

# Potência de tração de um veículo automotor que se movimenta com velocidade constante

(*Tractive power of a motor vehicle moving at constant speed*)

Fernando Lang da Silveira<sup>1</sup>

*Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil*  
Recebido em 11/8/2009; Aceito em 23/1/2011; Publicado em 21/3/2011

Um modelo para a potência de tração de veículos automotores como função da velocidade do veículo, da resistência ao rolamento nas rodas e do arrasto aerodinâmico do ar é proposto. Um teste empírico para o modelo, baseado em dados sobre a potência nominal máxima e a velocidade máxima de 155 veículos é apresentado, corroborando o modelo de que a potência máxima está relacionada com o cubo da velocidade máxima.

**Palavras-chave:** potência de tração, velocidade máxima de automóveis, resistência ao rolamento, arrasto do ar.

A model for a motor vehicles' tractive power as a function of the speed, the rolling resistance on their wheels, and the air's aerodynamic drag force, is proposed. Based on both nominal top power and top speed data of 155 vehicles, an empiric test for this model is presented, and corroborates the assumption that the top power is related to the cube of the top speed.

**Keywords:** tractive power, vehicle top speed, rolling resistance, air's drag force.

## 1. Introdução

A potência de tração que o motor de um automóvel desenvolve ao se movimentar, com velocidade constante sobre uma pista horizontal, está relacionada às resistências ao movimento do automóvel. De maneira inapropriada tais resistências são usualmente denominadas de *atrito*. Esta denominação é inadequada, prejudicando o entendimento da dinâmica de veículos automotores, pois as resistências a serem vencidas sobre uma pista horizontal são aquelas devidas ao movimento em relação ao ar - o *arrasto aerodinâmico* - e à *resistência ao rolamento* das rodas sobre a pista. A força externa ao automóvel que o impulsiona para frente é usualmente uma *força de atrito estático* (exceto quando as rodas patinam ou deslizam sobre a pista, quando então vale o *atrito cinético*) entre as rodas de tração e a pista de rolamento. Desta forma a *força de atrito* nas rodas de tração, ao invés de se opor ao movimento do automóvel, desempenha o importante papel de *força motora*. A força de *arrasto aerodinâmico* se deve preponderantemente a *efeitos inerciais* do ar sobre o automóvel; o *atrito viscoso* do ar com as superfícies do automóvel é desprezível frente aos *efeitos inerciais* do ar conforme abordaremos adiante. Ou seja, é equivocado denominar os efeitos do ar sobre o automóvel de *atrito* já que o *atrito viscoso* não é relevante neste caso.

Os objetivos desse artigo são os de discutir a mal compreendida *resistência ao rolamento* (aliás, assunto omissos na maioria dos textos universitários de física geral), o *arrasto aerodinâmico* e criar um modelo que permita estabelecer as relações que estes efeitos têm com a potência de tração de um automóvel que se movimenta com velocidade constante. Adicionalmente, um teste empírico para o modelo proposto, conduzido a partir de dados sobre a potência máxima e a velocidade máxima de 155 veículos é apresentado.

## 2. A resistência ao rolamento nas rodas livres ou não tracionadas

Para discutir o papel dinâmico da *resistência ao rolamento* e da *força de atrito estático* nas rodas, vamos considerar inicialmente uma bicicleta. Em uma bicicleta todo o mecanismo nas duas rodas está acessível a uma simples inspeção visual, diferentemente de um automóvel onde não se tem, externamente, a visão de tais mecanismos. Por isto optamos por considerar o que ocorre nas rodas de uma bicicleta e depois generalizar para quaisquer rodas de veículos automotores. Admitiremos que as rodas da bicicleta rolem sem deslizar sobre a pista, valendo então o *atrito estático* entre elas e a pista.

<sup>1</sup>E-mail: lang@if.ufrgs.br.

Consideremos a roda dianteira de uma bicicleta (a roda livre ou não tracionada) que trafega com velocidade constante sobre uma pista horizontal. Se o pavimento é como o asfalto ou o concreto, as deformações ocorrem quase que exclusivamente na região da roda em contato com a pista (sendo desprezíveis as deformações da própria pista de rolamento) e tais deformações no pneu, apesar de serem elásticas (pois a parte deformada do pneu retoma a forma original quando perde o contato com a pista), dissipam internamente ao pneu energia mecânica, aumentando a sua energia interna; a evidência dessa perda de energia mecânica e, por consequência, o aumento da energia interna, é o aquecimento que o pneu sofre ao rodar. A resistência ao rolamento está associada à perda de energia mecânica na roda devido a essas deformações com histerese mecânica [1], isto é, devido ao fato que em um ciclo de deformação de uma dada região da roda há um trabalho não nulo e resistivo realizado. Quando a bicicleta trafega sobre uma pista deformável, como é o caso da areia ou do cascalho, a dissipação de energia mecânica será devida também (e preponderantemente) às deformações permanentes da pista.

