Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 33, n. 3, 3306 (2011)
www.sbfisica.org.br

Teoria algébrica de processos da medida em sistemas quânticos

(Algebraic theory of measurement processes in quantum systems)

C.A.M. de Melo[1,2], B.M. Pimentel[1] e J.A. Ramirez[1]

[1]*Instituto de Física Teórica, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", São Paulo, SP, Brasil*
[2]*Instituto de Ciência e Tecnologia, Universidade Federal de Alfenas, Poços de Caldas, MG, Brasil*
Recebido em 10/7/2010; Aceito em 16/6/2011; Publicado em 6/10/2010

Neste artigo trataremos, de uma maneira pedagógica, a forma em que pode ser construída uma estrutura algébrica para os processos de medida em mecânica quântica partindo do conceito de *símbolo de medida*, concebido por Julian S. Schwinger, e que constitui peça fundamental para seu formalismo variacional e suas diferentes aplicações.
Palavras-chave: mecânica quântica, teoria quântica da medida.

Here we deal in a pedagogical way with an approach to construct an algebraic structure for the quantum mechanical measurement processes from the concept of *measurement symbol.* Such concept was conceived by Julian S. Schwinger and constitutes a fundamental piece in his variational formalism and its several applications.
Keywords: quantum mechanics, quantum measurement theory.

1. Introdução

A formulação desenvolvida por Julian Seymour Schwinger para a derivação das amplitudes de probabilidade[2] em mecânica quântica (M.Q.) provém de um extenso estudo que deu seu começo com a análise alternativa dos processos de medida associados à cinemática da mecânica quântica, até a formulação do princípio variacional que caracteriza a dinâmica desses processos. Schwinger foi fortemente influenciado pelos trabalhos de I.I. Rabi entre 1931 e 1939 [1], que tratavam de experimentos sobre a interação de feixes de núcleos atômicos, ou moléculas, com campos magnéticos [2].

No ano de 1955, na conferência de *Les Houches* [3], Schwinger expôs sua idéia sobre a construção de uma álgebra partindo dos resultados nos processos de medida realizados sobre um sistema quântico para a obtenção de informação. Neste ponto, Schwinger começou pela revisão da teoria cinemática desses processos em M.Q. [4, 5], onde a motivação dada por Rabi intervém. Dado que as partículas com spin respondem ante campos magnéticos externos, elas podem ser separadas por aquela característica em um experimento tipo Stern-Gerlach (S.G.).

Nos seus experimentos mentais, Schwinger tinha vários arranjos experimentais do tipo S.G., cada um deles, possuindo a propriedade de fazer a escolha de uma característica genérica do sistema. Assim, este era dividido em sistemas menores, cada um destes com uma característica em princípio bem definida. Desta forma, precisando somente dos resultados das medidas para a caracterização dos sistemas quânticos, espera-se que a M.Q. possa ser derivada diretamente de fatos experimentais.

Uma das primeiras exposições pedagógicas sobre a formulação de Schwinger apareceu em [6]. Apresentaremos aqui uma versão mais curta, ainda que completa, da descrição cinemática da M.Q. na abordagem de Schwinger.

Na primeira seção deste artigo, falaremos sobre a medida em sistemas clássicos e veremos como ela adquire importância quando as grandezas no sistema se fazem suficientemente pequenas. Depois, iremos definir o conceito de *símbolo de medida* e construiremos o arcabouço que origina os experimentos mentais, permitindo compreender a estrutura matemática que rege os processos quânticos no ato de medida; assim, partindo da abstração de tais processos e de como se dá sua incidência sobre o sistema, se mostrará a importância da história na construção do mesmo. Desta forma, a análise das medidas consecutivas realizadas sobre um sistema ajudará a compreender como ele poderia ser

[1]E-mail: cassius@unifal-mg.edu.br.

[2]Schwinger denominava as amplitudes de probabilidade (ou funções de onda) de *funções de transformação*. Os motivos disto serão esclarecidos mais adiante.

preparado e, igualmente, como este poderia ser caracterizado, levando, ao final, a uma importante relação entre os processos de medida e os fatos de escolha, que são refletidos na interpretação estatística das funções de transformação. Posteriormente, veremos como as caracterizações de um sistema, por meio de dois observáveis não necessariamente compatíveis, podem se tornar equivalentes com o uso de funções de transformação e com um tipo especial de transformação chamada de *unitária* que, fundamentalmente, preserva a informação que se possui do sistema, como a probabilidade ou a norma de um vetor que represente um estado em um espaço de Hilbert. Assim, este tipo de transformação permite o estudo da cinemática quântica nos processos envolvidos.

Por último, construiremos as estruturas convencionais nos processos cinemáticos associados à mecânica quântica, e relacionaremos estes com estruturas num espaço vetorial.

2. A medida em um sistema físico

Do ponto de vista clássico, uma medida tem como idealização que o efeito do aparelho de medição sobre o sistema físico de interesse é desprezível ou que não o afeta de uma maneira apreciável e, se isto ocorrer, tal efeito pode ser compensado em uma forma estatística ou em uma forma mecânica [4,5,7]. Mas a interação entre o sistema e o aparelho de medida toma importância no momento que considerarmos sistemas microscópicos; nestes casos, não há interação que possa ser considerada pequena, o sistema pode ser alterado facilmente, e o efeito da medida não pode ser compensado por nenhum meio, dado que a sensibilidade do sistema ante qualquer novo procedimento pode afetá-lo e fazer com que os resultados obtidos não representem mais os estado anterior à medida, ou sejam imprevisíveis.

Segundo esta ordem de idéias, podemos observar que a sensibilidade (a resposta) de um sistema diante de determinados estímulos como a ação de medida, é baseada no fato de que, para obter informação do sistema, temos que fazer uma troca de energia com ele. Assim, independentemente da sua escala, precisamos introduzir energia no sistema e depois observar as formas em que ele reage; como, por exemplo, emitindo algum tipo de radiação.

Desta forma, a ação de obtenção de informação, a ação de medida, pode ser simbolizada por meio da quantidade R [8], que simboliza sua resposta ante estímulos externos, e que é dada pela razão entre a quantidade de energia ΔE_m necessária para induzir uma mudança no sistema e E_s a energia total que possui o sistema, de modo que

$$R = \frac{\Delta E_m}{E_s}. \tag{1}$$

Dada a forma da construção de R, classicamente o menor valor que pode tomar para E_s fixo é $\min(\Delta E_m) = 0$ e qualquer flutuação deste valor evidencia uma variação da energia no sistema. Disto podemos dizer que o estado do sistema pode mudar depois de uma medição, já que sua energia vai mudar de uma maneira apreciável. Entretanto, se levarmos esta idéia para sistemas microscópicos, mantendo em conta a quantização da energia, esta proporção (1) deve estar relacionada com a constante de Planck h e, portanto, se obtemos algum tipo de informação do sistema, não pode existir um valor de $\Delta E_m < \alpha h$,[3] de tal forma que, no nível microscópico, não pode haver nenhuma medida que não afete o sistema. Como temos visto, o raciocínio trata sobre a produção de uma mudança na energia do sistema originada por uma medição e, portanto, o objetivo da medida em sistemas quânticos será caracterizar o que ocorre no sistema quando estes procedimentos são efetuados. Assim, quantificar de certa forma a incidência de uma medida sobre um sistema microscópico, ao estudar os possíveis resultados e as relações que eles têm, será o objetivo das próximas seções.

3. Simbologia da medida

Quando medimos alguma característica específica de um sistema, por exemplo a quantidade A, podemos em princípio obter uma grande quantidade de resultados, como $\{a_1, a_2, a_3, a_4, ...\}$, classificados pela sua grandeza. Chamaremos genericamente de *observável* à quantidade A com que vai se caracterizar o sistema e ao conjunto de números $\mathbf{E}[A] = \{a_j\}$, com j como índice do conjunto,[4] o espectro de A. Um sistema pode ser descrito por um número infinito de observáveis, A, B, C, D, E,..., que terão espectros $\mathbf{E}[A]$, $\mathbf{E}[B]$, $\mathbf{E}[C]$, $\mathbf{E}[D]$,..., mas cada uma destas descrições representará de maneira única o sistema.

