

Uma descrição newtoniana do movimento de um pêndulo esférico

(A Newtonian description of the motion of a spherical pendulum)

Valmar Carneiro Barbosa¹ e Pedro Claudio Guarinho de Moraes²

¹Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro RJ, Brasil

²Departamento de Engenharia de Biosistemas, Universidade Federal de São João del-Rei, São João del-Rei, MG, Brasil

Recebido em 30/10/2009; Aceito em 23/12/2009; Publicado em 15/2/2011

O sistema físico conhecido como pêndulo esférico é normalmente tomado como um exemplo das aplicações da mecânica analítica. Isto priva as pessoas que não tiveram contato com esta abordagem da mecânica clássica do entendimento completo de como este sistema se comporta. Assim, neste trabalho, usamos a mecânica newtoniana para apresentar um estudo do movimento de um pêndulo esférico. Para fazer isto, obtemos as equações de movimento, determinamos as quantidades que são conservadas durante a evolução temporal deste sistema, analisamos a sua energia potencial efetiva e discutimos os diferentes movimentos que este sistema pode ter. Apresentamos vários resultados numéricos e fazemos uma comparação qualitativa com dados experimentais.

Palavras-chave: pêndulo esférico, mecânica newtoniana, trajetórias.

The physical system known as spherical pendulum is usually taken as an example of the applications of analytical mechanics. This deprives those people who had no contact with this approach to classical mechanics of the complete understanding of how this system behaves. So, in this work, we use Newtonian mechanics to present a study of the motion of a spherical pendulum. To do this, we obtain its equations of motion, determine the quantities that are conserved during the time evolution of this system, analyze its effective potential energy and discuss the different motions that this system can have. We present several numerical results, and a qualitative comparison with experimental data is made.

Keywords: spherical pendulum, newtonian mechanics, trajectories.

1. Introdução

Há algum tempo, assistimos a uma apresentação no ciclo de seminários promovidos pelo Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro feita pelo Prof. Hélio Salim de Amorim do referido instituto e cujo título era “Aplicações da fotografia digital no ensino de física” [1]. Uma das coisas que nos chamou a atenção nesta apresentação foi o resultado experimental apresentado para a trajetória seguida pela partícula de um pêndulo cônico, a qual tinha a aparência de uma elipse. Como é bem conhecido [2–5], a trajetória seguida pela partícula de um pêndulo cônico é uma circunferência e, portanto, começamos a discutir o que seria a trajetória apresentada na Ref. [1] e logo concluímos que se tratava de um trecho da trajetória seguida por uma partícula em um movimento pendular esférico com uma energia mecânica muito próxima ao valor mínimo da energia potencial efetiva para aquela situação. Como veremos mais adiante, a condição que deve ser satisfeita pelo sistema em questão para que ele apresente um movi-

mento pendular cônico é muito difícil de ser alcançada experimentalmente.

Em nossa busca pela compreensão do resultado experimental citado acima, observamos que o sistema físico conhecido como pêndulo esférico não é abordado em livros básicos que tratam da mecânica clássica [2–8] e em livros avançados [9–12] ele é tido como um exemplo tradicional do formalismo lagrangiano da mecânica clássica, com pouca discussão de suas propriedades e possíveis comportamentos e muito menos resultados numéricos que auxiliem no entendimento do que pode acontecer com tal sistema, sendo a Ref. [12] aquela que, apesar da forma densa, o descreve melhor. Na Ref. [13], a abordagem lagrangeana também é adotada para descrever o comportamento de um pêndulo esférico com o objetivo de determinar a velocidade angular com que a trajetória seguida pela partícula que o compõe precisa ao redor do eixo de simetria do sistema, que é paralelo à direção da força peso que atua na partícula. Tudo isto faz com que a compreensão do chamado movimento pendular esférico fique restrito a um conjunto de pessoas que tiveram em sua formação superior a oportu-

²E-mail: guarinho@ufsj.edu.br.

nidade de estudar a mecânica clássica do ponto de vista do formalismo lagrangiano. Isto não deve ser o caso de boa parte dos professores de física do ensino médio, mas que tiveram, certamente, contato com o formalismo newtoniano para a mecânica clássica. Uma abordagem newtoniana do sistema físico em questão com o mesmo objetivo da Ref. [13] é apresentada na Ref. [14], onde, além das equações de movimento oriundas da aplicação da 1ª lei de Newton ao sistema serem apresentadas em coordenadas cartesianas, pouco se discute sobre as propriedades do sistema, restando de interessante neste trabalho apenas a apresentação de um resultado experimental para o movimento de precessão presente neste sistema.

Deste modo, o objetivo deste trabalho é apresentar a descrição do movimento pendular esférico de uma partícula do ponto de vista do formalismo newtoniano para a mecânica clássica, bem como apresentar resultados numéricos que possam auxiliar no entendimento do comportamento deste sistema físico. Para isto, na Sec. 2 apresentamos a descrição do movimento em questão, onde serão obtidas as equações de movimento que o governam, estabelecidas as quantidades físicas conservadas durante a evolução temporal do sistema e introduzidas as quantidades físicas adimensionais que facilitarão a obtenção de resultados numéricos ao longo do trabalho. Na Sec. 3 faremos uma análise da energia potencial efetiva associada ao sistema e de algumas de suas implicações. Finalmente, na Sec. 4 apresentaremos os diferentes comportamentos que um pêndulo esférico pode ter, incluindo aquele que gerou toda esta discussão e cujo dado experimental foi apresentado na Ref. [1].

Naturalmente, este trabalho não tem como objetivo a descrição de um fato científico novo e sim uma apresentação acessível e didática da descrição do movimento pendular esférico, principalmente para aqueles que nunca tiveram a oportunidade de ter contato com o formalismo lagrangiano para a mecânica clássica. Acreditamos, também, que este trabalho possa servir de roteiro para a discussão do sistema físico em questão em disciplinas que tratem da mecânica clássica do ponto de vista do formalismo newtoniano, tanto no ensino médio quanto no ensino superior.

2. A descrição do movimento

2.1. As equações de movimento

Na Fig. 1 encontra-se esquematizado o sistema físico conhecido como pêndulo esférico, o qual é constituído por uma partícula de massa m presa a um ponto fixo O por um fio inextensível de comprimento R e de massa desprezível comparada à massa da partícula. A partícula em um movimento pendular esférico deve mover-se sobre uma superfície esférica de raio R sob a ação de sua força peso (\mathbf{P}) e da tensão (\mathbf{T}) exercida pelo

fio. Portanto, usaremos as coordenadas esféricas R , θ e φ , indicadas na Fig. 1, para localizarmos a partícula, uma vez que uma delas (R) permanece constante durante o movimento em questão.

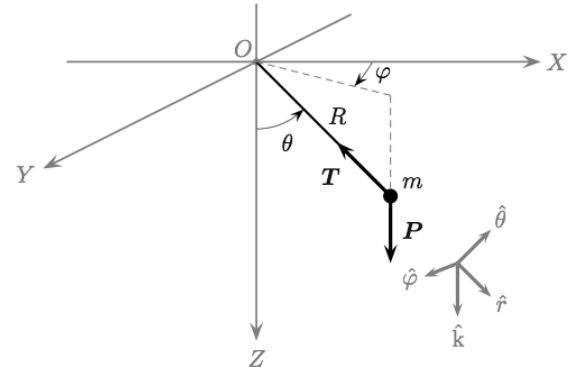


Figura 1 - Diagrama mostrando quantidades envolvidas na descrição do movimento de um pêndulo esférico.

O vetor posição (\mathbf{r}) desta partícula pode ser escrito como

$$\mathbf{r} = R\hat{r}, \quad (1)$$

onde \hat{r} é um dos vetores unitários comumente usados em coordenadas esféricas (veja Fig. 1). Com isto podemos determinar a velocidade (\mathbf{v}) desta partícula, necessária para obtermos o seu momento linear (\mathbf{p}) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= m\mathbf{v} \\ &= m\frac{d\mathbf{r}}{dt} \\ &= p_\theta\hat{\theta} + p_\varphi\hat{\varphi}, \end{aligned} \quad (2)$$

onde p_θ e p_φ são, respectivamente, as componentes do momento linear da partícula nas direções dos vetores unitários $\hat{\theta}$ e $\hat{\varphi}$ (veja Fig. 1), dadas por

$$p_\theta = mR\dot{\theta} \quad (3)$$

$$p_\varphi = mR\sin\theta\dot{\varphi}. \quad (4)$$

Na equação acima, estamos usando como notação para a derivada de uma quantidade com relação ao tempo o símbolo usado para esta quantidade encimado por um ponto e para obtê-la fizemos uso na Eq. (2) da seguinte relação

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\theta} & \sin\theta\dot{\varphi} \\ -\dot{\theta} & 0 & \cos\theta\dot{\varphi} \\ -\sin\theta\dot{\varphi} & -\cos\theta\dot{\varphi} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\varphi} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Em termos de suas componentes, o módulo do momento linear (p) da partícula é dado por

$$\begin{aligned} p^2 &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} \\ &= p_\theta^2 + p_\varphi^2. \end{aligned} \quad (6)$$

A força resultante (\mathbf{F}) que atua na partícula é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{P} + \mathbf{T} \\ &= mg(\cos\theta\hat{r} - \sin\theta\hat{\theta}) - T\hat{r}, \end{aligned} \quad (7)$$

onde g é o valor da intensidade do campo gravitacional na superfície da Terra.