As ações sobre a roda dianteira, de acordo com a Fig. 1, quando ela rola se trasladando com velocidade constante  $v$ , são aquelas exercidas pela pista de rolamento (a força normal à pista -  $N$  - e a força de atrito estático -  $A$ ), pelo eixo que empurra a roda dianteira para frente -  $F$  - e para baixo, bem como o peso da roda dianteira. Estas duas últimas forças não estão nomeadas na Fig. 1 apesar de estarem representadas em único vetor; encontram-se nomeadas apenas as forças que interessam ao desenvolvimento subsequente da teoria. Desprezam-se as forças que o ar exerce na roda dianteira, admitindo-se que ela possa girar sem atrito no eixo central, com velocidade angular  $w$  constante.

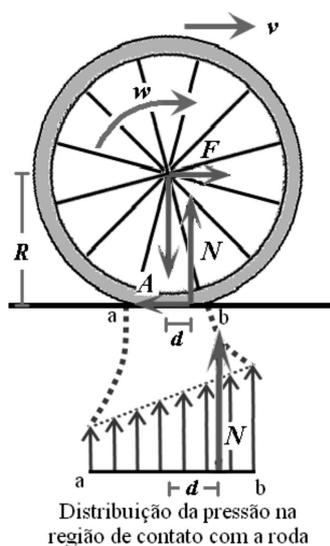


Figura 1 - Forças exercidas na roda dianteira e representação da distribuição da pressão na região de contato da roda com a pista de rolamento.

Quando a roda rola, devido às deformações elásticas amortecidas, a pressão na região de contato com a pista não é uniforme, crescendo dentro dessa região no sentido do movimento [1]. Na Fig. 1 está representada a distribuição da pressão na região de contato com a pista com auxílio de um diagrama que indica a força sobre uma pequena área elementar ao longo dessa região. Assim sendo a força normal resulta deslocada para frente em relação ao centro da região de contato por uma distância  $d$ , conforme indicado na Fig. 1. Caso as deformações fossem elásticas sem amortecimento e não houvesse qualquer outro efeito de histerese, a pressão estaria distribuída de maneira simétrica em relação ao centro da região de contato com a pista, resultando que a força normal se localizaria exatamente abaixo do eixo da roda dianteira e, conseqüentemente, a distância  $d$  seria nula.

Como a roda se desloca com velocidade  $v$  constante, girando em torno do seu eixo com velocidade angular  $w$  constante, tanto o somatório das forças quanto dos torques (em relação ao eixo de rotação da roda) devem ser nulos. Daí resulta que

$$F = A \quad (1)$$

$$A \cdot R = N \cdot d \quad (2)$$

Da Eq. (2) obtém-se que a força de atrito estática necessária para que aconteça o rolamento sem deslizamento vale

$$A = \frac{d}{R} N \quad (3)$$

A razão  $d$  por  $R$  é denominada *coeficiente de resistência ao rolamento* -  $\alpha$  - e portanto

$$\alpha = \frac{d}{R} = \frac{A}{N} \quad (4)$$

A expressão (4) tem como consequência que, se  $d = 0$ , não há resistência ao rolamento ( $\alpha = 0$ ). Em disciplinas de Física Geral o rolamento de um corpo rígido sobre uma superfície rígida é usualmente o único modelo abordado teoricamente, implicando que na ausência de deformações valha trivialmente  $d = 0$ . Este modelo de corpo rígido não dá conta de que um objeto que role possa parar, somente graças ao atrito com o pavimento, pois ao se admitir uma força de atrito não nula para retardar o movimento de rolamento, o torque da força de atrito aumentaria, paradoxalmente (!), a velocidade angular  $w$ .

A expressão (4) implica que a diminuição do *coeficiente de resistência ao rolamento* pode ser conseguida por aumentar o raio  $R$  da roda (veículos utilitários e "fora de estrada" usualmente tem rodas maiores do que veículos convencionais, resistindo menos ao rolamento, principalmente em terrenos irregulares) ou/e diminuir a distância  $d$ . Uma forma de diminuir  $d$  é por diminuir

a região de contato do pneu com a pista e, para tal ser concretizado, deve-se aumentar a pressão do pneu. Daí se entende a razão pela qual os pneus das bicicletas de corrida operarem com alta pressão manométrica (seis ou mais atmosferas). Por outro lado, pneus de automóvel que rodem abaixo da pressão recomendada, sofrem maior resistência ao rolamento pois tem a região de contato com a pista expandida, conseqüentemente determinando um acréscimo em  $d$ . Então a energia mecânica dissipada em maior quantidade produz um aquecimento do pneu acima do normal e acarreta um maior consumo de combustível.