Para poder exemplificar um pouco mais as idéias anteriores, suponhamos um feixe de partículas que pode se considerar como um grande conjunto de sistemas, em que cada um deles pode ter um valor bem definido a_j de A, e onde cada sistema pode se separar do conjunto por um processo de filtragem tipo Stern-Gerlach. Cada sub-sistema resultante com valor a_j, se diz estar no estado a_j. O processo de medida pode ser ilustrado na Fig. 1, sobre este tipo de processos construiremos a álgebra de medida.

[3] α é uma constante que modifica a expressão para unidades de energia.

[4] Nota-se que o conjunto dos índices j ou k com $j,k \subseteq N$, é $j = \{0, 1, 2, ..., n\}$; se o espectro for contínuo esta notação deve ser entendida como fazendo referência a um intervalo nos números reais.

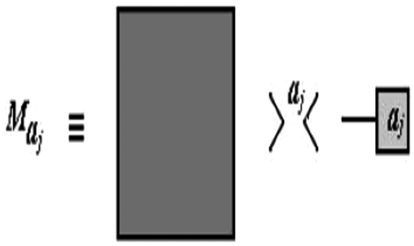

Figura 1 - O feixe ingressante de partículas, sistema, representado pelo quadro cinza-escuro é filtrado extraindo um feixe emergente de partículas no qual os constituentes têm o valor a_j de A.

As relações entre tais símbolos fixam uma série de operações que serão analisadas a seguir.

4. Relações entre medidas sucessivas

As relações entre os símbolos de medida expressam a essência dos processos de seleção. Assim, a cada medida realizada sobre o sistema é assinalado um símbolo M_{a_j} que representa uma seleção dos estados com o valor a_j e rejeita aqueles que se encontram em um estado diferente. Como foi visto na seção anterior, os símbolos são rotulados pela quantidade que está sendo medida. Assim, o número de símbolos de medida que temos corresponde ao valor máximo de estados do conjunto $\{j\}$, $\max[j]$. As relações seguintes são deduzidas das características dadas para os símbolos de medida e, portanto, expressam somente a forma em que estes operam em conjunto. Dependendo, assim, da forma como são realizadas as medidas, temos que:

1. A soma de dois símbolos de medida, representada pela Fig. 2.

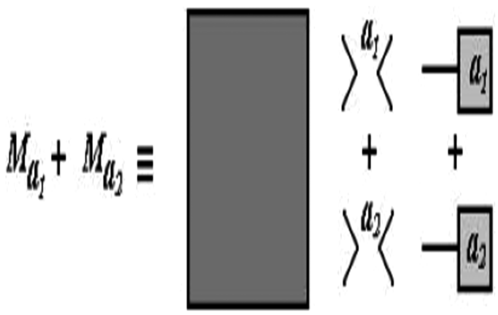

Figura 2 - Esta ação corresponde à medição que aceita estados que têm o valor a_1 ou a_2 sem fazer distinção alguma.

Este processo é realizado simultaneamente, sendo que esta medida é menos seletiva admitindo sistemas no estado a_1 ou no estado a_2 e produz subensembles associados aos subconjuntos de $\mathbf{E}[A]$ para este caso em especial. Assim, de uma maneira mais geral, também é válida para mais símbolos de medida onde temos, além disso, associatividade e assim obtemos o processo representado pela Fig. 3.

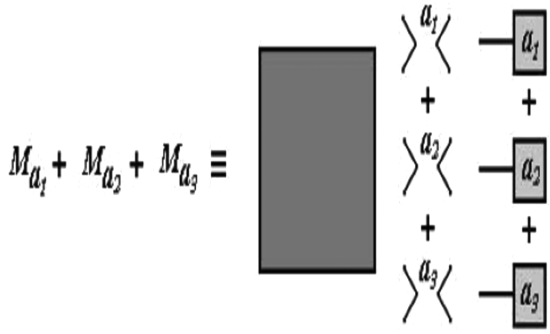

Figura 3 - Neste esquema, se mostra como atua a medida de três caracteristicas simultâneamente.

$$(M_{a_1} + M_{a_2}) + M_{a_3} = M_{a_1} + (M_{a_2} + M_{a_3})\,. \quad (2)$$

Com estas propriedades, podemos inferir duas implicações fundamentais: a primeira é assinalar um símbolo para o processo de medição que deixa passar todos os estados sem distinção, o símbolo para este processo será **1**, que designaremos como Medida Completa, e que pode ser representado pela Fig. 4.

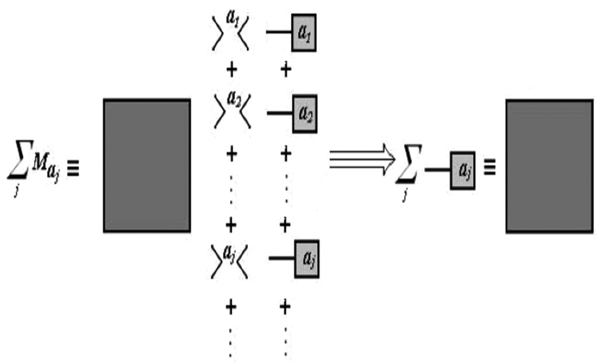

Figura 4 - A representação da unidade como a soma de todos os simbolos associados a um observavel, mostra que fazer com que o sistema pase por todos os filtros o deixa passar inteiro.

Assim, temos que

$$\sum_{k=0}^{N} M_{a_k} = \mathbf{1}, \quad (3)$$

e a segunda é dada por completude, podendo ser definido o símbolo **0** que significa que há um processo que rejeita qualquer estado.

2. O produto de dois símbolos de medida $M_{a_1}M_{a_2}$, e cuja leitura é realizada da direita para esquerda, como representado na Fig. 5.

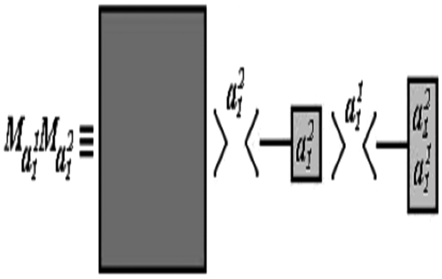

Figura 5 - Este processo simboliza a filtragem de todos os sistemas que têm o valor de a_1 dos sistemas emergentes do processo M_{a_2}, se $a_2 \neq a_1$ a segunda filtragem vai rejeitar os sistemas provenientes do primeiro processo, assim o resultado será nulo e poderá ser caracterizado pelo símbolo 0. Entretanto, se $a_2 = a_1$ o resultado do processo não é mais nulo.

Portanto, podemos por meio da seguinte quantidade

$$\delta(a_2, a_1) = \begin{cases} 1 & a_2 = a_1 \\ 0 & a_2 \neq a_1, \end{cases} \tag{4}$$

representar os resultados anteriores como

$$M_{a_1} M_{a_2} = \delta(a_2, a_1) M_{a_2}, \tag{5}$$

podemos ver que temos

$$M_{a_2} M_{a_2} = M_{a_2}, \tag{6}$$

o que mostra que estes símbolos são idempotentes.

As relações anteriores permitem identificar os M_a com elementos de uma álgebra. Na Tabela 1 estão resumidas as propriedades dos elementos de medida.

Tabela 1 - Elementos da álgebra de medida.

Operação	Existência
$\mathbf{1} \cdot M_a = M_a \cdot \mathbf{1} = M_a$	Existe elemento identidade para o produto
$\mathbf{0} \cdot M_a = M_a \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$	Existe elemento nulo para o produto
$M_a + \mathbf{0} = M_a$	Existe elemento identidade para a soma

4.1. Medição de observáveis compatíveis

Dois observáveis A^1 e A^2 são ditos compatíveis se, filtrado do sistema um estado associado ao valor a_1^1 de A^1 uma filtragem posterior de algum valor a_1^2 pertencente ao observável A^2 não altera a informação adquirida no primeiro estágio da medição. Desta forma, o sistema possuirá, com certeza, os valores a_1^1 e a_1^2 de uma maneira bem definida e simultânea.[5] Um símbolo para uma operação como esta pode ser construído da seguinte forma

$$M_{a_1^2 a_1^1} = M_{a_1^2} M_{a_1^1} = M_{a_1^1} M_{a_1^2}. \tag{7}$$

Esse processo está representado na Fig. 6. O fato de que as medições efetuadas sejam operações compatíveis permite que comutem, logo, temos

$$M_{a^1 a^2 \ldots a^{\max[j]}} = \prod_{k=1}^{\max[j]} M_{a^k}. \tag{8}$$

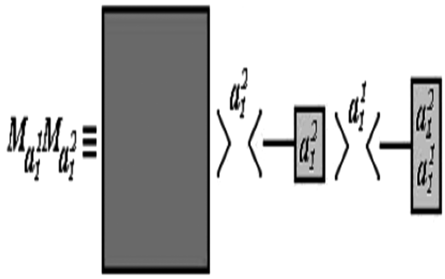

Figura 6 - O feixe ingressante ao segundo estágio do processo tem o valor a_1^1 para o observável A^1, a filtragem posterior filtra o valor a_1^2 para A^2, e o sistema final tem os valores a_1^1 e a_1^2.