A evolução temporal do momento linear da partícula é dada pela 2^a lei de Newton

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}. \quad (8)$$

Então, substituindo as Eqs. (2) e (7) na Eq. (8) e, também, usando a Eq. (5) e as Eqs. (3) e (4) para a determinação de $d\hat{\theta}/dt$ e $d\hat{\varphi}/dt$, obtemos

$$T = \left[\cos\theta + 2\frac{p^2/(2m)}{m(R\omega_0)^2} \right] mR\omega_0^2 \quad (9)$$

$$\frac{dp_\theta}{dt} = - \left[\sin\theta - \left(\frac{p_\varphi}{mR\omega_0} \right)^2 \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \right] mR\omega_0^2 \quad (10)$$

$$\frac{dp_\varphi}{dt} = - \frac{p_\theta}{mR\omega_0} \frac{p_\varphi}{mR\omega_0} \frac{\cos\theta}{\sin\theta} mR\omega_0^2, \quad (11)$$

onde usamos a Eq. (6) para escrevermos a relação que determina o valor de T e ω_0 representa a frequência angular das oscilações de pequenas amplitudes de um pêndulo simples de comprimento igual a R , que é dada por

$$\omega_0^2 = \frac{g}{R}. \quad (12)$$

Por isto, daqui em diante, no lugar de g usaremos $R\omega_0^2$.

2.2. A conservação da componente z do momento angular

Uma consequência da 2^a lei de Newton é a relação entre a rapidez com que o momento angular (ℓ) da partícula em relação ao ponto O varia com o tempo e o torque ($\boldsymbol{\tau}$) que atua nela em relação a este mesmo ponto, que tem a seguinte forma

$$\frac{d\ell}{dt} = \boldsymbol{\tau}. \quad (13)$$

O momento angular da partícula é dado por

$$\begin{aligned} \ell &= \mathbf{r} \times \mathbf{p} \\ &= -Rp_\varphi\hat{\theta} + Rp_\theta\hat{\varphi}, \end{aligned} \quad (14)$$

e o torque que atua nela é

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \mathbf{r} \times \mathbf{F} \\ &= -m(R\omega_0)^2\sin\theta\hat{\varphi}, \end{aligned} \quad (15)$$

onde usamos as Eqs. (1), (2) e (7) e os produtos vetoriais $\hat{r} \times \hat{r} = \mathbf{0}$, $\hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{\varphi}$ e $\hat{r} \times \hat{\varphi} = -\hat{\theta}$.

Fazendo o produto escalar da Eq. (13) com o vetor unitário \hat{k} (veja Fig. 1) e lembrando que $d\hat{k}/dt = \mathbf{0}$, obtemos a seguinte relação

$$\frac{d}{dt}(\ell \cdot \hat{k}) = \boldsymbol{\tau} \cdot \hat{k} = 0, \quad (16)$$

com $\ell \cdot \hat{k}$ representando a componente Z do momento angular e $\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{k}$ a componente Z do torque que atua na partícula, que é nula devido ao fato de que o torque está na direção de $\hat{\varphi}$ a qual é perpendicular à de \hat{k} . Desta maneira, a Eq. (16) nos mostra que a quantidade $\ell \cdot \hat{k}$ é conservada durante a evolução temporal do movimento da partícula, cujo valor será denominado, neste artigo, por λ . Deste modo, fazendo uso da Eq. (14) para determinar $\ell \cdot \hat{k}$ e lembrando que $\hat{\theta} \cdot \hat{k} = -\sin\theta$ e $\hat{\varphi} \cdot \hat{k} = 0$, obtemos a seguinte relação

$$Rp_\varphi\sin\theta = \lambda. \quad (17)$$

Nesta equação λ pode ser qualquer número real, cujo sinal tem como única consequência física a determinação do sentido do movimento da partícula ao longo da direção definida pelo vetor unitário $\hat{\varphi}$.

Note que a conservação da componente Z do momento angular da partícula, expressa pela Eq. (17), é a solução da equação de movimento para p_φ (Eq. (11)). Uma maneira simples de verificar isto é derivar a Eq. (17) em relação ao tempo e, usando a definição de p_θ (veja Eq. (3)), obter a Eq. (11).

2.3. A conservação da energia mecânica

Uma decorrência bem conhecida da 2^a lei de Newton e do fato de podermos classificar as forças que atuam em uma partícula como conservativas e não-conservativas é o teorema trabalho-energia mecânica que, na sua formulação diferencial, é escrito da seguinte maneira

$$\frac{dE}{dt} = \mathcal{P}_{nc}, \quad (18)$$

onde E representa a energia mecânica da partícula, ou seja, a soma das energias cinética (K) e potencial (U), e \mathcal{P}_{nc} a potência associada às forças não-conservativas que estejam atuando nela, que é dada pelo produto escalar entre a resultante dessas forças e a sua velocidade.

Para o sistema que estamos estudando, a energia cinética é dada pela seguinte relação

$$\begin{aligned} K &= \frac{p^2}{2m} \\ &= \frac{p_\theta^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2m} \\ &= \frac{p_\theta^2}{2m} + \frac{\lambda^2}{2m(R\sin\theta)^2}, \end{aligned} \quad (19)$$

na qual fizemos uso da Eq. (17) para relacionarmos p_φ com λ . A contribuição da força peso ao teorema

trabalho-energia mecânica aparece sob a forma de energia potencial, já que se trata de uma força conservativa, que, de um modo geral, pode ser escrita como

$$U(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}_A) - \mathbf{P} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_A), \quad (20)$$

sendo \mathbf{r}_A o vetor posição de um ponto arbitrário onde se atribui um valor $U(\mathbf{r}_A)$, também arbitrário, para a energia potencial. Assim, escolhendo $\mathbf{r}_A = \mathbf{0}$ e $U(\mathbf{r}_A) = 0$, a energia potencial acima assume a seguinte forma

$$U(\theta) = -m(R\omega_0)^2 \cos \theta. \quad (21)$$

No caso da tensão exercida pelo fio, esta contribuição é nula, ou seja,

$$\mathcal{P}_{nc} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (22)$$

uma vez que a tensão é sempre perpendicular à velocidade da partícula.

Devido à Eq. (22) e ao fato de a rapidez com que a energia do sistema varia com o tempo ser dada por Eq. (18), concluímos que a energia mecânica do sistema é conservada e é dada por

$$\begin{aligned} E &= \frac{p_\theta^2}{2m} + \frac{\lambda^2}{2m(R\sin\theta)^2} + U(\theta) \\ &= \frac{p_\theta^2}{2m} + U_\lambda(\theta), \end{aligned} \quad (23)$$

onde introduzimos uma energia potencial efetiva $U_\lambda(\theta)$ para o sistema em estudo, dada por

$$U_\lambda(\theta) = U(\theta) + \frac{\lambda^2}{2m(R\sin\theta)^2}. \quad (24)$$

Assim, como acontece, por exemplo, na descrição do movimento de uma partícula sob a ação de uma força central, podemos entender a evolução temporal da coordenada θ de uma partícula em movimento pendular esférico como o movimento de uma partícula com energia mecânica E repartida em uma parte cinética igual a $p_\theta^2/(2m)$, e não $p^2/(2m)$, e uma potencial $U_\lambda(\theta)$, em vez de $U(\theta)$.

2.4. A descrição do sistema em termos de variáveis adimensionais

Uma maneira útil e elegante de se escrever as relações que desempenham papéis importantes na descrição de um sistema físico é trocar as quantidades que aparecem nelas por quantidades adimensionais, as quais serão denotadas, neste artigo, pelo mesmo símbolo da quantidade dimensional justapondo-se a ele o símbolo “'”. Assim, se escolhermos o período das oscilações de pequenas amplitudes de um pêndulo simples como sendo a unidade para medir o tempo t , teremos que t' deve ser dado por

$$t' = \frac{t}{2\pi/\omega_0}. \quad (25)$$

Nesta mesma linha de raciocínio, podemos utilizar as quantidades m , R e ω_0 para construirmos as quantidades $mR\omega_0$, $mR^2\omega_0$, $m(R\omega_0)^2$ e $mR\omega_0^2$ como unidades de medidas para, respectivamente, momento linear, momento angular, energia e força.

