana-mundo, e, em cosmologia, é necessária para a recuperação da gravidade 4-dimensional. A condição IDL basicamente relaciona a curvatura extrínseca $k_{\mu\nu}$ com a matéria $T_{\mu\nu}$ tal que

$$k_{\mu\nu}^- = \alpha_* \left(\bar{T}_{\mu\nu}^- - \frac{1}{3} \bar{T} \bar{g}_{\mu\nu}^- \right) .$$

No entanto, o uso de tal condição é o ponto principal de crítica ao RS-II. A condição IDL não é uma consequência das equações de Einstein, mas um novo *ansatz* adotado, como mostrado por alguns autores em [20, 42].

Em resumo, as várias abordagens dos modelos de Branas-mundo são baseadas na idéia que de a

gravitação tem acesso às dimensões extras. Esta hipótese poderia explicar razão pela qual a interação gravitacional é mais fraca (menos intensa) em relação às demais interações quando medidas por um observador na Brana-mundo, onde as interações de calibre estão confinadas. Embora colocado como mais um postulado pelo ADD, a idéia do confinamento das interações está calcada na relatividade Especial onde o modelo padrão de partículas está construído. Assim, por exemplo, temos que a teoria eletromagnética é definida em 4 dimensões na formulação covariante

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi J^\nu , \quad \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F^{\rho\sigma} = 0 ,$$

onde ∂_μ é a derivada quadridimensional, $F^{\mu\nu}$ é o tensor de Maxwell dado por $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ no qual A_μ é o quadri-vetor potencial, e ainda J_μ é densidade de corrente quadridimensional. Além disso, a teoria de Maxwell é uma teoria de *calibre local*, ou seja, uma transformação de coordenadas é *específica* para cada ponto do espaço-tempo, logo transformações de coordenadas arbitrárias não são válidas do ponto de vista físico. Sendo assim, o mesmo pode se repetir para todo *Yang-Mills*

$$D \wedge \mathcal{F}^* = 4\pi \mathcal{J} , \quad D \wedge \mathcal{F} = 0 ,$$

onde temos que D_μ é a derivada covariante dada por $D_\mu = \partial_\mu + A_\mu$ e a curvatura 2-forma é dada por $F = F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = [D_\mu, D_\nu]$ com o dual $F^* = F^{*\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$. O termo \mathcal{J} é a corrente de Yang-Mills. Assim, toda teoria de Yang-Mills pode ser consistentemente formulada [43, 44] e testada experimentalmente em 4-dimensões.

Cabe lembrar que se adotarmos apenas a imersão local no contexto de Branas-mundo sem fazer escolhas *a priori*, como vimos na seção II, além da métrica, duas outras variáveis dinâmicas também assumem papel importante, que são a curvatura extrínseca $k_{\mu\nu}$ e o vetor torção $A_{\mu ab}$. Em uma perspectiva acerca da imersão, $k_{\mu\nu}$ e $A_{\mu ab}$ complementam a descrição da forma local da Brana-mundo fornecendo a informação necessária pela qual podemos saber em qual direção a Brana-mundo se afasta do plano tangente, que é, em essência, o processo perturbativo da variedade imersa. Este ponto vista reflete o mesmo conceito das quantidades K e H sendo informações necessárias à descrição local de uma superfície. De fato, mostrou-se que $A_{\mu ab}$ é a única variável dinâmica que não se propaga através de uma perturbação o que significa que $A_{\mu ab}$ se qualifica a ser um *campo de calibre relativo ao grupo de rotações das dimensões extras*, o grupo $SO(m - n)$ [11, 45]. A Brana-mundo imersa em um *bulk* com um número de dimensões extras maior do que 1 apresenta duas características: a existência de um grupo de simetria $SO(m - n)$ aos vetores unitários normais η_A ; e em segundo lugar, é aonde surge a terceira forma fundamental com as componentes $A_{\mu ab}$. A primeira vez que a

⁴Neste contexto, de modo bastante simplório, a idéia de um *orbifold* consiste no quociente entre uma variedade com contornos e um grupo finito.

terceira forma fundamental foi efetivamente considerada, a mesma se transformava como um grupo de calibre sobre a ação do grupo $SO(m - n)$ conforme observado por Holdom [11, 36, 37]. Claramente, a procura de significado físico ou influência dessas quantidades são vastas áreas de estudo e têm sido amplamente estudadas [20–22, 46–49]. Vemos assim como os estudos atuais acerca da relação entre física e geometria estão em pura ebulição, motivados de forma decisiva desde 1916 com a teoria da relatividade geral.