O maior conjunto de observáveis $\mathbf{A} = \{A^1, A^2, A^3, A^4 \ldots\}$ com que se pode caracterizar um sistema é chamado de maximal. Com este conjunto podemos ter o máximo conhecimento do sistema. Assim, a medida de qualquer propriedade que não pertença ao conjunto, ou que não possa ser expressa como uma combinação dos elementos deste, vai alterar o estado do sistema mudando o conhecimento ganho antes da última medição. Estes novos símbolos têm as mesmas propriedades dos símbolos M_{a_k}.[6]

A partir da próxima seção usaremos uma notação de a para nos referir a um elemento genérico $a_j \in \mathbf{E}[A]$ associado ao observável A, dado que agora trataremos com operações genéricas entre os elementos de diferentes conjuntos.

4.2. Medição de observáveis não-compatíveis

Nesta seção estudaremos os sistemas que mudam seu estado ao fazermos medidas deles, já que estes tipos de eventos descrevem de uma forma mais verossímil os resultados de medidas reais. Desta forma, temos que estudar as medições de observáveis não-compatíveis.

[5] Em a_k^j, o indice k está relacionado com o lugar do elemento no conjunto $E[A^j] = \{a_k^j\} = \{a_1^j, a_2^j, \ldots\}$, com $k = \{1, \ldots, N\}$; e o índice j, está relacionado com o observável, quando ele pertence a uma família de características compatíveis $\mathbf{A} = \{A^j\} = \{A^1, A^2, \ldots\}$, com $j = \{1, \ldots, n\}$.

[6] O delta de Kronecker para uma medida consecutiva de dois conjuntos de observáveis compatíveis é simbolizado por

$$\delta(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 \ldots a_{\max[j]}, a_1' a_2' a_3' a_4' a_5' a_6' \ldots a_{\max[j]}') = \prod_{k=1}^{\max[j]} \delta\left(a_k, a_k'\right)$$

Dada a possibilidade de descrever um sistema por vários observáveis, temos que se o sistema estiver descrito por um observável $A \Rightarrow \{\mathbf{E}[A], M_a\}$, este também poderia estar bem descrito por $B \Rightarrow \{\mathbf{E}[B], M_b\}$.[7] Assim, para começarmos esse estudo, devemos analisar a possibilidade de construir um símbolo que represente as medidas consecutivas de quantidades que pertençam a conjuntos de observáveis que não são compatíveis entre si. Um processo como este envolve a medida consecutiva de, pelo menos, dois observáveis, como a medida representada por $M_a M_b$. Se analisarmos este processo, vemos que pode ser representado pelo seguinte esquema

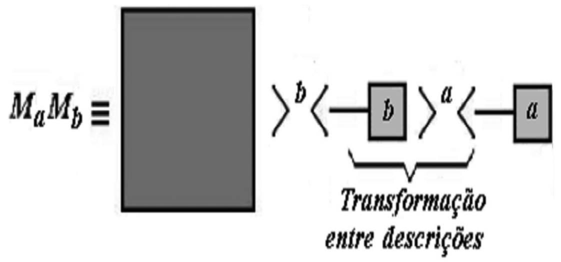

Figura 7 - Esta sequência de medidas, em especial, escolhe subsistemas que têm alguma propriedade b de B e, em seguida são medidos no sistema (feixe) emergente aqueles subsistemas que tenham o valor a de A.

Dadas as características dos símbolos de medida até agora estudados, e o fato que existe uma mudança na descrição do sistema, este processo não pode ser representado por meio dos símbolos de medida até agora conhecidos. Portanto, nosso conjunto de relações tem que ser aumentado com um novo tipo de símbolo.

Se analisarmos a representação do processo dada na Fig. 7, observamos que a mudança de representação envolve a existência de uma escolha de um estado com a propriedade a de A entre aqueles emergentes do estágio de medida que fez a escolha de b de B. Tal símbolo pode ser

$$M_a M_b = \langle a|b\rangle \, M_a^b, \tag{9}$$

onde o símbolo M_a^b vai representar o processo pelo qual um feixe incidente em um estado de entrada b é mudado para um estado de saída a, e o símbolo $\langle a|b\rangle$ representa a *transformação* entre as duas representações A e B.[8] Assim, para uma série de medidas consecutivas

$$M_a^b M_c^d, \tag{10}$$

tomamos um feixe no estado d de D e o transformamos em um feixe no estado c de C. Em seguida é realizada outra medida em que só são aceitos sistemas com o valor b de B entre aqueles estados que são originados na saída do primeiro processo, e os mesmos são transformados em estados com o valor bem definido a de A.

Para uma medida tal como a anterior, temos um resultado líquido de receber um sistema num estado d de D e transformá-lo num estado a de A. Como cada símbolo de medida representa um estágio da medição, como resultado final, temos uma mudança na representação do sistema dada pelos observáveis B e C, e expressa pela quantidade $\langle b|c\rangle$. Assim, podemos representar o produto destes símbolos da seguinte forma

$$M_a^b M_c^d = \langle b|c\rangle \, M_a^d. \tag{11}$$

Se fizermos o processo na ordem contrária, temos que

$$M_c^d M_a^b = \langle d|a\rangle \, M_c^b, \tag{12}$$

o que nos mostra que os símbolos de medida para observáveis não-compatíveis não são comutativos, *i.e.*

$$M_a^b M_c^d \neq M_c^d M_a^b. \tag{13}$$

A mudança de representação, dada pelo símbolo $\langle a|b\rangle$, que é situada quando fazemos uma medida como na Eq. (9), implica que alguns destes estados podem não passar pelo processo de filtragem, já que nada garante que todos estejam neste estado. Isso difere do caso onde temos uma medida que aceita ou rejeita todos os estado ingressantes, como pode ser estabelecido se temos estados do mesmo observável

$$M_{a_1} M_{a_2} = \delta(a_2, a_1) M_{a_2}^{a_1}. \tag{14}$$

Desta forma o complemento introduzido à simbologia de medida, $\langle a|b\rangle$, expressa a possibilidade de uma medição não nula da propriedade a sobre o sistema emergente do processo de filtragem do primeiro estágio de medição que mostrou o valor b. Este é o elemento que contém a relação estatística, dado que se tem, de fato, uma espécie de escolha entre os sistemas no estado b.

5. Funções de transformação

Os elementos $\langle a|b\rangle$, associados à transformação entre caracterizações, ou mudanças de representação, de um mesmo sistema quântico, são de grande importância no entendimento dos efeitos das ações de medida em sistemas microscópicos.[9] Esses elementos, que chamaremos de agora em diante *funções de transformação*, relacionam as medidas realizadas sobre um sistema com a ajuda de dois observáveis, geralmente não compatíveis. Dado que cada símbolo de medida, seja $M_a = M_a^a$ ou M_a^b, representa um estágio ou unidade no processo de medição, temos que pelas relações entre os símbolos de medida, como na Eq. (9), os processos $M_a M_b^c$ e $M_a^b M_c$, podem ser postos como um símbolo só, ou seja

[7] Usamos a notação $A \Rightarrow \{\mathbf{E}[A], M_a\}$, para dizer que o observável A tem associado um espectro $\mathbf{E}[A]$ e um conjunto de símbolos de medida M_a.

[8] O processo em que não há nenhuma mudança pode ser simbolizado por M_a^a; este símbolo é equivalente ao processo M_a.

[9] Dado que esses elementos tem uma relação com a estatística de seleção de estados, vamos tomá-los como pertencentes a um corpo de números que comutam com os símbolos de medida.

$$M_a M_b^c = \langle a|b\rangle M_a^c \quad \text{e,} \quad M_a^b M_c = \langle b|c\rangle M_a^c, \tag{15}$$

onde temos em conta os estados inicial e final, combinado com a função de transformação entre os dois processos.