Nessas unidades, a energia potencial associada à força peso assume a forma

$$U'(\theta) = -\cos \theta, \quad (26)$$

enquanto que a energia potencial efetiva fica como

$$U'_\lambda(\theta) = U'(\theta) + \frac{\lambda'^2}{2\sin^2\theta}. \quad (27)$$

Desta maneira, a energia mecânica da partícula fica com a seguinte forma

$$E' = \frac{p_\theta'^2}{2} + U'_\lambda(\theta). \quad (28)$$

A componente da tensão (T) exercida pelo fio sobre a partícula, dada pela Eq. (9), depende da energia cinética total desta partícula ($p^2/(2m)$) e, em termos das unidades descritas acima, pode ser escrita como

$$\begin{aligned} T' &= \cos \theta + 2K' \\ &= 3 \left(\cos \theta + \frac{2}{3}E' \right), \end{aligned} \quad (29)$$

onde usamos o fato de que $K' = E' - U'$ e o valor de U' dado pela Eq. (26). Note que existe um valor crítico para o ângulo θ (θ_c) onde esta tensão se anula, ou seja, $T'(\theta_c) = 0$. Devido à primeira das igualdades acima, esta equação é equivalente à equação $\cos \theta_c = -2K'(\theta_c)$ que, graças ao fato de a coordenada θ só poder assumir valores de 0 a π e a energia cinética satisfazer a condição $K' \geq 0$ nas regiões classicamente permitidas, restringe os valores de θ_c àqueles para os quais $-1 \leq \cos \theta_c \leq 0$, o que significa dizer que os valores possíveis para θ_c são tais que $\pi/2 \leq \theta_c \leq \pi$. A solução θ_c para a equação $T'(\theta_c) = 0$ é obtida fazendo-se uso da segunda das igualdades presentes na Eq. (29) e resulta em

$$\cos \theta_c = -\frac{2}{3}E'. \quad (30)$$

Uma análise envolvendo o intervalo onde devem estar os valores de $\cos \theta_c$ e a relação acima nos leva ao intervalo de valores da energia mecânica que a partícula deve ter para que ela tenha a possibilidade de passar por uma posição angular θ_c onde a tensão que o fio exerce sobre ela seja nula, que é $0 \leq E' \leq 3/2$. Assim sendo, se o valor da energia mecânica com que a partícula se move está contido neste intervalo, a força que o fio exerce nela ($\mathbf{T}' = -T'\hat{r}$) terá sentido oposto ao do vetor unitário \hat{r} , como o caso ilustrado na Fig. 1, enquanto ela estiver em uma região do espaço em que sua coordenada angular θ satisfaça a relação $\cos \theta > \cos \theta_c$ ($\theta < \theta_c$) pois, neste caso, $T' > 0$. Se, com esta mesma energia, a partícula puder passar em uma região em que $\cos \theta < \cos \theta_c$ ($\theta > \theta_c$), a força \mathbf{T}' teria o mesmo sentido de \hat{r} uma vez que T' seria menor do que zero. Porém,

como pela 3ª lei de Newton a força que atua no fio devido à sua interação com a partícula é $-\mathbf{T}'$, quando T' começasse a assumir valores negativos esta força se tornaria numa força que atuaria no sentido contrário ao de \hat{r} e, como um fio não suporta uma força neste sentido, a partícula deixaria de ter seu movimento restrito à superfície esférica de raio R . Portanto, se desejarmos que a partícula continue em seu movimento pendular esférico quando isto acontecesse seria preciso que o fio fosse substituído por uma barra rígida de inércia desprezível na confecção do pêndulo em questão. Note ainda que, para qualquer valor possível de E' fora do intervalo em discussão, T' é sempre positivo.

Para obtermos a evolução temporal das quantidades p_θ , θ , p_φ e φ devemos usar as Eqs. (10), (3), (17) e (4) que, nas unidades definidas acima, podem ser reescritas como

$$\frac{dp'_\theta}{dt'} = -2\pi \left(\sin\theta - \lambda'^2 \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} \right) \quad (31)$$

$$\frac{d\theta}{dt'} = 2\pi p'_\theta \quad (32)$$

$$p'_\varphi = \frac{\lambda'}{\sin\theta} \quad (33)$$

$$\frac{d\varphi}{dt'} = 2\pi \frac{p'_\varphi}{\sin\theta}. \quad (34)$$

As equações acima determinam a evolução temporal do sistema físico em questão. Para obtermos as coordenadas θ e φ da partícula e as componentes p'_θ e p'_φ de seu momento linear como funções do tempo a partir delas, temos que fornecer os valores dessas grandezas em um certo instante de tempo t'_0 , ou seja, temos que fornecer as seguintes quantidades, conhecidas como condições iniciais: $p'_{\theta 0}$, θ_0 , $p'_{\varphi 0}$ e φ_0 . Uma outra forma de fornecer essas condições iniciais, a qual adotaremos neste artigo, é dar os valores da componente Z do momento angular (λ') e da energia mecânica (E') da partícula, assim como suas coordenadas iniciais (θ_0 e φ_0). Neste caso, o valor inicial de p'_θ deve ser obtido por

$$p'_{\theta 0} = \pm \sqrt{2E' \left[1 - \frac{U'_\lambda(\theta_0)}{E'} \right]}, \quad (35)$$

graças à Eq. (28). O sinal positivo deve ser usado caso a partícula, em sua posição inicial, esteja movendo-se de forma a aumentar o valor do ângulo θ ; o negativo deve ser o escolhido, caso contrário.

3. Análise da energia potencial efetiva

Como já mencionamos na seção anterior, a energia potencial efetiva ($U'_\lambda(\theta)$) para o sistema em questão tem um papel importante na compreensão do seu comportamento. Assim, nesta seção, apresentaremos uma análise desta energia.

Primeiramente, observando-se a Eq. (27), nota-se que $U'_\lambda(\theta)$ é composta por dois termos. Um cuja origem

é a energia potencial associada à força peso que atua na partícula e que chamamos de $U'(\theta)$ (veja a Eq. (26)). O outro, que é a parte da energia cinética devida ao movimento da partícula ao longo da direção do vetor unitário $\hat{\varphi}$, chamaremos de $U'_c(\theta)$ e seu efeito no movimento da partícula é a tentativa de restaurar a sua posição angular θ no sentido do centro do intervalo (por isto o índice “c” em $U'_c(\theta)$) desta coordenada, que é $\pi/2$. Na Fig. 2, apresentamos o comportamento da energia potencial efetiva para $\lambda' = 1$ como função do ângulo θ (curva cheia). Nesta mesma figura, encontram-se representadas, também, as suas parcelas $U'(\theta)$ (curva de tracejado curto) e $U'_c(\theta)$ (curva de tracejado longo). Na Fig. 3, mostramos o comportamento de $U'_\lambda(\theta)$ como função de θ para diferentes valores de λ' .

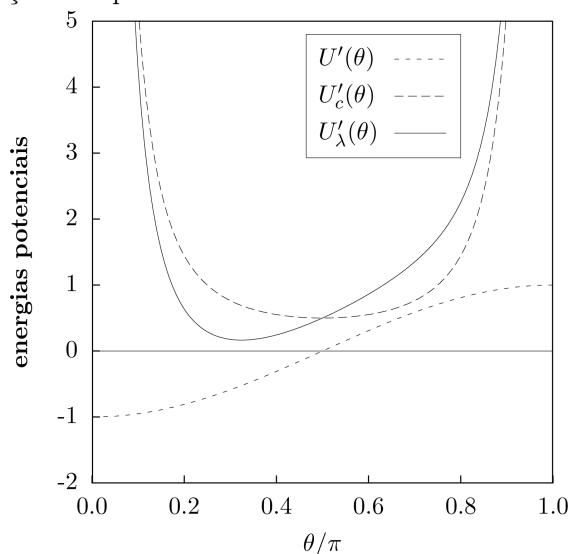


Figura 2 - Energia potencial efetiva para $\lambda' = 1$ e suas parcelas.

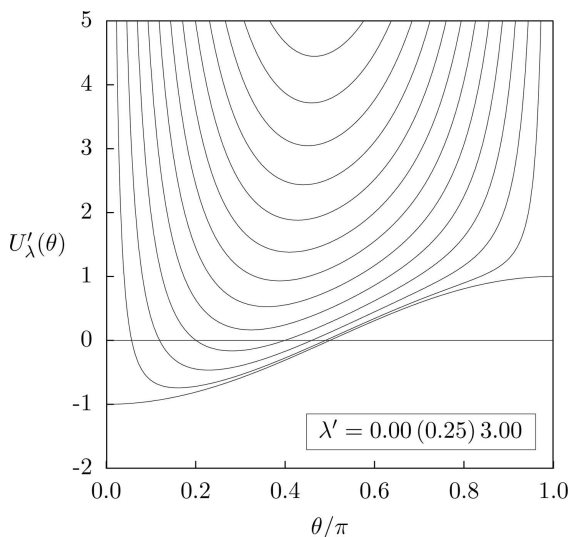


Figura 3 - Energia potencial efetiva para diferentes valores de λ' .