O *coeficiente de resistência ao rolamento* para pneus de automóvel, rodando sobre pista com pavimento duro como o asfalto ou o concreto, usualmente é da ordem de 0,01, enquanto que o *coeficiente de atrito estático* (borracha e asfalto ou concreto secos) situa-se entre 0,85 e 1,0 [2]. Lembremos que o *coeficiente de atrito estático*, quando multiplicado pelo valor da força normal, informa sobre o valor máximo da força de atrito, não expressando qual é efetivamente a força de atrito em uma particular situação do pneu. Já o *coeficiente de resistência ao rolamento*, quando multiplicado pela intensidade da força normal, resulta no valor da força de atrito estático que acontece no rolamento sem deslizamento da roda não tracionada. Portanto, a resistência ao rolamento equivale a uma força com intensidade cerca de 1% da intensidade da força normal à pista, enquanto a força de atrito máxima possível poderia ser cerca de cem vezes maior. Assim justifica-se teoricamente o fato bem conhecido de que as rodas permitem o deslocamento de um veículo com pequena resistência ao rolamento,<sup>2</sup> possibilitando que o esforço de uma ou duas pessoas movimente um automóvel sobre pavimento horizontal duro.

### 3. Rodas de tração: resistência ao rolamento, força de atrito com o pavimento, torque e potência de tração

Passamos agora a analisar a roda de tração da bicicleta. A Fig. 2 representa as ações na roda de tração (apenas as forças que interessam ao ulterior desenvolvimento teórico estão nomeadas com letras maiúsculas). A corrente exerce sobre a engrenagem solidária à roda uma força tensora -  $T$  - que é responsável pelo torque de tração  $\tau_{Tração}$ . O quadro traseiro (não representado na figura), onde o eixo central da roda está fixo, empurra a roda para baixo e para trás; adicionalmente a roda de tração é pressionada contra a pista de rolamento pelo seu peso. A pista exerce a força normal -  $N_t$  - e a força

de atrito estático -  $A_t$ . Nota-se que tanto a força normal, quanto a força de atrito, produzem torques, em relação ao eixo central da roda traseira, em oposição ao torque de tração; entretanto a força de atrito na roda de tração é a única força externa à bicicleta que age no mesmo sentido da sua velocidade de translação  $v$ , portanto desempenhando o importante papel de *força motora* da bicicleta. A roda se desloca com velocidade  $v$  constante, girando com velocidade angular  $w$  constante em torno do seu eixo  $e$ , desta forma, decorre da equação de equilíbrio dos torques na roda traseira que

$$\tau_{Tração} = A_t \cdot R + N_t \cdot d. \quad (5)$$

Mas como pela expressão (4)  $d = \alpha \cdot R$ , substituindo-se na Eq. (5) obtém-se

$$\tau_{Tração} = A_t \cdot R + N_t \cdot \alpha \cdot R \quad (6)$$

$$\tau_{Tração} = (A_t + \alpha \cdot N_t) \cdot R. \quad (7)$$

Como a potência de tração -  $P_{Tração}$  - é o produto da intensidade do torque de tração  $\tau_{Tração}$  pela velocidade angular  $w$  e, substituindo-se o torque de tração dado na Eq. (7), obtém-se

$$P_{Tração} = \tau_{Tração} \cdot w = (A_t + \alpha \cdot N_t) \cdot R \cdot w. \quad (8)$$

Como  $R \cdot w$  resulta no valor da velocidade  $v$  de translação da roda, então

$$P_{Tração} = \tau_{Tração} \cdot w = (A_t + \alpha \cdot N_t) \cdot v \quad (9)$$

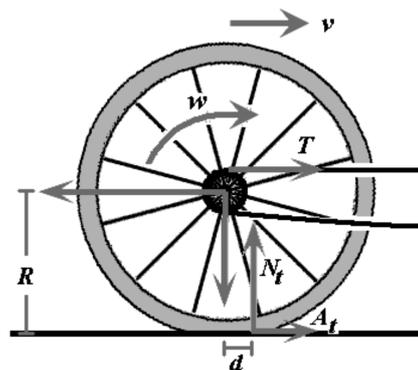


Figura 2 - Forças exercidas na roda de tração da bicicleta.