Agora, se usarmos os conceitos de medida completa e as relações dadas nas Eqs. (15) e (9), temos que, se realizarmos uma medida completa na metade do processo que representa as medidas consecutivas $M_a M_b$, podemos observar que

$$M_a M_b = \langle a|b\rangle M_a^b = M_a \left(\sum_c M_c\right) M_b =$$
$$\sum_c \langle a|c\rangle \langle c|b\rangle M_a^b. \tag{16}$$

Se compararmos ambos resultados, podemos extrair que

$$\langle a|b\rangle = \sum_c \langle a|c\rangle \langle c|b\rangle . \tag{17}$$

Agora, se adotarmos a notação

$$\sum_c |c\rangle \langle c| = \mathbf{1}, \tag{18}$$

podemos inferir uma importante relação

$$M_c = |c\rangle \langle c| . \tag{19}$$

As considerações anteriores a respeito das transformações entre medidas também nos permitem identificar a forma dos símbolos M_b^a da seguinte maneira: se fizermos uma medida completa na saída do processo representado pelo símbolo M_a, podemos ver que o resultado pode ser expresso como combinação linear dos símbolos associados com M_b da seguinte forma

$$\mathbf{1}M_a = \sum_c M_c M_a = \sum_b \langle b|a\rangle M_b^a, \tag{20}$$

ou, de forma equivalente, por meio da Eq. (19)

$$\mathbf{1}M_a = \left(\sum_b |b\rangle \langle b|\right) |a\rangle \langle a| . \tag{21}$$

Assim, por comparação, podemos fazer a seguinte relação

$$M_b^a = |b\rangle \langle a| . \tag{22}$$

Como consequência, temos que, se identificarmos $b = a'$ na Eq. (16), obtemos

$$M_a M_{a'} = \langle a|a'\rangle M_a^{a'}, \tag{23}$$

a qual será nula, se não tivermos $a' = a$, o que nos mostra que

$$\langle a|a'\rangle = \delta(a, a'), \tag{24}$$

que é o delta de Kronecker, obtido anteriormente na Eq. (4).

Como foi comentado na seção anterior, o fato que entre duas medições de dois observáveis não compativeis possa passar parcial ou totalmente o feixe incidente, mostra que funções de transformação podem ser interpretadas como um fator que diz o quão compativeis são os observáveis. Além disto, também pode-se inferir que na Eq. (12) $\langle d|a\rangle$ está relacionada com a possibilidade de que nos sistemas com valor a de A possam ser medidos estados com valor d de D, o que está relacionado com a interpretação estatística que será dada mais adiante.

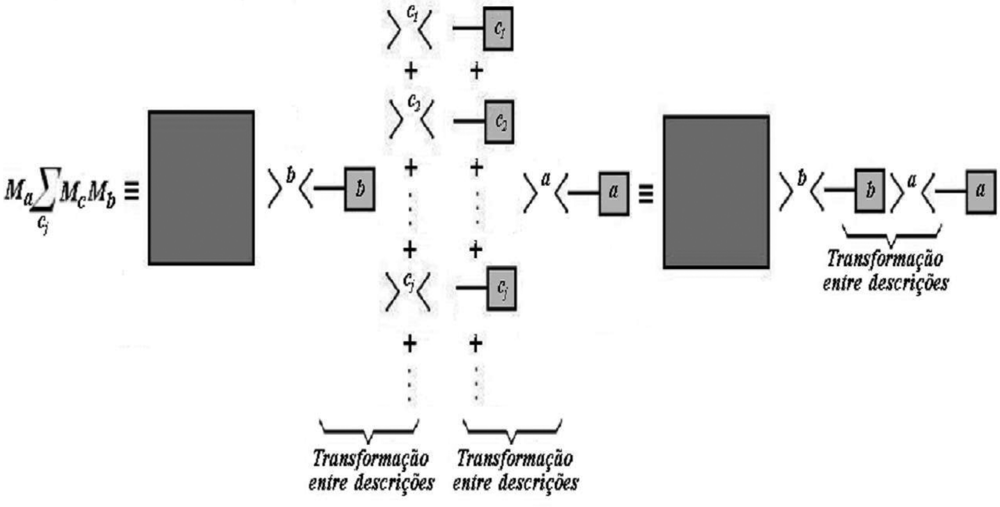

Figura 8 - Neste esquema, podemos entender como se dá a mudança de representação de um sistema.

6. O traço

A função de transformação $\langle a|b\rangle$ pode ser considerada como um funcional linear do símbolo de medida M_b^a, já que ela está diretamente relacionada com as transformações das medidas realizadas de quantidades não compatíveis. Tal correspondência é chamada *traço* e tem a seguinte forma

$$\mathbf{Tr}\left\{M_b^a\right\} = \mathbf{Tr}\left\{|b\rangle\langle a|\right\} = \langle a|b\rangle\,, \tag{25}$$

esta forma específica vem do fato de que o corpo numérico trabalhado aqui como escalares são os números complexos.[10] Assim, se o elemento de medida pertence à filtragem de um par de observaveis compativeis, tem-se

$$\mathbf{Tr}\left\{M_{\overline{a}}^a\right\} = \langle a|\overline{a}\rangle = \delta\left(\overline{a}, a\right), \tag{26}$$

e

$$\mathbf{Tr}\left\{M_b^b = M_b\right\} = 1. \tag{27}$$

Também podemos ver que o traço de um produto de símbolos de medida é dado por

$$\begin{aligned}&\mathbf{Tr}\left\{M_d^c M_b^a\right\} = \mathbf{Tr}\left\{|d\rangle\langle c|b\rangle\langle a|\right\} = \\ &= \mathbf{Tr}\left\{\langle c|b\rangle M_d^a\right\}\langle c|b\rangle\langle a|d\rangle\,,\end{aligned} \tag{28}$$

e o traço do produto invertido é dado por

$$\mathbf{Tr}\left\{M_b^a M_d^c\right\} = \mathbf{Tr}\left\{\langle a|d\rangle M_b^c\right\} = \langle a|d\rangle\langle c|b\rangle\,, \tag{29}$$

desta forma, comparando a Eq. (28) com a Eq. (29), vemos que o traço de um produto de símbolos de medida é comutativo, embora o produto dos símbolos não o seja.

7. Interpretação estatística

Dadas as observações nas seções anteriores, temos claro que existe uma importante componente estatística no sentido de como podemos interpretar o resultado das medições sobre um sistema, e como essas deveriam ser interpretadas. Um dos resultados mais relevantes, é que se temos duas descrições do mesmo sistema por meio dos estados $\{a_i\} \in \mathbf{E}[A]$ e $\{b_j\} \in \mathbf{E}[B]$ associados com dois observáveis diferentes A e B, estas duas descrições podem ser relacionadas pelo conjunto de funções de transformação $\{\langle a_i|b_j\rangle\}_{i,j}$. Se definimos dois conjuntos de elementos $\{\lambda(a)\}$ e $\{\lambda(b)\}$ podemos ver que, se redefinimos os símbolos de medida como

$$M_b^a \to \lambda(a) M_b^a \lambda^{-1}(b) \tag{30}$$

e as funções de transformação como

$$\langle a|b\rangle \to \lambda^{-1}(a)\langle a|b\rangle\lambda(b), \tag{31}$$

as operações entre os elementos da álgebra de medida não são alteradas. Dado isto, temos que as funções de transformação $\langle a|b\rangle$ não podem ter um significado físico direto, pelo fato de que não são univocamente definidas, dada a arbitrariedade dos fatores λ.

A interpretação estatística se dá pelo argumento usado para o entendimento do significado do símbolo $M_b^a M_d^c$. Como pode-se ver, no estágio intermediário deste processo, no feixe com a propriedade d do observável D resultante do processo inicial M_d^c, se faz uma nova medida, mas agora da propriedade a do observável A, associada ao símbolo M_b^a. Assim, este fato pode ser tomado como um processo estatístico, dado que temos um conjunto de sistemas num estado d de D, há um ato de *escolha*, ao medir entre eles o estado a de A. Isto equivale a interpretar o símbolo $\langle d|a\rangle$, como alguma quantidade relacionada com a probabilidade de encontrar um sistema no estado d quando temos um ensemble no estado a.