Observando-se a Fig. 3, nota-se que, para cada valor de λ' , a energia potencial efetiva passa por um valor mínimo em uma posição angular que chamaremos de θ_{min} . Para determinarmos a posição deste mínimo para

cada valor de λ' , devemos encontrar o valor de θ para o qual a derivada de $U'_\lambda(\theta)$ em relação a θ se anula, onde sua derivada segunda deve ser positiva. Assim, determinando a derivada de $U'_\lambda(\theta)$ em θ_{min} e a igualando a zero, chegamos à seguinte equação

$$\frac{\text{sen}^4 \theta_{min}}{\cos \theta_{min}} = \lambda'^2, \quad (36)$$

a qual deve ser resolvida para cada valor de λ' para determinarmos θ_{min} . Esta equação nos leva à seguinte relação para a derivada segunda de $U'_\lambda(\theta)$ em θ_{min}

$$\left. \frac{d^2 U'_\lambda}{d\theta^2} \right|_{\theta_{min}} = \frac{1 + 3 \cos^2 \theta_{min}}{\cos \theta_{min}}. \quad (37)$$

Como $\lambda'^2 \geq 0$ e $0 \leq \text{sen} \theta_{min} \leq 1$, da Eq. (36) podemos concluir, imediatamente, que $0 < \cos \theta_{min} \leq 1$, o que significa que, para qualquer que seja o valor de λ' , θ_{min} deve ser tal que $0 \leq \theta_{min} < \pi/2$. Desta forma, o valor da derivada segunda de $U'_\lambda(\theta)$ em θ_{min} é maior do que zero, como requer uma posição de mínimo. Os valores de θ_{min} para diferentes valores de λ' resultantes da Eq. (36) estão apresentados na Fig. 4, onde podemos notar que o valor de θ_{min} aproxima-se assintoticamente de $\pi/2$ à medida que λ' cresce indefinidamente. Uma outra quantidade de grande importância aqui é o valor mínimo de $U'_\lambda(\theta)$ para cada valor de λ' , que pode ser obtido fazendo-se uso da definição de $U'_\lambda(\theta)$ (Eq. (27)) e da equação que θ_{min} deve satisfazer (Eq. (36)), cujo valor é

$$U'_\lambda(\theta_{min}) = -\frac{\cos^2 \theta_{min} - \frac{1}{3}}{\frac{2}{3} \cos \theta_{min}}. \quad (38)$$

Estes valores estão apresentados na Fig. 5 como função de λ' .

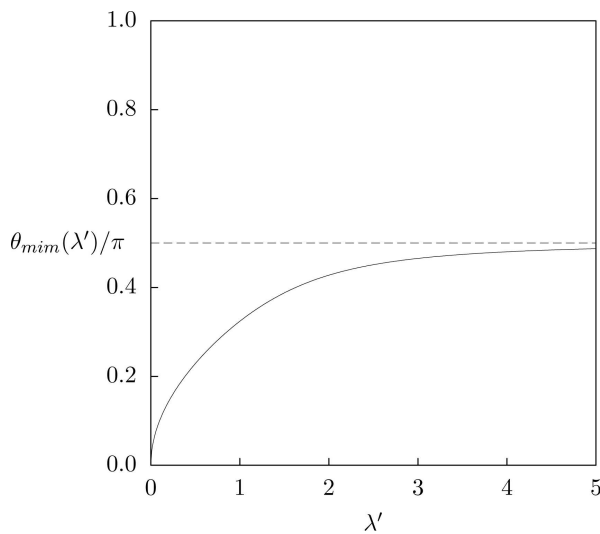


Figura 4 - Posição angular do mínimo da energia potencial efetiva como função de λ' .

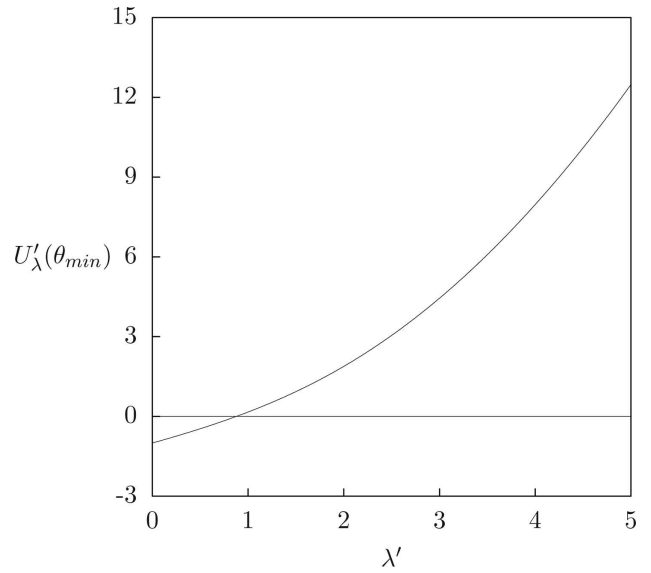


Figura 5 - Valores mínimos da energia potencial efetiva como função de λ' .

Devido à Eq. (28), só são possíveis valores de θ para os quais a relação $E' \geq U'_\lambda(\theta)$ é satisfeita. Assim, para cada valor de λ' o menor valor possível para E' é $U'_\lambda(\theta_{min})$. Levando-se isto em conta, para um certo valor de λ' e um valor possível de E' , o movimento da partícula em questão ao longo da coordenada θ está restrito a uma região angular compreendida entre um ângulo aquém ($\theta_r^{(-)}$) e outro além ($\theta_r^{(+)}$) de θ_{min} onde a partícula deixa de ter a fração da energia cinética correspondente ao seu movimento em θ e que localizam, nesta coordenada, os chamados pontos de retorno. Os valores de $\theta_r^{(-)}$ e $\theta_r^{(+)}$ são determinados usando-se a equação $p'_\theta(\theta_r^{(\pm)}) = 0$ que é equivalente à seguinte equação cúbica em $\cos \theta_r^{(\pm)}$

$$\cos^3 \theta_r^{(\pm)} + E' \cos^2 \theta_r^{(\pm)} - \cos \theta_r^{(\pm)} - \left(E' - \frac{\lambda'^2}{2} \right) = 0, \quad (39)$$

a qual é mencionada ao longo do texto correspondente ao assunto na Ref. [10], no entanto, não aparece escrita explicitamente como aqui. Na Fig. 6, apresentamos os valores de $\theta_r^{(-)}$ (curvas tracejadas) e $\theta_r^{(+)}$ (curvas cheias) como funções de E' para quatro valores de λ' . Note que, para cada valor de λ' os valores de $\theta_r^{(-)}$ e $\theta_r^{(+)}$ se igualam em um valor de E' que corresponde ao valor mais baixo possível para o valor de λ' em questão, pois nesta situação $\theta_r^{(-)} = \theta_r^{(+)} = \theta_{min}$. Em um artigo recente [15] é mostrado que em certas situações existe uma relação entre estes ângulos de retorno e a constante matemática irracional conhecida como proporção áurea.

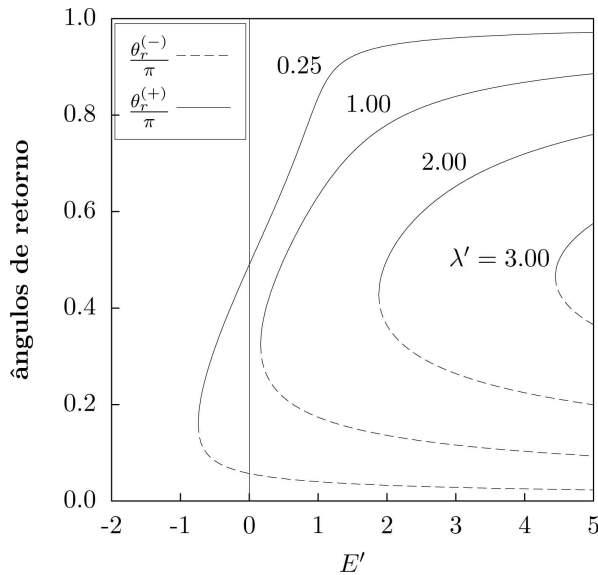


Figura 6 - Posições angulares dos pontos de retorno como funções de E' para alguns valores de λ' .

4. Diferentes movimentos pendulares como casos particulares do movimento pendular esférico

Nesta seção, apresentaremos os resultados numéricos para a evolução temporal das quantidades físicas que estamos usando para descrever o sistema físico em discussão. Como veremos a seguir, a aparência do movimento pendular pode mudar muito dependendo, unicamente, das condições iniciais das componentes do momento linear da partícula ($p'_{\theta 0}$ e $p'_{\varphi 0}$). Portanto, apresentaremos estes resultados em três subseções diferentes: na primeira, discutiremos os resultados relacionados à situação chamada de pêndulo simples; na segunda, os relacionados àquela conhecida como pêndulo cônico e, finalmente, apresentaremos os resultados para o movimento pendular esférico.