As expressões (8) ou (9), deduzidas para a roda de tração de uma bicicleta, são válidas para qualquer roda de tração de veículos automotores que se utilizem da força de atrito estático com a pista de rolamento

<sup>2</sup>Rodas de aço sobre trilhos de aço possuem *coeficiente de resistência ao rolamento* entre 0,0002 e 0,001 ([http://en.wikipedia.org/wiki/Rolling\\_resistance](http://en.wikipedia.org/wiki/Rolling_resistance); acessado em 27/7/2010), permitindo a mobilidade de grandes cargas pela aplicação de forças com intensidades iguais ou inferiores a uma parte em mil do peso de tais cargas! Pneus de automóvel com baixa resistência ao rolamento possuem *coeficiente de resistência ao rolamento* na faixa de 0,004 a 0,008 ([http://en.wikipedia.org/wiki/Low-rolling\\_resistance\\_tires](http://en.wikipedia.org/wiki/Low-rolling_resistance_tires); acessado em 8/8/2010) e pneus especiais para bicicletas de corrida, que operam com pressão manométrica de 8 atm, podem ter coeficientes entre 0,002 e 0,005.

para impulsioná-la com velocidade constante. As expressões (8) ou (9) explicitam que a potência de tração depende de duas componentes: uma relacionada à força de atrito nas rodas de tração e a outra relacionada à resistência ao rolamento. Desta forma evidencia-se que a resistência ao rolamento não pode ser confundida com o atrito entre a roda de tração e a pista de rolamento. O valor da força de atrito estático, para uma dada velocidade angular da roda, cresce conforme aumenta a potência de tração, sendo o seu valor máximo limitado pelo produto do *coeficiente de atrito estático* -  $\mu$  - pela intensidade da força normal. Ou seja

$$P_{\text{Tração}} \leq (\mu \cdot N_t + \alpha \cdot N_t) \cdot v = (\mu + \alpha) \cdot N_t \cdot v. \quad (10)$$

#### 4. Força de arrasto do ar

Quando um corpo se movimenta através do ar, esse lhe opõe uma força de resistência ou de *arrasto*. A *força de arrasto* depende do *atrito viscoso* do ar com as superfícies sobre as quais escoar e de *efeitos inerciais* devido à ‘colisão’ do ar com o corpo em movimento. A *força de atrito viscoso* é proporcional à velocidade do ar em relação ao corpo; entretanto ela é para corpos razoavelmente grandes (com dimensões superiores a alguns centímetros), movimentando-se com velocidades iguais ou superiores a metros por segundo, desprezível frente à *força de arrasto inercial* [3]. A *força de arrasto inercial* cresce com o quadrado da velocidade do ar em relação ao corpo.

A intensidade da *força de arrasto inercial* -  $F_a$  - depende da densidade do ar -  $\rho$  - (aproximadamente  $1,22 \text{ kg/m}^3$  ao nível do mar), da área frontal do corpo -  $S$  - (área do corpo na direção perpendicular ao movimento do ar em relação ao corpo), do *coeficiente de arrasto* -  $C$  - (parâmetro adimensional que depende da forma do corpo) e da velocidade do ar -  $v$  - em relação ao corpo de acordo com a seguinte expressão [2]

$$F_a = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C \cdot S \cdot v^2 \quad (11)$$

Os automóveis possuem *coeficiente de arrasto* -  $C$  - entre 0,25 e 0,45, e área frontal -  $S$  - entre  $1,5$  e  $3 \text{ m}^2$ . O automóvel atual com o menor *coeficiente de arrasto* é o *Aptera*, sendo  $C = 0,11$  ([http://en.wikipedia.org/wiki/Aptera\\_2\\_series](http://en.wikipedia.org/wiki/Aptera_2_series); acessado em 1/8/2010).

#### 5. Potência de tração em função da resistência ao rolamento e do arrasto do ar

A expressão (9) fornece a relação entre a potência de tração com as intensidades da força de atrito e da força normal à pista de rolamento nas rodas de tração, quando o veículo automotor trafega com velocidade

constante. As forças de atrito estático nas rodas de tração, em uma pista horizontal, são as únicas forças externas ao automóvel que possuem a mesma orientação da velocidade do veículo em relação à pista, portanto, impulsionando-o “para frente”. Resistindo ao avanço do automóvel encontramos as forças de atrito nas rodas livres (não-tracionadas) e a força de arrasto do ar. Se denominarmos de  $A_t$  a intensidade da resultante das forças de atrito nas rodas de tração,  $A$  a intensidade da resultante das forças de atrito nas rodas livres,  $F_a$  a força de arrasto do ar, e considerando que o veículo se desloque com velocidade  $v$  constante, então a seguinte condição decorre da primeira lei de Newton

$$A_t = A + F_a. \quad (12)$$

Como pela Eq. (3)  $A = \alpha \cdot N$  (onde  $N$  é a intensidade da resultante das forças normais nas rodas não tracionadas) e dado que a velocidade do automóvel em relação à pista é a mesma que em relação ao ar (admite-se que não haja vento e portanto o ar esteja parado em relação à pista), substituindo as Eqs. (3) e (11) na Eq. (12) obtém-se

$$A_t = \alpha \cdot N + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C \cdot S \cdot v^2. \quad (13)$$