Para exemplificar um pouco mais a interpretação anterior, podemos considerar o seguinte procedimento de medida,

$$\begin{aligned} M_b M_a M_b &= \langle b|a\rangle M_b\langle a|b\rangle \\ &= \langle b|a\rangle\langle a|b\rangle M_b, \end{aligned} \tag{32}$$

neste processo, aparentemente, não acontece nada, no sentido que são recebidos sistemas com a propriedade b de B e os estados de saída têm, em princípio, a mesma propriedade. Mas a passagem pela filtragem intermediária, a medição efetuada pelo símbolo M_a, origina a necessidade de que, para obter algum resultado não nulo no estágio final da medida, as transformações entre os estados de $b \to a$ e, de novo, $a \to b$, têm que ser possíveis, o que pode ser representado pelo símbolo

$$p\left(a|b\right) = \langle b|a\rangle\langle a|b\rangle\,, \tag{33}$$

que, nesta primeira abordagem, refere-se à transformação sucessiva entre os dois sistemas. Este novo símbolo é invariante frente à transformação (31), dado que

$$\begin{aligned}&p\left(a|b\right) = \langle b|a\rangle\langle a|b\rangle = \\ &\lambda^{-1}(b)\langle b|a\rangle\lambda(a)\lambda^{-1}(a)\langle a|b\rangle\lambda(b) = \\ &\langle b|a\rangle\langle a|b\rangle\,,\end{aligned} \tag{34}$$

o que faz deste um objeto que, além de estar univocamente definido, pode ser relacionado diretamente com uma interpretação[11] estatística como a *probabilidade de encontrar o sistema no estado a quando é executada uma medição sobre um sistema que se encontra no estado b*.

Se fizermos uma filtragem não-seletiva sobre todos os estados membros do conjunto associado com o observável A

$$\begin{aligned}&M_b\hat{1}M_b = \textstyle\sum_a M_b M_a M_b = \\ &\textstyle\sum_a \langle b|a\rangle\langle a|b\rangle M_b = \sum_a p\left(a|b\right) M_b,\end{aligned} \tag{35}$$

[10] Pode ser usado um outro corpo de números, como são os quaternions que podem ser vistos nas Refs. [9], e [10].

[11] Interpretação que é, basicamente, derivada da seleção do elemento dentre um conjunto de resultados possíveis.

podemos encontrar que a quantidade $p\,(a|b)$, é normalizada à unidade

$$\sum_a p\,(a|b) = 1. \tag{36}$$

Uma outra característica deste símbolo é a sua simetria, ou seja, a probabilidade de que o sistema passe de $a \to b$, é a mesma que $b \to a$, assim

$$p\,(a|b) = p\,(b|a)\,. \tag{37}$$

Além das propriedades encontradas para a probabilidade, temos outra apreciação. Dado que os processos estudados anteriormente envolvem a transição entre dois estados, a determinação de cada um destes estados envolve também dois processos de medida. Desta maneira, existe a probabilidade de que somente uma fração, todos ou nenhum dos estados envolvidos no primeiro estágio do processo de medida sejam aceitos no segundo estágio. Isto significa que existem dois valores extremos para a fração de estados que passa; que é 1 se passar a totalidade ou, 0 se não passar nenhum. Ou seja, a probabilidade $p\,(a|b)$ está entre os dois limites

$$0 \leq p\,(a|b) \leq 1.$$

Supondo que o número $\langle b|a\rangle$ é um número complexo e, dado que a probabilidade é um número real maior que zero, podemos tomar $\langle b|a\rangle = \overline{\langle a|b\rangle}$, o que garante que

$$p\,(a|b) = \overline{\langle a|b\rangle}\,\langle a|b\rangle = |\langle a|b\rangle|^2 \geq 0. \tag{38}$$

Um fato interessante desta escolha é a de que os conjuntos $\{\lambda(a)\}$ e $\{\lambda(b)\}$ devem ser tais que a probabilidade seja independente deles, assim temos que se

$$\langle a|b\rangle = \lambda^{-1}(a)\,\langle a|b\rangle\,\lambda(b), \tag{39}$$

$$\overline{\langle a|b\rangle} = \overline{\lambda^{-1}}(a)\overline{\langle a|b\rangle}\overline{\lambda}(b), \tag{40}$$

$$\langle b|a\rangle = \lambda^{-1}(b)\,\langle b|a\rangle\,\lambda(a), \tag{41}$$

multiplicando as Eqs. (39) e (40) e exigindo a invariância do resultado obtemos

$$\begin{aligned} \lambda(b)\overline{\lambda}(b) &= 1, \\ \lambda^{-1}(a)\overline{\lambda^{-1}}(a) &= 1, \end{aligned}$$

o que significa que

$$\overline{\lambda}(a) = \lambda^{-1}(a). \tag{42}$$

Desta forma, podemos ver que pode-se associar uma representação exponencial a estes números como uma fase da forma

$$\lambda(a) = e^{i\varphi(a)}, \tag{43}$$

dependendo somente do elemento do espectro. O valor assumido pelas fases $\varphi(a)$ é arbitrário e não afeta o resultado das medições de uma forma direta, já que as probabilidades independem desta fase.

7.1. O símbolo de medida adjunto

O fato que

$$p\,(a|b) = p\,(b|a)\,, \tag{44}$$

envolve a existência de uma equivalência entre os processos representados pelos símbolos de medida M_aM_b e, seu processo inverso,[12] o símbolo M_bM_a. Podemos ver que, tomando a Eq. (9)

$$M_aM_b = \langle a|b\rangle\,M_a^b \quad \text{e,} \quad M_bM_a = \langle b|a\rangle\,M_b^a, \tag{45}$$

e estabelecendo a conexão entre os os processos anteriormente representados com a seguinte convenção

$$(M_aM_b)^\dagger = M_bM_a, \tag{46}$$

onde o símbolo † significa[13] a operação adjunta. Temos que

$$\begin{aligned} (M_aM_b)^\dagger = \overline{\langle a|b\rangle}\,\left(M_a^b\right)^\dagger = \\ \overline{\langle a|b\rangle}M_b^a = M_bM_a = \langle b|a\rangle\,M_b^a, \end{aligned} \tag{47}$$

nos mostra que[14]

$$\overline{\langle a|b\rangle} = \langle b|a\rangle\,. \tag{48}$$

Temos como um caso especial

$$(M_aM_{a'})^\dagger = M_{a'}M_a, \tag{49}$$

onde pela igualdade $\delta(a', a) = \delta(a, a')$ temos a particularidade que

$$M_a^\dagger = M_a, \tag{50}$$

o que define este símbolo como auto-adjunto, ou seja igual a seu adjunto.

Para a soma, e demais operações entre os símbolos de medida pode-se resumir em

$$\begin{aligned} (X+Y)^\dagger &= X^\dagger + Y^\dagger, & (51)\\ (X\cdot Y)^\dagger &= Y^\dagger\cdot X^\dagger, & (52)\\ (\lambda\cdot Y)^\dagger &= \overline{\lambda}\cdot Y^\dagger. & (53) \end{aligned}$$

[12] Esta equivalência vem do fato que os eventos de seleção são "estatísticamente independentes". Para entender um pouco mais este conceito pocure pelo teorema de Bayes e probabilidade condicional, *Thomas Bayes- matemático (Londres, Inglaterra, 1702 - Tunbridge Wells, 1761).*

[13] Lê-se o símbolo † como *dagger*, termo anglosaxônico que significa *adaga*.

[14] As funções de transformação, $\langle a|b\rangle$, são números complexos, e a linha — sobre estes números é interpretada aqui como complexo conjugado.

7.2. Álgebra conjugada

O uso dos números complexos como escalares na álgebra de medida implica na existência de uma álgebra conjugada, uma transformação, na qual todos os números são trocados pelos seus complexos conjugados. Assim

$$\overline{(X+Y)} = \overline{X}+\overline{Y}, \quad (54)$$
$$\overline{(X\cdot Y)} = \overline{X}\cdot\overline{Y}, \quad (55)$$
$$\overline{(\lambda\cdot Y)} = \overline{\lambda}\cdot\overline{Y}. \quad (56)$$

A formação do adjunto dentro da álgebra conjugada dos símbolos de medida tem a forma geral de

$$X^T = \overline{X}^\dagger = \overline{X^\dagger},$$

e recebe o nome de *transposição,* possuindo as propriedades

$$(X+Y)^T = X^T + Y^T$$
$$(XY)^T = Y^T X^T$$
$$(\lambda Y)^T = \lambda Y^T.$$

Essa operação deve ser diferenciada da operação de achar o adjunto, pois esta tem o significado físico da inversão do processo representado pelo operador.