4.1. O pêndulo simples

Os movimentos característicos de um pêndulo simples, que é constituído fisicamente como um pêndulo esférico, são obtidos como casos particulares do movimento pendular esférico se no instante inicial escolhermos o valor de p'_{φ} como sendo nulo, o que, segundo a Eq. (33), é equivalente a escolher $\lambda' = 0$. Assim, devido ao fato de λ' ser uma constante de movimento durante a evolução temporal do sistema em estudo, podemos concluir, também da Eq. (33), que p'_{φ} será nulo na situação em questão e que, graças à Eq. (34), o mesmo acontecerá com $d\varphi/dt'$. Isto nos leva a concluir que o movimento do pêndulo simples se dará no plano vertical que contém o eixo Z , com sua coordenada esférica φ partindo do seu valor inicial φ_0 e sendo incrementado de π cada vez que a sua outra coordena-

nada esférica θ passar por zero. Portanto, as coordenadas cartesianas x , y e z que localizam a partícula do pêndulo simples assumem, respectivamente, os valores $R\text{sen}\theta \cos \varphi_0$, $R\text{sen}\theta \text{sen}\varphi_0$ e $R \cos \theta$ sempre que ela estiver do lado do plano do movimento onde ela estava no instante inicial. Tais coordenadas são alteradas, respectivamente, para $-R\text{sen}\theta \cos \varphi_0$, $-R\text{sen}\theta \text{sen}\varphi_0$ e $R \cos \theta$ sempre que a partícula estiver na outra metade do plano que contém seu movimento. Isto é equivalente a tratar a coordenada θ como uma quantidade que pode assumir valores positivos (sempre que ela estiver no lado do plano em questão onde ela estava no instante inicial) e negativos (sempre que ela estiver do outro lado) durante a evolução temporal do sistema.

Devido ao que foi discutido no parágrafo anterior, a energia potencial efetiva sob a ação da qual a partícula de um pêndulo simples se move é $U'_0(\theta) = U'(\theta)$ (veja curva associada à $\lambda' = 0$ na Fig. 3), com θ podendo assumir valores positivos e negativos, o que torna o gráfico de $U'_0(\theta)$ simétrico em torno de $\theta = 0$. Como previsto pela Eq. (36) para $\lambda' = 0$, esta energia potencial efetiva passa pelo seu valor mínimo em $\theta_{min} = 0$ e o valor deste mínimo, segundo a Eq. (38), é $U'_0(\theta_{min}) = -1$. Como já havíamos discutido na seção anterior, o menor valor possível para a energia mecânica de um sistema físico do tipo que estamos estudando é o valor mínimo que a sua energia potencial efetiva pode assumir, que no caso do pêndulo simples é $U'_0(\theta_{min})$. Assim, em qualquer situação que um pêndulo simples possa ser encontrado deve-se ter $E' \geq -1$.

Graças às conclusões acima e ao comportamento da energia potencial efetiva como função do ângulo θ para o movimento pendular em questão (veja Fig. 3, para o caso de $\lambda' = 0$), para valores da energia mecânica que satisfaçam à relação $-1 < E' < 1$, a partícula em movimento terá sempre dois pontos de retorno ($\theta_r^{(\pm)}$) simétricos em relação ao eixo Z que devem estar entre $-\pi$ e π . Os valores destes ângulos são obtidos fazendo-se uso da Eq. (39) para $\lambda' = 0$, a qual se reduz, neste caso, à

$$\cos \theta_r^{(\pm)} = -E' . \quad (40)$$

O valor absoluto das soluções desta equação é a amplitude (θ_r) do movimento do pêndulo simples, ou seja, $\theta_r = |\theta_r^{(\pm)}|$. Outra posição angular importante é aquela na qual a intensidade da tensão se anula, a qual chamamos de θ_c na Subsec.2.4 e é dada pela Eq. (30), que no caso do pêndulo simples pode ser relacionada à sua amplitude θ_r usando-se a Eq. (40), resultando em

$$\cos \theta_c = \frac{2}{3} \cos \theta_r . \quad (41)$$

Como discutido na Subsec. 2.4, os valores possíveis de θ_c devem estar compreendidos entre $\pi/2$ e π , o que, segundo a equação acima, nos faz concluir que, neste caso, $\theta_c \leq \theta_r$. Portanto, um pêndulo simples com energia mecânica entre 0 e 1 não alcançará seu ponto de retorno (sua amplitude) se na sua construção for utilizado

um fio, como já foi discutido anteriormente na Subsec. 2.4. A única maneira de um pêndulo com $E' \geq 0$ não ter em seu trajeto uma posição cuja coordenada angular θ passe por θ_c , é ter o valor de E' superior a $3/2$.

A evolução temporal de p'_θ e θ para um pêndulo simples é obtida, numericamente, usando-se as Eqs. (31) e (32) para $\lambda' = 0$, uma vez conhecida as condições iniciais θ_0 e E' , o que, como vimos anteriormente, é equivalente a conhecermos θ_0 e p'_{θ_0} (veja Eq. (35), para o caso de $\lambda' = 0$). Estas equações de movimento podem ser combinadas entre si e, para o caso de um pêndulo simples, nos fornece a seguinte equação para θ

$$\frac{d^2\theta}{dt'^2} + (2\pi)^2 \text{sen}\theta = 0, \quad (42)$$

a qual será útil na discussão do movimento de um pêndulo simples com amplitude pequena.

Os resultados que mostraremos aqui são para um pêndulo simples em cuja confecção foi usada uma barra rígida de inércia desprezível no lugar de um fio para que o seu movimento não sofra, em situações energeticamente possíveis, o efeito da passagem pela posição onde sua coordenada θ assume o valor crítico θ_c , como discutido na Subsec. 2.4 e, também, na presente subseção. Na Fig. 7 e na Fig. 8, que é apenas uma ampliação da Fig. 7 ao longo do seu eixo vertical, mostramos a evolução temporal da coordenada θ do pêndulo em questão para diferentes situações iniciais. Em todas as situações apresentadas nestas figuras, escolhemos $\theta_0 = 0$ e $p'_{\theta_0} > 0$ (veja Eq. (35)) para cada um dos valores de E' . Como podemos notar na Fig. 7 existem dois comportamentos distintos para o pêndulo em estudo: um para $E' = -0,95$ (um pouco acima do valor mínimo permitido a E') e para $E' = 0,95$ (um pouco abaixo do valor máximo de $U'_0(\theta)$), e outro para os valores de E' superiores ao valor máximo de $U'_0(\theta)$. Nas duas primeiras situações, que correspondem, respectivamente, às curvas cheia e a de tracejado longo, os movimentos são oscilações periódicas em torno de $\theta = 0$ com amplitudes e períodos dependentes do valor de E' . Nas outras duas situações, que correspondem, respectivamente, às curvas de tracejado curto e a pontilhada, os movimentos do pêndulo são tais que sua coordenada θ aumenta indefinidamente à medida que o tempo passa, indicando que ele está em movimento circular no plano vertical que, como pode ser notado na Fig. 7, tende a ser uniforme à medida que E' aumenta e os valores da energia potencial gravitacional que o sistema pode assumir tornam-se irrelevantes quando comparados a E' . As mesmas situações apresentadas na Fig. 7 aparecem na Fig. 9 na forma do que é chamado de espaço de fase do sistema ($p'_\theta \times \theta$), onde podemos observar com clareza que os movimentos relativos à $E' = -0,95$ e à $E' = 0,95$ são oscilações, como comentado anteriormente.

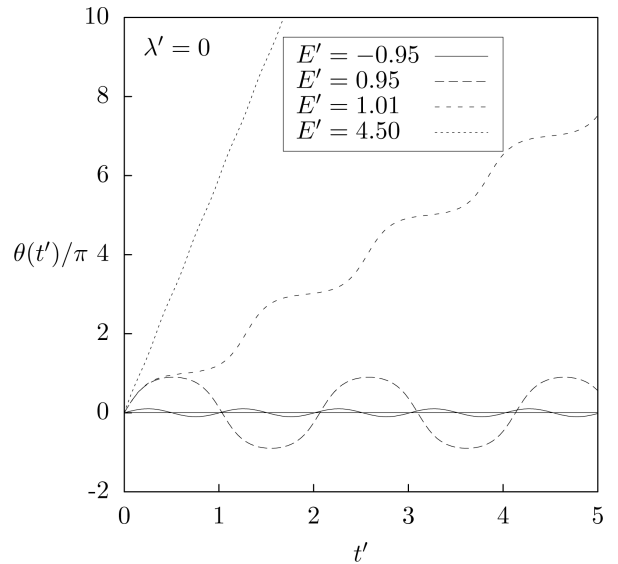


Figura 7 - Posição angular θ de um pêndulo simples como função do tempo para diferentes valores da energia mecânica.