A substituição da Eq. (13) na Eq. (9) fornece para a potência de tração

$$P_{\text{Tração}} = \left( \alpha \cdot N + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C \cdot S \cdot v^2 + \alpha \cdot N_t \right) \cdot v. \quad (14)$$

$$P_{\text{Tração}} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C \cdot S \cdot v^3 + \alpha \cdot (N_t + N) \cdot v. \quad (15)$$

Como a soma das intensidades das forças normais à pista em todas as rodas do automóvel é aproximadamente igual ao valor do peso do carro (aproximadamente pois a força que o ar faz sobre o automóvel pode ter uma componente na direção perpendicular à pista e não apenas na direção paralela à pista), encontra-se

$$P_{\text{Tração}} \cong \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C \cdot S \cdot v^3 + \alpha \cdot M \cdot g \cdot v, \quad (16)$$

onde  $M$  é a massa do automóvel e  $g$  é a intensidade do campo gravitacional.

A expressão (16) indica que a potência de tração de um automóvel que se desloque na horizontal com velocidade constante possui duas componentes: a primeira, associada ao *arrasto do ar*, crescendo com o cubo da velocidade e a segunda, associada à *resistência ao rolamento*, crescendo linearmente com a velocidade.

Vamos estudar agora a condição para a velocidade  $v$  na qual as duas componentes contribuem com o mesmo valor para a potência de tração, ou seja, denominaremos de  $v_i$  o valor da velocidade que satisfaz a igualdade entre as duas componentes na expressão (16). Portanto

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C \cdot S \cdot v_i^3 = \alpha \cdot M \cdot g \cdot v_i \quad (17)$$

Isolando-se  $v_i$  na expressão (17) se obtém para  $v_i$  diferente de zero

$$v_i = \sqrt{\frac{2 \cdot \alpha \cdot M \cdot g}{\rho \cdot C \cdot S}} \quad (18)$$

Considerando-se agora um “automóvel típico” com massa de 1200 kg, área frontal de 2 m<sup>2</sup> e *coeficiente de arrasto* de 0,35, encontra-se

$$v_i = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,01 \cdot 1200 \cdot 9,8}{1,22 \cdot 0,35 \cdot 2}} = 16,6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cong 60 \frac{\text{km}}{\text{h}} \quad (19)$$

O resultado (19) é importante, demonstrando que em velocidades compatíveis com o trânsito em vias de baixa velocidade (como as vias urbanas), a potência de tração é predominantemente destinada a vencer a *resistência ao rolamento*. Já nos regimes de velocidades maiores do que  $v_i$ , a potência de tração cada vez mais se destina a vencer o *arrasto* do ar, conforme aumenta a velocidade. Por exemplo, se  $v = 2 \cdot v_i$  a expressão (16) implica que 80% da potência de tração deve-se ao *arrasto* do ar. Na próxima seção discutiremos uma situação extrema, a dos testes de velocidade máxima para automóveis.

## 6. Potência de tração e velocidade máxima de automóveis

Um teste de desempenho de um automóvel costuma informar, entre outros resultados, a potência nominal máxima do motor do veículo (fornecida pelo fabricante), bem como a velocidade máxima atingida no teste. Para a grande maioria dos automóveis atuais é possível se obter informações sobre as suas dimensões e suas massas; para alguns automóveis há dados sobre o *coeficiente de arrasto* (estas informações estão espalhadas em diversos locais da web).

Uma pesquisa extensa nos possibilitou encontrar dados sobre velocidade máxima e potência nominal máxima para mais de uma centena de automóveis. Classificamos os automóveis em três grupos: Grupo 1 - Automóveis atuais (78 elementos); Grupo 2 - Automóveis das décadas de 1960 e 1970 (45 elementos); Grupo 3 - Caminhonetes esportivas atuais (32 elementos). O trabalho de pesquisa foi árduo principalmente para o Grupo 2 pois tais testes remontam a uma época anterior a web, não sendo fácil de localizá-los. Muitos automóveis e caminhonetes atuais, com motores com potência de centenas de cavalos-vapor, possuem velocidade limitada eletronicamente por motivos de segurança; estes veículos não foram incluídos na análise. O objetivo de se buscar tais dados diz respeito a um teste

empírico para a expressão (16) e uma comparação entre os três grupos de veículos.