8. Representação matricial de um operador

Como foi tratado nas primeiras seções, os símbolos de medida

$$M_a = |a\rangle\langle a| \quad \text{e,} \quad M_b^a = |b\rangle\langle a|, \quad (57)$$

extraem informação de um sistema, originando um outro sistema, com características específicas; estes símbolos, junto com os observáveis A e B, são considerados na linguagem matemática como *operadores*, que são entidades que agem sobre determinados objetos extraindo informação deles. Estes operadores, assim como nossos observáveis e símbolos de medida, podem ser representados equivalentemente. Como vimos na relação (16), um símbolo de medida de uma classe pode ser posto em função dos símbolos de medida associados com um outro observável. Assim, podemos ver que, se tivermos o símbolo de medida M_a, podemos expressá-lo em função dos símbolos de medida associados com B, fazendo uma medida completa da seguinte forma

$$M_a = \sum_b M_b M_a = \sum_b \langle b|a\rangle M_b^a. \quad (58)$$

Consequentemente, se tomarmos de uma forma geral um observável X, por exemplo, podemos expressá-lo pela sua influência sobre sistemas caracterizados por observáveis conhecidos. Assim, se medirmos X sobre um sistema que está totalmente caracterizado por $A \Rightarrow \{M_a, E[A]\}$, e depois colocarmos na saída da operação representada por X uma medida completa, digamos, de $B \Rightarrow \{M_b, E[B]\}$, teríamos X em uma representação mista dada por elementos de A e B, da seguinte forma

$$\begin{aligned} X &= \sum_b\sum_a M_b X M_a \quad (59)\\ &= \sum_b\sum_a |b\rangle\langle b|X|a\rangle\langle a| \\ &= \sum_{a,b} \langle b|X|a\rangle M_b^a, \end{aligned}$$

o que nos mostra a possibilidade de expressar qualquer operador por meio da sua influência sobre um sistema conhecido.

Uma das características interessantes deste tipo de representação, é que quando os conjuntos $\mathbf{E}[A]$ e $\mathbf{E}[B]$, são discretos, dada a estrutura dos produtos entre operadores, os elementos $\langle a|X|b\rangle$, na Eq. (59) podem ser considerados como os elementos de uma representação matricial do operador X, numa base mista de um espaço vetorial.[15]

A forma (59) permite expressar o produto de dois operadores como

$$XY = \sum_a\sum_d \langle a|XY|d\rangle M_a^d,$$

de onde é derivado

$$\langle a|XY|d\rangle = \sum_b \langle a|X|b\rangle\langle b|Y|d\rangle.$$

Os elementos da representação matricial de X podem ser expressos de uma forma equivalente pelo funcional[16] traço

$$\mathbf{Tr}\{M_a^b X\} = \langle a|X|b\rangle,$$

onde podemos observar que, lembrando a propriedade (25) e a linearidade do funcional, temos o seguinte

$$\begin{aligned} \mathbf{Tr}\{M_a^b X\} &= \mathbf{Tr}\left\{\sum_c\sum_d \langle c|X|a\rangle\langle b|\, d\rangle M_c^d\right\} \\ &= \sum_c \langle b|\, c\rangle\langle c|X|a\rangle = \langle a|X|b\rangle, \end{aligned}$$

em que um caso particular é dado por

$$\mathbf{Tr}\{M_a X\} = \langle a|X|a\rangle.$$

De fato, o nome traço vem da relação

$$\begin{aligned} \mathbf{Tr}\{X\} &= \mathbf{Tr}\{\mathbf{1}\cdot X\} \\ &= \mathbf{Tr}\left\{\sum_c M_c\cdot X\right\} = \sum_c \langle c|X|c\rangle. \end{aligned}$$

[15] Este raciocínio é uma das primeiras indicações a respeito de uma possível associação com espaços vetoriais da álgebra de medida.

[16] A palavra funcional se aplica aqui ao objeto que associa operadores a escalares.

As matrizes que representam os operadores adjuntos são matrizes conjugadas complexas e transpostas das matrizes que representam os operadores originalmente. Assim, o operador adjunto associado a X é dado por

$$\langle a|\, X^{\dagger}\, |b\rangle = \overline{\langle b|\, X\, |a\rangle}.$$

Como casos especiais das representações anteriores, temos que se $X = 1$, em $\mathbf{Tr}\{M_a^b X\}$, obtemos

$$\mathbf{Tr}\{(X = 1)\, M_a^b\} = \langle a|\, (X = 1)\, |b\rangle = \langle a|b\rangle\,.$$

9. Valor esperado

Trataremos do valor esperado de uma propriedade A o que é obtido multiplicando um valor particular a pela probabilidade de obtê-lo, uma vez que o estado se encontra inicialmente no estado b de B. Assim, a probabilidade de obter um valor específico $a \in \mathbf{E}[A]$, quando o sistema está no estado b aportará um valor específico à soma ponderada dos elementos de $\mathbf{E}[A]$. A expressão matemática para o valor esperado $\langle A\rangle_b = \langle b|\, A\, |b\rangle$ é dada por

$$\langle A\rangle_b = \sum_a p\,(a|b)\, a = \sum_a \langle b|a\rangle\, a\, \langle a|b\rangle\,. \qquad (60)$$

Usando a Eq. (29), temos que a expressão anterior pode ser posta como

$$\langle A\rangle_b = \sum_a \langle b|a\rangle\, a\, \langle a|b\rangle = \mathbf{Tr}\left\{ M_b \sum_a a M_a \right\}.$$

Podemos então definir a representação espectral do operador A como $A = \sum_a a^{\cdot} |a\rangle\, \langle a|$, de tal forma que o valor esperado $\langle A\rangle_b$ também pode ser escrito como

$$\langle A\rangle_b = \mathbf{Tr}\{A M_b\}\,.$$

10. A geometria dos estados

A caracterização de um sistema microscópico por um conjunto $A \;\Rightarrow\; \{M_a, \mathbf{E}[A]\}$, nos mostra que cada símbolo de medida $M_a = |a\rangle\, \langle a|$ nos dá informação sobre a existência de um determinado estado em um sistema. Como podemos ver, o fato de que estes símbolos representam a extração de um sub-sistema com uma característica única, e que o conjunto completo destes sub-sistemas nos permite expressar outros estados asociados com outros observáveis, nos leva a pensar os *símbolos de medida* como *projetores* sobre elementos de um espaço vetorial complexo, fato que torna possível a associação com uma estrutura geométrica.

10.1. Decomposição de uma medida

Como foi dito anteriormente, a sensibilidade de um sistema quântico à medida torna impossível seguir um estado durante o processo de medida. Desta forma, por exemplo, no processo de medida representado por

$$M_b M_a = \langle b|a\rangle\, M_b^a = \langle b|a\rangle\, |b\rangle\, \langle a|\,, \qquad (61)$$

o conhecimento dos estados intermediários entre a e b não é um conhecimento útil no sentido estrito dos resultados físicos, já que somente importam os estados *iniciais* ($\rightarrow a$) e *finais* ($b \rightarrow$). Isto, faz com que o processo representado por $M_b^a = |b\rangle\, \langle a|$, a mudança do estado com valor a de A para um estado com valor b de B, possa ser considerado como um bloco indivisível.

Apesar disto, à parte $|b\rangle\, \langle a|$ do processo (61), podemos dar uma interpretação um pouco mais abstrata, em que são aceitos todos os sistemas que têm a propriedade a de A, o sistema ingressante com esse estado quântico é "destruído" e depois é "criado" um sistema no estado b de B. Visto dessa forma, o processo de medida pode ser dividido em duas partes: a destruição de um estado e a criação de outro.

Assim, o símbolo M_b^a pode ser visto como equivalente ao produto de dois símbolos, $\langle a|$ que representa a destruição da informação do sistema que tem a propriedade a de A e, $|b\rangle$ que representa a criação de um sistema com a propriedade b de B.