5. Considerações finais

A teoria de imersão tem sido apresentada como uma opção para a física nos últimos anos, principalmente com o advento dos modelos de Branas-mundo. Suas origens confundem-se com as próprias origens da geometria. O quinto postulado de Euclides motivou a descoberta de novas geometrias chamadas geometrias *não-Euclidianas*, com particular destaque para a geometria Riemanniana. Desde Einstein, a geometria Riemanniana tem sido considerada como padrão de geometria devido ao sucesso da teoria da relatividade geral, apesar de certos dilemas tal como o problema da ambiguidade do tensor de Riemann que fornece a “forma absoluta” dos objetos. No entanto, esta característica parece desafiar o aspecto intuitivo da percepção do mundo a nossa volta, como proposto pela filosofia Kantiana.

O problema da imersão consistia originalmente em como uma variedade Riemanniana pode ser imersa em outra de forma consistente tal como superfícies bidimensionais imersas no espaço Euclideo. Esta questão foi apontada primeiramente por Schläefli em 1873 ao trabalho de Riemann na tentativa de resolver o dilema de como definir a forma local de uma superfície na geometria Riemanniana. A indicação inicial veio em resolver as equações de Gauss-Codazzi-Ricci que relacionam a variedade imersa com a variedade maior. No entanto, essas equações são fortemente não-lineares o que as torna de difícil solução. Primeiros esforços em resolvê-las vieram com os trabalhos de Janet-Cartan-Burstin com o uso particular de séries analíticas convergentes.

Um método mais geral para imersões locais de variedades Riemannianas foi proposto em 1956 por J. Nash usando a diferenciabilidade e regularidade das funções de imersão. Assim, definida a imersão entre duas variedades, uma nova variedade imersa poderia ser criada perturbativamente por pequenos incrementos adicionados à variedade imersa original (não-perturbada). Procuramos mostrar a relevância do trabalho de Nash ao âmbito da geometria de imersões e à física apresentando parte do desenvolvimento histórico dos trabalhos com imersões. De fato, Nash considerava os trabalhos sobre imersões como os mais fundamentais de sua autoria, embora tenha ganhado o prêmio

Nobel de Economia em 1994 por suas contribuições à teoria dos jogos. No entanto, quando relacionamos à física, o teorema de Nash provê a base necessária para a elaboração de uma teoria gravitacional mais geral compatível com a proposta da Branas-mundo, como mostrado em trabalhos mais especializados. De certo modo, o conceito de Branas-mundo representa uma volta ao ponto de vista Kantiano, como mencionado anteriormente, o que nos fornece um caminho para explorar essa busca incessante pelo conhecimento e entendimento do mundo.

Agradecimentos

Gostaríamos de agradecer pelo apoio recebido do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) que possibilitou o desenvolvimento deste trabalho. Agradecemos também aos comentários do árbitro indicado pela Revista Brasileira de Ensino de Física.

Referências

- [1] J. Nash, *The Annals of Mathematics* **60**, 3 (1954).
- [2] J. Nash, *The Annals of Mathematics* **63**, 20 (1956).
- [3] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (Jonh Wiley and Sons Inc, Nova York, 1972).
- [4] C.B. Boyer, *História da Matemática* (Edgard Blücher, São Paulo, 2003).
- [5] W. Dunnington, *Carl Friedrich Gauss: Titan of Science* (Hafner Publishing Co., Nova York, 1955).
- [6] H. Poincaré, *Science and Hypothesis* (Dover Publications, Nova York, 1952).
- [7] B. Riemann, *On the Hypotheses that Lie at the Bases of Geometry* (1854), (Tradução para o inglês por W.K. Clifford, *Nature*, **8**, 114 (1873)).
- [8] M.P. Carmo, *Riemannian Geometry* (Birkhäuser, Boston, 1992).
- [9] I. Kant, *Crítica da Razão Pura* (Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1997).
- [10] L. Schläefli, *Annali di Matematica Pura et Applicata* **5**, 170 (1873).
- [11] P.I. Odon, *Sobre a Origem das Simetrias Internas*. Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, Brasília, 2006.
- [12] L.P. Eisenhart, *Riemannian Geometry* (Princeton U.P., Reprint, 1966).
- [13] M. Janet, *Annales De La Société Polonaise De Mathématique* **5**, 38 (1926).
- [14] E. Cartan, *Annales De La Société Polonaise De Mathématique* **6**, 1 (1928).
- [15] C. Burstin, *Rec. Math. Moscou, (Math Sbornik)* **38**, 74 (1931).
- [16] R. Greene, *Bulletin of American Mathematical Society*, **75**, 1308 (1969); *Memoirs of American Mathematical Society*, **97** (1970).