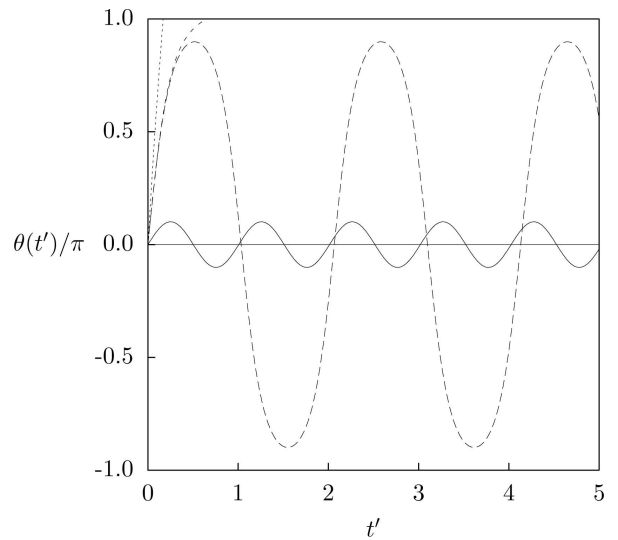


Figura 8 - Os mesmos resultados apresentados na Fig. 7, ampliados.

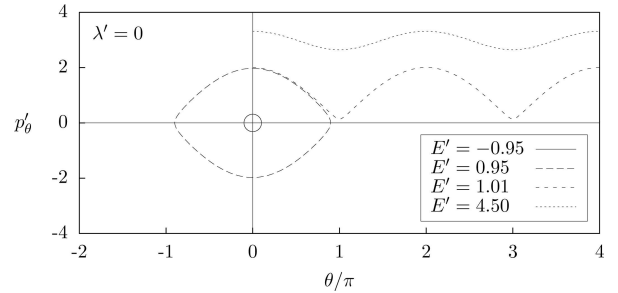


Figura 9 - Espaço de fase de um pêndulo simples para as mesmas condições iniciais usadas na Fig. 7.

É interessante determinar como o período (τ') das oscilações periódicas de um pêndulo simples depende de sua energia mecânica E' ou, equivalentemente graças à Eq. (40), como ele depende da amplitude θ_r deste movimento que, como já vimos, é igual a $|\theta_r^{(\pm)}|$. Para fazer-

mos isto, considere que em um intervalo infinitesimal de tempo dt' a posição angular θ do pêndulo simples foi alterada de um deslocamento angular infinitesimal $d\theta$, cujo valor está relacionado a dt' por

$$dt' = \frac{d\theta}{d\theta/dt'} = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta}{p'_\theta}, \quad (43)$$

onde usamos a Eq. (32). Escolhendo-se p'_θ como sendo o valor positivo que resulta da utilização da Eq. (28) com $\lambda' = 0$, integrando-se ambos os lados da relação acima desde a passagem do pêndulo por $\theta = 0$ até ele alcançar $\theta = \theta_r$, que corresponde ao intervalo de tempo $\tau'/4$, e utilizando-se a mudança de variável

$$\text{sen}u = \frac{\text{sen}(\theta/2)}{\text{sen}(\theta_r/2)}, \quad (44)$$

chegamos à seguinte relação para a determinação do período de um pêndulo simples

$$\begin{aligned} \tau'(\theta_r) &= \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - \text{sen}^2(\theta_r/2) \cdot \text{sen}^2u}} \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \mathcal{K}(\text{sen}^2(\theta_r/2)), \end{aligned} \quad (45)$$

onde \mathcal{K} é a conhecida “integral elíptica completa de primeira espécie” [16]. Na Fig. 10 mostramos como o período de um pêndulo simples depende de sua amplitude (curva cheia) que resulta da utilização da relação acima.

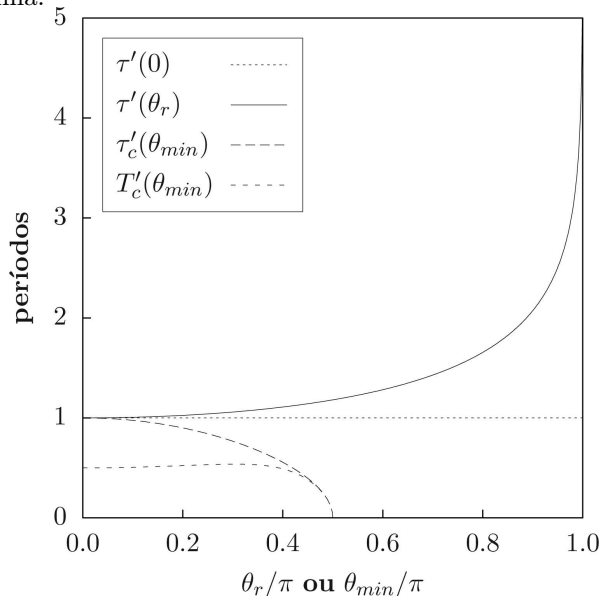


Figura 10 - Comparação entre os períodos de diferentes movimentos pendulares. Veja o texto para maiores detalhes.

Nos caso em que E' é pouco superior a $U'_0(\theta_{min})$ ($E' \gtrsim U'_0(\theta_{min}) = -1$), como no caso de $E' = -0,95$ apresentado nas Figs. 7 a 9, o valor da amplitude do movimento oscilatório do pêndulo simples é bem menor que $\pi/2$. Devido a isto, um comportamento aproximado para $U'_0(\theta) = -\cos\theta$ em torno de $\theta_{min} = 0$ que

preserve até o primeiro termo dependente de θ , ou seja,

$$U'_0(\theta) \approx -1 + \frac{1}{2}\theta^2, \quad (46)$$

deve descrever bem o movimento oscilatório de um pêndulo simples nesta situação que, portanto, se assemelha a um movimento harmônico simples.

Até a mesma ordem de aproximação usada para chegarmos à relação Eq. (46) válida para o movimento oscilatório com amplitude pequena de um pêndulo simples, podemos, a partir da Eq. (40), determinar como varia de forma aproximada a amplitude deste movimento como função de E' e o resultado é

$$\theta_r \approx \sqrt{2(1 + E')}. \quad (47)$$

Da mesma forma, a intensidade da força \mathbf{T} (Eq. (29)) que atua na partícula varia, aproximadamente, da seguinte maneira

$$\begin{aligned} T' &\approx 3 \left(1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{2}{3}E' \right) \\ &\approx 1 + \theta_r^2 - \frac{3}{2}\theta^2, \end{aligned} \quad (48)$$

onde usamos o valor aproximado de θ_r dado pela Eq. (47).

Na situação em questão, a evolução temporal da coordenada angular θ do pêndulo simples pode ser obtida de uma forma muito simples se na Eq. (42) aproximarmos os valores de $\text{sen}\theta$ de modo a preservar, como no caso de $U'_0(\theta)$, até o primeiro termo dependente de θ que, no caso, resulta em $\text{sen}\theta \approx \theta$. Assim, a Eq. (42) pode ser escrita, aproximadamente, como

$$\frac{d^2\theta}{dt'^2} + (2\pi)^2\theta \approx 0, \quad (49)$$

que é uma equação diferencial muito bem conhecida e que tem como solução para a evolução temporal de θ uma oscilação harmônica simples com frequência angular que, adimensionalmente, vale 2π . Desta forma, o período destas oscilações é 1, o que coincide com o valor obtido fazendo-se $\theta_r = 0$ na Eq. (45) e que, como é sabido para esta situação, independe de E' ou, equivalentemente, de θ_r . Este valor ($\tau'(0) = 1$) é mostrado na Fig. 10 como uma linha horizontal pontilhada. Note que, para pequenos valores de θ_r a aproximação de amplitudes pequenas, representada por $\tau'(0)$, para a determinação do período do movimento oscilatório de um pêndulo simples é muito boa, mas a medida que a amplitude do movimento aumenta esta aproximação torna-se cada vez pior.

4.2. O pêndulo cônico

Um movimento pendular cônico é um caso particular de movimento pendular esférico em que a partícula que o constitui move-se em uma trajetória circular em torno do eixo Z (veja Fig. 1) fazendo com que o fio, preso ao ponto O e que a mantém suspensa, descreva uma superfície cônica durante o seu movimento, daí seu nome. Do

ponto de vista matemático, este é o caso de movimento pendular esférico mais simples de ser tratado, pois as equações de movimento (Eqs. (31)-(34)) têm soluções muito simples nesta situação.