Dada esta nova maneira de interpretar os símbolos de medida, e lembrando a relação obtida na Eq. (24), podemos ver que a relação entre elementos de criação e aniquilação de informação no sistema tende a se parecer com uma relação de ortogonalidade entre vetores de um espaço vetorial

$$\overrightarrow{a}_i \cdot \overrightarrow{a}_j = \delta_{i,j}\,.$$

Assim, sem perda de generalidade, podemos considerar os elementos $|a\rangle$ e $\langle b|$ como vetores de um espaço vetorial complexo e o seu dual, respectivamente.

Do raciocínio anterior, podemos ver que todas as propriedades dos símbolos de medida não mudam sob essa nova interpretação geométrica.

10.2. Álgebra vetorial

Os elementos $|a\rangle$ e $\langle b|$, agora considerados como vetores de um espaço vetorial complexo, podem também ser considerados como uma representação do estado que criam ou destroem. Assim como os símbolos de medida, estes elementos podem ser representados em função dos resultados da medida de um outro observável, por meio de uma medida completa, mas agora devemos considerar os elementos $|\quad\rangle\langle\quad|$ como os projetores sobre um espaço vetorial associado com o observável que representam. Desta forma, tomando a Eq. (18), podemos ver que o estado quântico $|a\rangle$, do mesmo modo que seu dual, pode ser representado na base $\{|b_j\rangle\}$, por

$$|a\rangle = \sum_j |b_j\rangle\, \langle b_j|a\rangle\,. \qquad (62)$$

Aqui se faz uso das funções de transformação, já que a projeção do estado $|a\rangle$ sobre cada estado associado com o observável B implica uma mudança de representação e, portanto, é equivalente a ver um vetor de um espaço vetorial numa outra base, onde os elementos do vetor são os números complexos dados por $\langle b|a\rangle$.

Isso nos leva a perceber que o elemento $\langle a|b\rangle$, pode ser visto como um produto interno entre os elementos do espaço vetorial sobre os números complexos. Dado que o produto interno está relacionado diretamente com a geometria do espaço [11] , mais precisamente com a norma, o elemento $\langle a|b\rangle$ induzirá características geométricas que podem ajudar a aplicar esta nova álgebra.

Desta maneira, as relações de linearidade impostas pela superposição nas formas em que são decompostos os estados estabelecem, junto com as operações já mencionadas, (soma, multiplicação por um escalar e mais adiante a norma), o que é chamado uma "álgebra de estados".

10.2.1. Ação dos operadores sobre os estados

A ação de medida sobre um sistema, representada pela ação de um operador sobre um objeto abstrato, que simboliza um estado, pode ser agora realizada de uma forma que nos permite a comparação com procedimentos convencionais da álgebra linear. Como podemos ver, se tivermos um sistema representado por um estado $|b\rangle$ e efetivarmos uma medida de um obervável A sobre esse sistema, teremos que traduzir a informação que temos em $|b\rangle$ na linguagem do operador A. Assim, o primeiro passo será representar o vetor $|b\rangle$ como uma combinação linear dos elementos de A, segundo a Eq. (62) temos

$$|b\rangle = \sum_j |a_j\rangle \langle a_j|b\rangle . \tag{63}$$

Como um segundo passo, podemos fazer a medida do observável A sobre este estado. Para este propósito, usamos a forma espectral desse operador, $A = \sum_i a_i \dot{} |a_i\rangle \langle a_i|$

$$\begin{aligned} A\,|b\rangle &= \sum_{i,j} a_i\,|a_i\rangle \langle a_i|a_j\rangle \langle a_j|b\rangle \\ &= \sum_j a_j\,|a_j\rangle \langle a_j|b\rangle , \end{aligned}$$

onde foi usada a relação (24). O resultado anterior, nos permite observar um fato interessante: se o estado $|b\rangle = |a_i\rangle$ for um estado associado com o operador A, teríamos que

$$A\,|a_j\rangle = \sum_{i,j} a_i\,|a_i\rangle \langle a_i|a_j\rangle = a_j\,|a_j\rangle , \tag{64}$$

que é equivalente, na linguagem da álgebra linear, a uma *equação de valores-próprios.* Os elementos $|a_i\rangle$ são elementos de um espaço vetorial que representam estados, e por isso são chamados de *vetores de estado*, e o conjunto de vetores $\{|a_i\rangle\}_j$ são chamados de conjunto de vetores associados ao observável A, ou, simplesmente, conjunto de *vetores-próprios* de A. O conjunto $E[A]$, será o conjunto de *valores-próprios* de A, ou espectro de A.

A representação espectral de um operador, nos permite conhecer como sería a representação espectral de uma função deste. Assim, se tivermos, por exemplo, A^2, usando a Eq. (64) encontramos

$$A^2 = A\sum_a |a\rangle\, a\,\langle a| = \sum_a (A\,|a\rangle)\, a\,\langle a| = \sum_a |a\rangle\, a^2\,\langle a| .$$

Portanto, temos que se a função $f(A)$ puder ser expressa numa série de potências, podemos obter

$$f(A) = \sum_a |a\rangle\, f(a)\,\langle a| .$$

Com a representação espectral de um operador, podemos construir um polinômio, cujas raízes serão o conjunto de valores próprios, da seguinte forma: dado um elemento $a_1 \in \mathbf{E}[A]$, podemos mostrar que

$$A - a_1 1 = \sum_a |a\rangle\,(a - a_1)\,\langle a| ,$$

de tal forma que se tomarmos todos os pontos do conjunto $\mathbf{E}[A]$, temos

$$\prod_k (A - a_k) = \sum_a |a\rangle \prod_k (a - a_k)\,\langle a| .$$

A expressão anterior define um polinômio em a

$$\prod_k (a - a_k) ,$$

que tem suas raízes em cada ponto do conjunto $\mathbf{E}[A]$. Esta equação é chamada "polinômio característico".

10.3. Funções de onda

O espaço vetorial construído para descrever um sistema quântico qualquer, fornece uma base para representar todo estado em que possa estar o sistema. As propriedades do vetor, que representa o sistema, serão expressas no conjunto de funções de transformação associadas com a projeção desse vetor em cada um dos elementos da base do espaço vetorial. Esse conjunto de números é conhecido como *função de onda.* Os vetores de estado, possuem N números (componentes, dependendo da dimensionalidade do sistema), associados com os N elementos da base.

Suponhamos que temos dois sistemas representados pelos vetores de estado $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$, como temos visto nas seções anteriores, podemos escreve-los na base $\{|b\rangle\}$, como

$$|\psi\rangle = \sum_b |b\rangle \langle b|\psi\rangle = \sum_b |b\rangle\, \psi(b) ,$$

e

$$\langle\phi| = \sum_b \langle\phi|b\rangle \langle b| = \sum_b \phi^\dagger(b)\,\langle b| ,$$

onde

$$\phi^{\dagger}(b) = \langle\phi|b\rangle\,.$$

Se ψ e ϕ estão em relação adjunta, $\phi = \psi^{\dagger}$, a correspondente função de onda está conectada pela ação de encontrar o adjunto como

$$\phi(b) = \psi^{\dagger}(b)\,.$$

O produto de dois vetores de estado será dado por

$$\begin{aligned}\langle\psi_2|\phi_1\rangle &= \sum_b \langle\psi_2|b\rangle\langle b|\phi_1\rangle \\ &= \sum_b \psi_2^{\dagger}(b)\,\phi_1(b)\,,\end{aligned}$$

e, em particular,

$$\langle\psi|\psi\rangle = \sum_b \psi^{\dagger}(b)\,\psi(b) \geq 0.$$

A geometria dos estados é uma geometria unitária, já que a norma da função de onda é invariante, ou seja

$$\sum_b \psi^{\dagger}(b)\,\psi(b) = \sum_a \psi^{\dagger}(a)\,\psi(a)\,,$$

onde se tem que

$$\psi(a) = \sum_a U_{ab}\psi(b)\,,$$

e U_{ab} é o operador unitário que a realiza a transformação entre uma base e a outra.