- [17] M.D. Maia, A.J.S. Capistrano and D. Müller, *International Journal of Modern Physics* **D18**, 1273 (2009).
- [18] J.E. Campbell, *A Course of Differential Geometry* (Claderon Press, Oxford, 1926).
- [19] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. Dvali, *Physical Letters* **B429**, 263 (1998).
- [20] M.D. Maia, *Covariant Analysis of Experimental Constraints on the Brane-World*, astro-ph/0404370v2.
- [21] E.M. Monte and M.D. Maia, *International Journal of Modern Physics* **A17**, 4355 (2002).
- [22] M.D. Maia and E.M. Monte, *Brane-Worlds and Their Deformations*, hep-th/0003196; *Physical Letters* **A297**, 9 (2002), *Geometric Stability of Brane-worlds*, hep-th/0103060; *Geometry of Brane-Worlds*, hep-th/0110088.
- [23] A. Friedman, *Reviews of Modern Physics* **37**, 201 (1965).
- [24] J. Nash, *Reviews of Modern Physics* **37**, 201 (1965).
- [25] J. Rosen, *Reviews of Modern Physics* **37**, 204 (1965).
- [26] R. Penrose, *Reviews of Modern Physics* **37**, 215 (1965).
- [27] M. Bustamante, F. Debbasch and M. Brachet, *Classical Gravitation as Free Membrane Dynamics*, gr-qc/0509090v3.
- [28] C. Fronsdal, *Reviews of Modern Physics* **37**, 221 (1965).
- [29] D.W. Joseph, *Reviews of Modern Physics* **37**, 225 (1965).
- [30] Y. Ne'eman, *Reviews of Modern Physics* **37**, 227 (1965).
- [31] H. Weyl, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss, Berlin*, 465, (1918); *Annalen der Physik(Lpz)* **59**, 101 (1919).
- [32] T. Kaluza, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss, Berlin*, 966, (1921).
- [33] L. O'Raifeartaigh and N. Straumann, *Early history of Gauge Theories and Kaluza-Klein theories, with a glance at recent developments*, hep-th/9810524 v2.
- [34] S.N. Gupta, *Physics Review* **96**, 6 (1954).
- [35] T. Regge and C. Teitelboim, *Marcel Grossman Meeting on General Relativity*, 77 (1975).
- [36] B. Holdom, *Gauge Fermions form Tensor Fields*, Stanford preprint ITP-738 (1983).
- [37] B. Holdom, *The Cosmological Constant and the Embedded Universe*, Stanford preprint ITP-744 (1983).
- [38] E. Abdalla, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **27**, 147 (2005).
- [39] L. Randall and R. Sundrum, *Physical Review Letters* **83**, 3370 (1999); *Physical Review Letters* **83**, 4690 (1999).
- [40] M. Spradlin, A. Strominger and A. Volovich, *Les Houches Lectures on de Sitter Space*, hep-th/0110007v2.
- [41] W. Israel, *II Nuovo Cimento* **44**, 4349 (1966).
- [42] M.D. Maia, E.M. Monte, J.M.F. Maia and J.S. Alcaniz, *Classical Quantum Gravity* **22**, 1623 (2005); *On the Geometry of Dark Energy*, astro-ph/0403072.
- [43] S.K. Donaldson, *Contemporary Mathematics* **35**, 201 (1984).
- [44] C.H. Taubes, *Contemporary Mathematics* **35**, 493 (1984).
- [45] J.L. Lopes, *Gauge Field Theories: An introduction* (Pergamon Press, Oxford, 1983).
- [46] S. Jalalzadeh and H.R. Sepangi, *Classical Quantum Gravity* **22**, 2035 (2005); gr-qc/0408004.
- [47] M.D. Maia, A.J.S. Capistrano and E.M. Monte, *International Journal of Modern Physics* **A24**, 1545 (2009).
- [48] J.S. Alcaniz and N. Pires, *Physical Review* **D70**, 047303 (2004).
- [49] M. Heydary-Fard, H. Razmi and H.R. Sepangi, *Brane-world black hole solution via a confining potential*, gr-qc/0707.3558v3.