Para o sistema em questão comportar-se como um pêndulo cônico, é necessário que a componente p'_θ do momento linear da partícula que o constitui seja sempre nula. Esta situação é alcançada se no instante inicial escolhermos um valor λ' diferente de zero para a componente Z do momento angular da partícula e dermos a ela uma quantidade de energia mecânica exatamente igual a $U'_\lambda(\theta_{min})$ numa posição inicial cuja coordenada angular θ_0 seja, necessariamente, θ_{min} enquanto que a outra coordenada angular φ_0 possa ser qualquer um de seus valores possíveis. Com estas condições iniciais e usando-se a Eq. (35), podemos concluir que $p'_{\theta_0} = 0$. Podemos usar as equações de movimento para a coordenada angular θ (Eqs. (31) e (32)) para concluir que, com estas condições iniciais e a relação entre θ_{min} e λ' apresentada na Eq. (36), a partícula em um movimento pendular cônico fica parada na coordenada angular θ_{min} na direção de $\hat{\theta}$. Então o único movimento que ela tem é ao longo de uma trajetória circular em torno do eixo Z com uma velocidade angular constante dada por

$$\frac{d\varphi}{dt'} = \pm \frac{2\pi}{\sqrt{\cos \theta_{min}}}, \quad (50)$$

obtida substituindo-se a Eq. (33) na Eq. (34) e usando-se a relação entre θ_{min} e λ' que aparece na Eq. (36), sendo que os sinais positivo e negativo indicam, respectivamente, se o momento linear da partícula neste movimento tem o mesmo sentido ou o sentido oposto ao do vetor unitário $\hat{\varphi}$. Com o que foi discutido neste parágrafo, podemos concluir que o fio que compõe o pêndulo cônico gera, durante o movimento da partícula pendurada nele, uma superfície cônica imaginária com vértice em O , abertura angular igual a $2\theta_{min}$ e altura que, dimensionalmente, é $\cos \theta_{min}$.

A intensidade da força exercida pelo fio sobre a partícula (T') em um movimento pendular cônico é obtida a partir da Eq. (29) com $\theta = \theta_{min}$ e $E' = U'_\lambda(\theta_{min})$, cujo valor em termos de θ_{min} é dado pela Eq. (38), resultando em

$$T' = \frac{1}{\cos \theta_{min}}, \quad (51)$$

que é um resultado bem conhecido da mecânica clássica elementar. Um outro resultado tão bem conhecido como este é o intervalo de tempo que a partícula leva para completar cada volta em torno do eixo Z e conhecido como o período do pêndulo cônico (τ'_c), que é obtido da seguinte maneira

$$\tau'_c(\theta_{min}) = \frac{2\pi}{\left| \frac{d\varphi}{dt'} \right|} = \sqrt{\cos \theta_{min}}, \quad (52)$$

onde a Eq. (50) foi usada para a obtenção do módulo da velocidade angular da partícula. Aproveitamos a

Fig. 10 para mostrar o comportamento do período de um pêndulo cônico para os diferentes valores possíveis de θ_{min} (curva de tracejado longo).

Para cada valor de λ' diferente de zero, se para o sistema em questão E' for ligeiramente maior que $U'_\lambda(\theta_{min})$, a partícula não ficará parada em θ_{min} na direção de $\hat{\theta}$, mas, também, poderá se afastar muito pouco desta coordenada pois, em situações como esta, os ângulos de retorno são bem próximos de θ_{min} como podemos concluir de uma análise da Fig. 3 ou da Fig. 6. Assim, para analisarmos o movimento oscilatório da partícula ao longo desta direção, não é necessário o conhecimento da forma exata da energia potencial efetiva $U'_\lambda(\theta)$ sob a ação da qual ela se moverá, sendo suficiente uma aproximação de Taylor até a segunda ordem em $\theta - \theta_{min}$ para $U'_\lambda(\theta)$, a qual resulta em

$$U'_\lambda(\theta) \approx U'_\lambda(\theta_{min}) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 U'_\lambda}{d\theta^2} \right|_{\theta_{min}} \cdot (\theta - \theta_{min})^2, \quad (53)$$

onde os valores de θ_{min} , $U'_\lambda(\theta_{min})$ e $d^2 U'_\lambda/d\theta^2|_{\theta_{min}}$ são obtidos, respectivamente, a partir das Eqs. (36), (38) e (37). Com esta forma aproximada para a energia potencial efetiva, o movimento oscilatório da partícula em torno de θ_{min} será descrito como um movimento harmônico simples de período adimensional T'_c obtido, como é bem sabido, a partir do coeficiente $d^2 U'_\lambda/d\theta^2|_{\theta_{min}}$ que aparece na aproximação acima, da seguinte maneira

$$\begin{aligned} T'_c(\theta_{min}) &= \left(\left. \frac{d^2 U'_\lambda}{d\theta^2} \right|_{\theta_{min}} \right)^{-1/2} \\ &= \frac{\tau'_c(\theta_{min})}{\sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta_{min}}}, \end{aligned} \quad (54)$$

onde usamos, primeiramente, o resultado que aparece na Eq. (37) e, depois, a Eq. (52) para relacionarmos T'_c com τ'_c . Para os movimentos oscilatórios que estamos considerando, nos quais θ se afasta muito pouco de θ_{min} , as equações de movimento para a coordenada angular φ da partícula (Eqs. (33) e (34)) prevêm, aproximadamente, uma velocidade angular para a sua evolução temporal como aquela que aparece na Eq. (50), correspondente à do movimento pendular cônico em torno do qual a oscilação em questão ocorre, e, conseqüentemente, o tempo gasto pela partícula em cada volta completa em torno do eixo Z será, também aproximadamente, dado pela Eq. (52). Assim, podemos concluir da última relação na Eq. (54) que o tempo gasto pela partícula para completar uma oscilação de pequena amplitude em torno de uma certo θ_{min} é sempre menor do que o tempo que ela gasta para dar uma volta completa em torno do eixo Z . Isto pode ser observado na Fig. 10, onde mostramos como T'_c varia em função de θ_{min} (curva de tracejado curto) juntamente com os demais períodos determinados anteriormente.

Um movimento pendular esférico do tipo que acabamos de discutir no parágrafo anterior é especialmente interessante pois trata-se de um movimento semelhante àquele registrado experimentalmente na Ref. [1], o qual, como mencionamos na introdução, deu origem à discussão apresentada aqui. Para se ter idéia de como é a trajetória seguida pela partícula em uma situação como esta, apresentamos nas Figs. 11 e 12 a projeção de uma trajetória no plano XY (curvas cheias) como vista por alguém olhando o movimento pendular da partícula de baixo para cima, ou seja, no sentido de $-\hat{k}$ (veja Fig. 1). Esta projeção foi obtida marcando-se no plano XY os pontos de coordenadas $x = R\text{sen}\theta \cos\varphi$ e $y = R\text{sen}\theta \text{sen}\varphi$ pelas quais a partícula passa durante o seu movimento, sendo que os valores de θ e φ a cada instante são determinados resolvendo-se numericamente as equações de movimento que aparecem nas Eqs. (31)-(34). Na situação apresentada nas Figs. 11 e 12, os marcos em forma de circunferência correspondem ao instante inicial do movimento (t'_0) quando foram escolhidas as condições iniciais $\lambda' = 0, 1$, $E' = 0, 99U'_\lambda(\theta_{min})$, $\theta_0 = \theta_{min}$ e $\varphi_0 = 0$, com a escolha do sinal positivo para p'_{θ_0} (veja Eq. (35)). Note que o valor de E' fornecido ao sistema é ligeiramente superior a $U'_\lambda(\theta_{min})$, pois para o valor de λ' escolhido temos $U'_\lambda(\theta_{min}) < 0$ (veja Fig. 3 ou Fig. 5), e, portanto, o movimento da partícula será, aproximadamente, aquele descrito no parágrafo anterior, ou seja, uma oscilação harmônica simples da sua coordenada angular θ em torno da trajetória circular do movimento pendular cônico correspondente ao valor de θ_{min} para o caso, cuja projeção no plano XY seria a circunferência de raio $R\text{sen}\theta_{min}$ representada pelas curvas tracejadas nas Figs. 11 e 12 e que estaria em um plano paralelo ao plano XY onde $z = R \cos\theta_{min}$. A diferença entre os aspectos das Figs. 11 e 12 é devida ao fato de termos acompanhado, respectivamente, a evolução temporal do movimento desde t'_0 até os instantes $t' \approx t'_0 + 2T'_c(\theta_{min})$ e $t' \gg t'_0 + 2T'_c(\theta_{min})$, correspondentes aos marcos em forma de disco que aparecem nestas figuras. Note, ainda, que, durante este movimento em torno do eixo Z , $R\text{sen}\theta_r^{(-)}$ e $R\text{sen}\theta_r^{(+)}$ são, respectivamente, as distâncias de maior e de menor aproximação da partícula ao eixo Z (veja Fig. 11), as quais, com o passar do tempo, serão os raios das circunferências que servirão, respectivamente, de envoltórias interna e externa para a trajetória seguida pela partícula (veja Fig. 12), a qual não está contida em um plano paralelo ao plano XY e sim, no caso em questão, em uma região estreita do espaço definida por $R \cos\theta_r^{(+)} \leq z \leq R \cos\theta_r^{(-)}$. O segmento de trajetória apresentado na Fig. 11 é semelhante ao registrado experimentalmente no trabalho da Ref. [1].