Para especificar a forma explícita de U_{ab}, comecemos lembrando que o operador $|\psi_1\rangle\langle\phi_2|$ é representado pela matriz

$$\langle b|\psi_1\rangle\langle\phi_2|b\rangle = \psi_1(b)\,\phi_2(b)\,,$$

e funções de onda que representam $X|\psi\rangle$ e $\langle\phi|X$ são

$$\langle a|X|\psi\rangle = \sum_b \langle a|X|b\rangle\,\psi(b)\,,$$

e

$$\langle\phi|X|b\rangle = \sum_a \langle a|X|b\rangle\,\phi(a)\,.$$

Substituindo nas expressões anteriores o operador $X = 1$, obtemos a relação entre as funções de onda de um vetor em duas diferentes representações,

$$\begin{aligned}\psi(a) &= \sum_b \langle a|b\rangle\,\psi(b)\,,\\ \phi(a) &= \sum_b \phi(b)\,\langle a|b\rangle\,,\end{aligned}$$

o que nos permite concluir que

$$U_{ab} = \langle a|b\rangle\,.$$

Nota-se que a função de onda que representa $|b\rangle$ na descrição da base $\{a\}$ é

$$\psi_b(a) = \langle a|b\rangle = \phi_a^{\dagger}(b)\,.$$

Do ponto de vista da álgebra de medida, as funções de onda $\phi^{\dagger}$ e ψ são matrizes com uma só linha ou coluna cada uma. Dado que qualquer operador Hermiteano simboliza uma quantidade física, temos que qualquer observável pode ser representado por um operador Hermiteano, e que qualquer vetor unitário simboliza um estado. Então o valor esperado da propriedade X no estado $|\psi\rangle$ é dado por

$$\langle X\rangle_{\psi} = \langle\psi|X|\psi\rangle = \sum_{a,b}\psi^{\dagger}(a)\,\langle a|X|b\rangle\,\psi(b)\,.$$

Em particular, a probabilidade de se observar o valor a em uma medida relacionada com A feita sobre o sistema no estado $|\psi\rangle$, é simbolizada por

$$p(a|\psi) = \langle\psi|a\rangle\langle a|\psi\rangle = \psi^{\dagger}(a)\,\psi(a) = |\psi(a)|^2\,,$$

que é a nossa definição de probabilidade.

11. Conclusões

A visão de Schwinger dos processos de medida em M.Q. permite a introdução da símbologia da medida que, em uma forma resumida, é compatível com as formas conhecidas mais simples de interação aparelho-sistema. Esta simbologia permite estabelecer relações básicas entre tais processos e a construção de estruturas consistentes entre eles. Como pudemos ver ao longo deste artigo, a simplicidade desta abordagem baseia-se no fato de que é necessário apenas o conhecimento de conceitos procedentes da álgebra linear. Desta forma, a construção de um espaço vetorial que está relacionado com a estrutura matemática e caracterização de um sistema quântico, nos resulta intuitiva. A importância das transformações unitárias para as mudanças entre as diferentes caracterizações de um sistema quântico também se destaca de maneira natural dentro desta abordagem.

Na construção de um espaço vetorial para um sistema ao nível quântico, primeiramente devemos ter em conta que não conhecemos nada do sistema até realizarmos alguns processos de medição. Estes processos nos ajudam a encontrar estados que são associados aos observáveis nos quais temos interesse. Tais observáveis podem tomar uma determinada quantidade de valores que são associados ao conjunto que chamamos de espectro, e cada sistema que tem algum desses valores bem definido, é dito estar nesse estado (exemplo: o sistema que tem o valor bem definido $\underline{a}$ da quantidade A, se diz estar no estado $|\underline{a}\rangle$), que é representado por um elemento de um espaço vetorial complexo como $|a\rangle$. Este espaço vetorial possui dimensão N, com N o número de estados possíveis do observável com que caracterizamos o sistema.

Portanto, na caracterização de um sistema por meio das medições de um observável, associamos um espaço vetorial complexo (chamado de *espaço de Hilbert*), normado, com uma estrutura de medida bem definida. O conjunto de estados que constituem o espaço vetorial é uma base para se escrever qualquer estado possível do sistema. Desta forma, se caracterizarmos o sistema por dois conjuntos de observáveis, não necessariamente compatíveis, podemos expressar os estados resultantes de uma caracterização como uma superposição de estados da outra e, desta maneira, poderá existir uma transformação necessariamente unitária entre os espaços vetoriais associados a cada caracterização, de modo a preservar a norma e outras características geométricas do espaço. Consequentemente, as funções de transformação terão grande importância na construção destas transformações unitárias, podendo, assim, ser construída toda a caracterização cinemática da teoria.

Em um próximo trabalho demostraremos que podemos estabelecer a relação das funções de transformação com a dinâmica de um sistema quântico, e como pode-se estabelecer um princípio geral que é conhecido como princípio variacional de Schwinger.

Agradecimentos

J.A. Ramirez agradece ao CNPq pelo suporte integral. B.M. Pimentel agradece ao CNPq e à FAPESP pelo suporte parcial. C.A.M. de Melo agradece à FAPEMIG pelo suporte parcial. Os autores estão em débito com o parecerista anônimo pela revisão extremamente cuidadosa do artigo e por valiosas sugestões.

Referências

[1] G. Breit and I.I. Rabi, Phys. Rev. **38**, 2082 (1931); I.I. Rabi, Phys. Rev., **43**, 838 (1933); V.W. Cohen and I.I. Rabi, Phys. Rev., **43**, 582 (1933); I.I. Rabi, J.M. Kellogg and J.R. Zacharias, Phys. Rev., **46,** 163 (1934); G. Breit and I.I. Rabi, Phys. Rev., **46**, 230 (1934); S. Millman, M. Fox and I.I. Rabi, Phys. Rev., **46**, 320 (1934); V.W. Cohen and I.I. Rabi, Phys. Rev., **46**, 707 (1934); M. Fox and I.I. Rabi, Phys. Rev., **48**, 746 (1935); S. Rosin and I.I. Rabi, Phys. Rev., **48**, 373 (1935); I.I. Rabi, Phys. Rev., **49**, 324 (1936); I.I. Rabi and J.R. Zacharias, Phys. Rev., **50**, 472 (1936); I.I. Rabi, S. Millman, P. Kusch and J.R. Zacharias, Phys. Rev., **53**, 318 (1938); I.I. Rabi, S. Millman, P. Kusch and J.R. Zacharias, Phys. Rev., **53**, 384 (1938); I.I. Rabi, S. Millman and J.R. Zacharias, Phys. Rev., **53**, 495 (1938).

[2] Jagdish Mehra and Milton A. Kimball, *Climbing the Mountain, The Scientific Biography of Julian Schwinger* (Oxford University Press, Inc., New York, 2000).

[3] Julian S. Schwinger *Lectures on Quantum Mechanics* (Ecole de Physique des Houches, Les Houches, 1955).

[4] Julian S. Schwinger, Proc. Natl. Acad. of Sci. **45**, 1542 (1959); Ibid., Proc. Natl. Acad. of Sci. **46**, 256 (1960); Ibid., Proc. Natl. Acad. of Sci. **46**, 570 (1960); Ibid., Proc. Natl. Acad. of Sci. **46**, 883 (1960); Ibid., Proc. Natl. Acad. of Sci. **46**, 1401 (1960); Ibid., Proc. Natl. Acad. of Sci. **47**, 1075 (1961).

[5] Julian S. Schwinger, *Quantum Kinematics and Dynamics* (W.A. Benjamin Publishers, New York, 1970).

[6] C.A.M. de Melo e B.M. Pimentel, - *Formulação Variacional da Mecânica Quântica, v. I e II*, Notas Internas do Instituto de Física Teórica - UNESP, (2004); cópias disponíveis pela biblioteca do Instituto de Física Teórica: IFT-N.001/2004 e IFT-N.002/2004.

[7] Julian S. Schwinger, *Quantum Mechanics: Symbolism of Atomic Measurements* (Springer, New York, 2001).

[8] John Alexander Ramirez Bedoya, *Princípio Variacional de Schwinger para Trajetórias Temporalmente Fechadas.* Dissertação de Mestrado, Instituto de Física Teórica, 2009.

[9] Cássius Anderson Miquele de Melo, *Princípio Variacional de Schwinger e Teoria Quântica: Aplicações à Mecânica Quântica Quaterniônica e ao Estudo de Sistemas Singulares.* Dissertação de Mestrado, Instituto de Física Teórica, 2002.

[10] David Finkelstein, Joseph M. Jauch, Samuel Schminovich and David Speiser, Jour. Math. Phys **3**, 267 (1962).

[11] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics, v. 1 and 2* (Interscience Publishers, INC., New York, 1966).