Na verdade a potência nominal máxima do motor, informada pelo fabricante do automóvel, é um *indicador* da potência de tração. Usualmente a potência nominal máxima é medida no eixo de saída do motor e, portanto, é maior do que a potência máxima de tração (esta é desenvolvida nas rodas de tração conforme a terceira seção desse artigo). As perdas de potência nos mecanismos de transmissão do motor para as rodas situam-se entre 5% e 10% da potência medida no eixo do motor [1]. Adicionalmente pode acontecer que a velocidade máxima atingida por um automóvel ocorra em um regime de operação do motor (frequência de rotação do motor) que não coincida com o ponto de produção da máxima potência.

Vejam a expressão (16) sendo aplicada para um dos carros esportivos mais velozes do mundo – o *Bugatti Veyron*, que em um teste em 2006 atingiu a impressionante marca de 408 km/h (113,3 m/s). A potência máxima medida para o seu motor é cerca de 746,7 kW (aproximadamente 1010 cv); a massa é 1950 kg, a área frontal é 2,07 m<sup>2</sup> e o *coeficiente de arrasto* vale 0,36. Substituindo-se os dados na Eq. (16) se encontra

$$P_{\text{Tração}} = \frac{1}{2} \cdot 1,22 \cdot 0,36 \cdot 2,07 \cdot 113,3^3 + 0,01 \cdot 1950 \cdot 9,8 \cdot 113,3 \quad (20)$$

$$P_{\text{Tração}} = 661,1 \cdot 10^3 + 21,7 \cdot 10^3 = 682,8 \cdot 10^3 \text{ W} \cong 920 \text{ cv} \quad (21)$$

Nota-se que o resultado para a potência de tração é compatível com a potência máxima do motor (informada pelo fabricante), diferindo desta em menos de 10%. Destaca-se na expressão (21) que a parcela devida ao *arrasto do ar* é cerca de 30 vezes maior do que a devida à *resistência ao rolamento*.

No outro extremo de velocidade máxima, consideremos o antigo *VW-1200* (o “Fusca”) que atingia velocidade máxima de cerca de 115 km/h (32 m/s). A potência máxima de seu motor era cerca de 26,6 kW (aproximadamente 36 cv), a massa valia 870 kg, a área frontal era de aproximadamente 2 m<sup>2</sup> e o *coeficiente de arrasto* 0,48. Substituindo-se os dados na Eq. (16) se encontra

$$P_{\text{Tração}} = \frac{1}{2} \cdot 1,22 \cdot 0,48 \cdot 2 \cdot 32^3 + 0,01 \cdot 870 \cdot 9,8 \cdot 32 \quad (22)$$

$$P_{\text{Tração}} = 19,2 \cdot 10^3 + 2,7 \cdot 10^3 = 21,9 \cdot 10^3 \text{ W} \cong 30 \text{ cv} \quad (23)$$

Mais uma vez a expressão (16) fornece uma potência de tração compatível com a potência máxima do motor

e se nota que a parcela da potência devida ao *arrasto do ar* é sete vezes maior do que a devida à *resistência ao rolamento*.

Desta forma, desprezando-se na Eq. (16) o termo linear na velocidade, tomando-se a potência de tração como a potência nominal máxima -  $P$  - e sendo  $V$  a velocidade máxima, decorre a seguinte “lei de potência”

$$P = K \cdot V^n \quad \text{onde } n = 3. \quad (24)$$

O objetivo de coletarmos os dados para os três grupos de veículos anteriormente referidos, num total de 155 pares ordenados de valores para a velocidade máxima e a potência máxima, é testar empiricamente a expressão (22), obtendo por regressão o valor para o expoente  $n$ . A corroboração do modelo proposto acontecerá caso o valor de  $n$  resulte em aproximadamente 3.

Iniciamos ajustando em cada um dos três grupos separadamente uma “lei de potência” utilizando o pacote estatístico SPSS. No Grupo 1 (automóveis atuais) o expoente da “lei de potência” resultou em 2,8; no Grupo 2 (automóveis dos anos 60 e 70) o expoente da “lei de potência” resultou em 2,9 e no Grupo 3 (caminhonetas esportivas atuais) o expoente da “lei de potência” resultou em 3,1. Portanto os expoentes se situam, de acordo com a expectativa teórica, próximos a 3.

Decidimos então proceder a um ajuste, impondo que o expoente em cada um dos três grupos fosse o mesmo, mas possibilitando que o parâmetro multiplicativo  $K$  na expressão (24) assumisse valores diferentes para os três grupos. Desta forma, ao impor que o expoente é o mesmo, os três valores para os parâmetros multiplicativos são comensuráveis entre si, isto é, podem ser comparados entre si.

A Fig. 3 apresenta um gráfico de dispersão para a potência máxima em função da velocidade máxima nos três grupos de veículos, bem como as equações de ajustamento obtidas. Para representar como retas as curvas de ajuste, as escalas dos dois eixos não são lineares nas duas variáveis (velocidade máxima e potência).