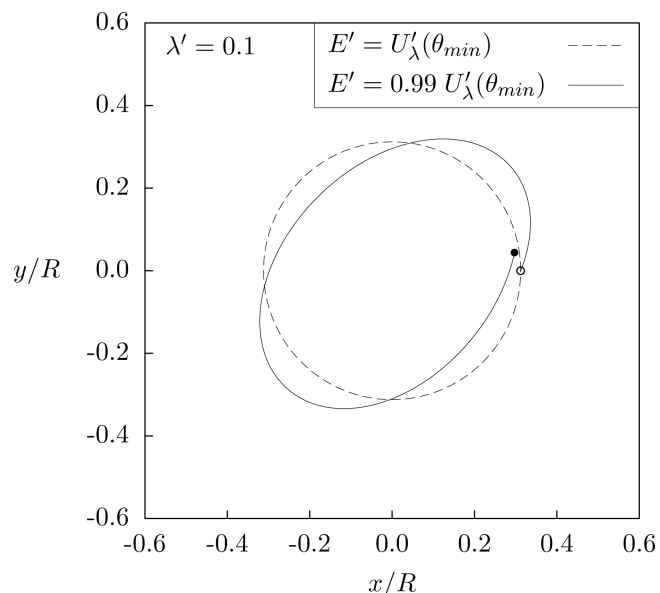


Figura 11 - Projeção no plano XY da trajetória seguida por uma partícula em um movimento pendular esférico, acompanhado desde o instante inicial até a partícula completar um pouco mais que uma volta em torno do eixo Z . Note a semelhança entre esta figura e aquela registrada experimentalmente na Ref. [1]. Veja o texto para maiores detalhes.

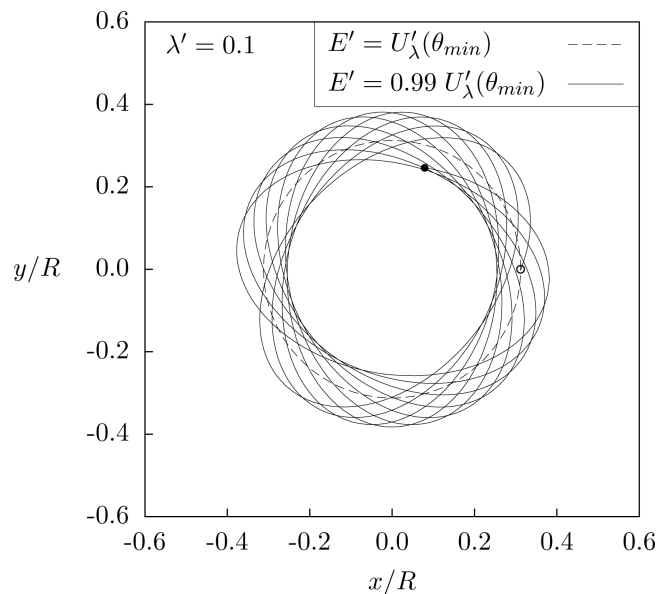


Figura 12 - O mesmo que foi apresentado na Fig. 11, exceto pelo fato de termos, aqui, acompanhado o sistema por mais tempo.

4.3. O pêndulo esférico

Como um último exemplo, na Fig. 13 apresentamos a trajetória seguida por uma partícula em um movimento pendular esférico para o qual nenhuma restrição, como aquelas das duas subseções anteriores a esta, foi imposta sobre as condições iniciais do movimento. O ângulo de visada escolhido é tal que o leitor tem uma visão da evolução temporal da posição da partícula semelhante àquele da Fig. 1. No instante inicial deste movimento (t'_0), que corresponde ao marco em forma

de circunferência mostrado na figura, foram dadas como condições iniciais ao sistema os valores $\lambda' = 1, 0$, $E' = 2, 0$, $\theta_0 = \pi/4$ e $\varphi_0 = 0$, com a escolha do sinal positivo para p'_{θ_0} (veja Eq. (35)), e o movimento da partícula foi acompanhado até o instante $t' = t'_0 + 20$, correspondente ao marco em forma de disco que também aparece nesta figura. Com estes valores escolhidos para λ' e E' e uma análise da Fig. 3 ou da Fig. 6, podemos concluir que neste caso os ângulos de retorno $\theta_r^{(-)}$ e $\theta_r^{(+)}$ são bem diferentes entre si, pois $\theta_r^{(-)} \approx 0,15\pi$ e $\theta_r^{(+)} \approx 0,80\pi$.

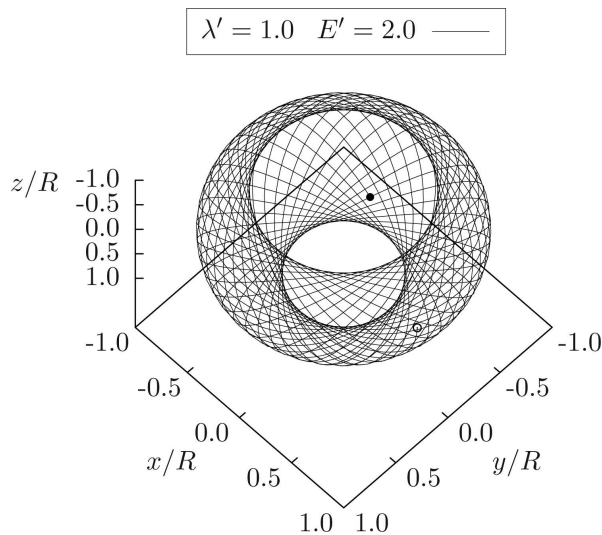


Figura 13 - Trajetória típica seguida por uma partícula em um movimento pendular esférico.

Assim, como em todas as situações discutidas neste trabalho, a partícula percorre uma trajetória sobre a superfície esférica imaginária de raio R que no caso em discussão, com o passar do tempo, nos daria a impressão de uma linha enrolada em um novelo, como podemos perceber na Fig. 13. Finalmente, note que durante este movimento a partícula nunca passa por duas regiões desta esfera em formas de calotas, uma embaixo e de perímetro $2\pi R \sin \theta_r^{(-)}$ e outra em cima e de perímetro $2\pi R \sin \theta_r^{(+)}$, e que sua coordenada z fica sempre restrita ao intervalo $[R \cos \theta_r^{(+)}, R \cos \theta_r^{(-)}]$.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Profa. Ana Maria Senra Breitschaft do Instituto de Física da UFRJ por ter lido cuidadosamente a versão original deste trabalho. Um dos autores (P.C.G. de M.) agradece, também, o suporte financeiro da Fundação D.T. (Brasil) durante a

execução deste trabalho.

Referências

- [1] H.S. de Amorim, *Aplicações da Fotografia Digital no Ensino de Física*, http://omnis.if.ufrj.br/~pef/aulas_seminarios/seminarios/2008_1_4_helio.pdf.
- [2] M. Alonso e E.J. Finn, *Física: Um Curso Universitário, v. 1 (Mecânica)* (Editora Edgard Blücher Ltda., São Paulo, 1972), 1ª ed.
- [3] A.P. French, *The MIT Introductory Physics Series, Newtonian Mechanics* (W.W. Norton & Company Inc., New York, 1971).
- [4] D. Halliday, R. Resnick e K.S. Krane, *Física 1* (Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 1996), 4ª ed.
- [5] H. Moysés Nussenzveig, *Curso de Física Básica, v. 1 (Mecânica)* (Editora Edgard Blücher Ltda., São Paulo, 2002), 4ª ed.
- [6] A.P. French, *The MIT Introductory Physics Series, Vibrations and Waves* (Thomas Nelson and Sons Ltd., London, 1974), reimpressão.
- [7] D. Halliday, R. Resnick e K.S. Krane, *Física 2* (Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 1996), 4ª ed.
- [8] H. Moysés Nussenzveig, *Curso de Física Básica, v. 2 (Fluidos, Oscilações e Ondas e Calor)* (Editora Edgard Blücher Ltda., São Paulo, 1996), 3ª ed.
- [9] H. Goldstein, *Classical Mechanics* (Addison-Wesley Publishing Company, Reading, 1980), 2ª ed.
- [10] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics, v. 1 (Mechanics)* (Pergamon Press Ltd., Oxford, 1960), 1ª ed.
- [11] J.B. Marion and S.T. Thornton, *Classical Dynamics of Particles and Systems* (Brooks/Cole - Thomson Learning Inc., Pacific Grove CA, 1995), 4ª ed.
- [12] K.R. Symon, *Mechanics* (Addison-Wesley Publishing Company, Reading MA, 1971), 3ª ed.
- [13] M.G. Olsson, *The precessing spherical pendulum*, Am. J. Phys. **46**, 1118 (1978).
- [14] M.G. Olsson, *Spherical pendulum revisited*, Am. J. Phys. **49**, 531 (1981).
- [15] H. Essén and N. Apazidis, *Turning points of the spherical pendulum and the golden ratio*, Eur. J. Phys. **30**, 427 (2009).
- [16] M. Abramowitz and I.A. Stegun (eds.), *Handbook of Mathematical Functions* (Dover Publications Inc., New York, 1970), 9ª impressão.