Como se observa na Fig. 3, o expoente da “lei de potência” resultou em 2,86, portanto muito próximo da expectativa teórica ( $n = 3$ ). A qualidade do ajuste, medido pelo *coeficiente de determinação* resultou em 0,95. Desta forma a expressão (24) tem o poder de explicar de maneira muito boa a potência máxima em função da velocidade máxima nos três grupos de automóveis. A comparação das constantes multiplicativas evidencia uma evolução dos automóveis atuais em relação aos dos anos 60 e 70, pois hoje a mesma velocidade pode ser atingida com uma potência inferior, perfazendo aproximadamente 70% ( $3,59/5,16 = 0,70$ ) da potência dos veículos antigos. Já as caminhonetas esportivas atuais necessitam desenvolver uma potência que perfaz aproximadamente 170% ( $6,02/3,59 = 1,68$ ) da potência dos automóveis atuais para trafegarem na

mesma velocidade. A aerodinâmica dessas caminhonetas, tanto por ter *coeficiente de arrasto* quanto *área frontal* maior do que dos automóveis atuais, determina a necessidade de investir uma potência de tração superior à dos automóveis para trafegar na mesma velocidade. Estes veículos, do ponto de vista do consumo energético, expressam uma contradição com as apregoadas necessidades de economia de combustíveis pois maior potência demanda um consumo maior de combustível no mesmo percurso.

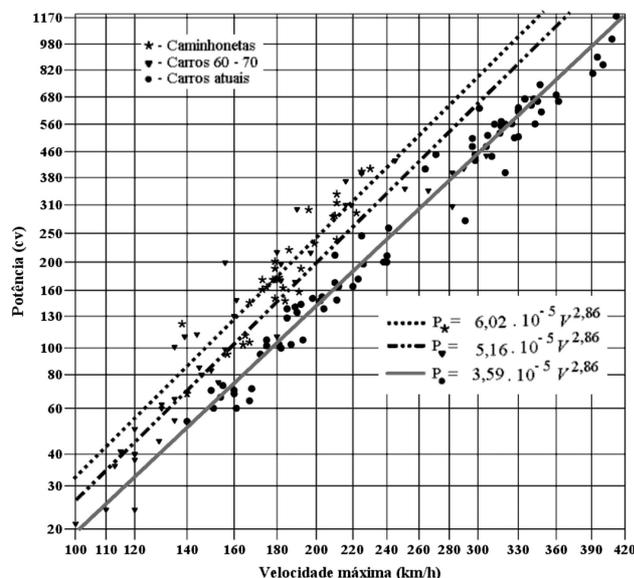


Figura 3 - Diagrama de dispersão da potência contra a velocidade máxima nos três grupos de automóveis e equações de ajustamento.

## 7. Potência de tração em rampas

Se um veículo automotor se movimenta em um aclave, a expressão (12) deve ser modificada para contemplar o fato de que a componente do peso do veículo paralela à pista resiste ao seu avanço. Sendo  $\theta$  o ângulo de inclinação da pista com a horizontal, a expressão (12) deve ser modificada para

$$A_t = A + F_a + M \cdot g \cdot \text{sen}\theta, \quad (25)$$

$$A_t = \alpha \cdot N + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C \cdot S \cdot v^2 + M \cdot g \cdot \text{sen}\theta. \quad (26)$$

Substituindo-se a Eq. (26) na Eq. (9) obtém-se finalmente para a potência de tração

$$P_{\text{Tração}} \cong \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C \cdot S \cdot v^3 + \alpha \cdot M \cdot g \cdot \cos\theta \cdot v + M \cdot g \cdot \text{sen}\theta \cdot v, \quad (27)$$

onde o terceiro termo a direita da expressão (27) relaciona-se à potência necessária para vencer a resistência do campo gravitacional (este terceiro termo é nulo em pistas horizontais).

Conforme Silveira [4], a inclinação máxima recomendada pelo DNIT para rodovias de *Classe 0* (estradas brasileiras do tipo BR, onde acontecem os mais altos fluxos de veículos) é de cerca de  $3^\circ$ . Consideremos um automóvel de porte médio com quatro passageiros (massa total de aproximadamente 1600 kg), com *coeficiente de arrasto* de 0,35, área frontal de  $2 \text{ m}^2$ , movimentando-se com velocidade constante de 90 km/h (25 m/s) em um aclive com  $3^\circ$  de inclinação. Então a potência de tração calculada pela expressão (27) resulta em

$$P_{\text{Tração}} \cong \frac{1}{2} \cdot 1,22 \cdot 0,35 \cdot 2 \cdot 25^3 + 0,01 \cdot 1600 \cdot 9,8 \cdot \cos(3^\circ) \cdot 25 + 1600 \cdot 9,8 \cdot \sin(3^\circ) \cdot 25,$$

$$P_{\text{Tração}} \cong 6,67 \cdot 10^3 + 3,91 \cdot 10^3 + 20,52 \cdot 10^3 = 31,10 \cdot 10^3 \text{ W}, \quad (28)$$

$$P_{\text{Tração}} \cong 42 \text{ cv}. \quad (29)$$

É importante notar que mais de 60% da potência de tração necessária para se movimentar nesse aclive é dispendida para vencer a resistência devida ao campo gravitacional. Entretanto para um automóvel médio, com potência nominal máxima superior a 100 cv, tal não se constitui em um problema e ele poderá trafegar nesses aclives a 90 km/h ou mais.

Imaginemos agora um caminhão com massa de 40.000 kg (caminhões desse porte ou até maiores trafegam comumente em rodovias de *Classe 0*), área frontal de  $6 \text{ m}^2$ , *coeficiente de arrasto* de 0,7, trafegando a 90 km/h (25 m/s) no mesmo aclive. A potência de tração resulta em

$$P_{\text{Tração}} \cong \frac{1}{2} \cdot 1,22 \cdot 0,7 \cdot 6 \cdot 25^3 + 0,01 \cdot 40000 \cdot 9,8 \cdot \cos(3^\circ) \cdot 25 + 40000 \cdot 9,8 \cdot \sin(3^\circ) \cdot 25,$$

$$P_{\text{Tração}} \cong 40,03 \cdot 10^3 + 97,87 \cdot 10^3 + 512,89 \cdot 10^3 = 650,79 \cdot 10^3 \text{ W}, \quad (30)$$

$$P_{\text{Tração}} \cong 879 \text{ cv}. \quad (31)$$

O valor calculado na Eq. (31) excede em muito a potência nominal máxima dos motores de caminhão, impedindo-os de trafegar em aclives com esta inclinação na velocidade pressuposta; a velocidade compatível com a potência dos motores desses caminhões situa-se, em tais aclives, em aproximadamente 40 km/h. Adicionalmente quando um caminhão desce pela mesma rampa, a potência desenvolvida pelo campo gravitacional deixa

de ser resistente para ser motora e os sistemas de freio do veículo (freio por atrito e freio motor) terá que ser capaz de absorver e dissipar tal potência sob pena de a velocidade crescer excessivamente. Assim se entende porque em rodovias de *Classe 0* não deve haver rampas com inclinações superiores a  $3^\circ$ ; adicionalmente em rampas com estas inclinações, faz-se necessária uma terceira pista para que os caminhões possam trafegar em velocidades menores do que a dos automóveis, sem entretanto congestionar o trânsito. Na expressão (30) os termos de potência relativos à superação da resistência do ar e da resistência ao rolamento quando somados resultam em cerca de 190 cv, e dado que a potência nominal máxima do caminhão é de duas ou mais centenas de cavalos-vapor, conclui-se que facilmente este veículo pode manter a velocidade de 90 km/h ou mais em pistas horizontais.

## 8. Conclusão

Neste artigo tratamos das resistências ao movimento de um veículo automotor, demonstrando teoricamente e comprovando empiricamente que a potência de tração para manter o automóvel com velocidade constante em uma pista horizontal com velocidade igual ou superior a 100 km/h destina-se quase que exclusivamente a vencer o arrasto do ar. Nesta situação a potência de tração está relacionada à velocidade por uma “lei de potência” com expoente aproximadamente igual a 3 conforme obtido por regressão para três grupos de automóveis, perfazendo 155 pares ordenados de velocidade e potência máxima em usuais testes de desempenho de veículos automotores.

O desenvolvimento do tema envolve uma matemática elementar mas uma física rica conceitualmente, propiciando a abordagem de interessantes temas, geralmente omissos em textos de física geral, como a resistência ao rolamento e como o arrasto inercial produzido pelo ar sobre um corpo em movimento através do fluido. O interesse que os conhecidos testes de desempenho de automóveis despertam nos alunos pode ser aproveitado para iniciar e aprofundar os conceitos e a teoria sobre a dinâmica de veículos automotores.

## Referências

- [1] M.D. Artmonov, V.A. Ilarionov and N.M. Morin, *Motor Vehicles* (MIR, Moscou, 1976).
- [2] R. Bosch, *Manual de Tecnologia Automotiva* (Edgard Blucher, São Paulo, 2005).
- [3] C.E. Aguiar e G.A. Rubini, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **26**, 297 (2004).
- [4] F.L. Silveira, *Física na Escola* **8**(2), 16 (2007).