

Uma proposta para o ensino de teoria quântica de campos na graduação: a eletrodinâmica de Maxwell-Chern-Simons como motivação

(A proposal to the teaching of quantum field theory in the undergraduation level:
the Maxwell-Chern-Simons electrodynamics as motivation)

Denny Mauricio de Oliveira¹

Instituto de Física, Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, Brazil
Recebido em 21/07/2010; Aceito em 16/6/2011; Publicado em 7/10/2011

A teoria quântica de campos tem se apresentado como uma ferramenta importante em estudos recentes de diferentes áreas da física, tais como a teoria de partículas e nuclear, cosmologia, teoria de matéria condensada, física de altas energias, física estatística e fenômenos críticos. Neste artigo mostramos, de modo didático e pedagógico, algumas características de um sistema de férmions interagindo com um campo de calibre em $(2 + 1)$ dimensões. O efeito mais interessante é a indução do termo de Chern-Simons neste sistema a partir da teoria perturbativa. Argumentamos que este procedimento, apesar de utilizar métodos de teoria quântica de campos, pode ser abordado por alunos de graduação em física nos cursos que discutem temas de relatividade restrita e teoria quântica.

Palavras-chave: teoria quântica de campos, eletrodinâmica quântica, termo de Chern-Simons, sistemas planares.

Quantum field theory has been used as an important tool in recent studies of different areas of physics, such as particle and nuclear theory, cosmology, condensed matter theory, high energy physics, statistical physics and critical phenomena. In this article, we show, in a didactic and pedagogical manner, some characteristics of a fermion system interacting with a gauge field in $(2 + 1)$ dimensions. The more interesting effect is the induction of the Chern-Simons-like term in this system from the perturbative theory. We argue that this procedure, despite using methods of quantum field theory, may be approached by undergraduate students in physics courses that discuss topics of special relativity and quantum theory.

Keywords: quantum field theory, quantum electrodynamics, Chern-Simons term, planar systems .

1. Introdução

A teoria quântica de campos é um referencial teórico que agrega os conceitos de relatividade restrita e mecânica quântica. Em seu formalismo, as partículas são descritas como excitações localizadas de um campo imerso no espaço-tempo. É comum em uma abordagem inicial o estudante quantizar um canal (corda) linear com um número finito de partículas oscilando harmonicamente e obter a lagrangiana desse sistema e outras grandezas que dela podem ser derivadas. Por exemplo, se o sistema for tratado quanticamente, essas partículas podem ser pensadas em seu limite do discreto tendendo ao contínuo e se obtém a ideia do campo clássico. Este tópico é abordado, por exemplo, em Sakurai [1] e Lemos [2]. Assim, o principal objetivo da teoria quântica de campos é fornecer métodos de quantização para que se possa entender o comportamento desses campos.

É marcante o fato de que tais assuntos não sejam introduzidos nos cursos de graduação em física mesmo em níveis elementares. O formalismo de quadri-vetores e tensores é abordado nos cursos de Relatividade Restrita, mas o tópico teoria clássica de campos, por exemplo, não é geralmente discutido. É possível encontrar na literatura recente, dirigida a estudantes de graduação, alguns livros que têm se preocupado com a importância do tema. Exemplos são Lemos [2] e Basalo [3] (os estudantes mais avançados são encorajados a consultar as Refs. [4] e [5]). Na opinião do autor deste artigo, existe um grande hiato em relação a este tópico quando o estudante faz a transição da graduação à pós: na graduação, não existe uma disciplina (nem mesmo optativa) que aborda o tema, enquanto que, na pós-graduação, o tema é tratado rapidamente em vias de revisão, uma vez que se entende que o aluno já tenha

¹E-mail: ddeoliveira@physics.unh.edu.

Afiliação atual: Department of Physics, University of New Hampshire, 9 Library Way, Durham, NH 03824 USA.

tido contato com conceitos da teoria clássica de campos, tais como a invariância de Lorentz e o teorema de Noether, este último relacionado a simetrias internas. A Ref. [2] aborda estes tópicos de maneira satisfatória a estudantes em vias de graduação. A contemplação deste tema por parte desses estudantes é importante para a sequência de seus estudos acadêmicos, mesmo para aqueles que não seguirão propriamente a carreira de teoria quântica de campos. A justificativa reside no fato de que esta teoria tem aplicabilidade em outras áreas de especialização da física, quer seja teórica ou experimental. Um exemplo é a *teoria de Maxwell-Chern-Simons*, proposta no início da década de 80 por Deser e cols. [6]. Esta teoria tem aplicabilidade a fenômenos planares (duas dimensões espaciais e uma temporal) da física de matéria condensada, com grande destaque na literatura aos supercondutores e ao efeito Hall quântico fracionário [7]. O cálculo do termo induzido de Chern-Simons é o tema central deste trabalho.

Neste artigo, será mostrado que é possível abordar a teoria quântica de campos em um curso de graduação em física. A motivação é o campo de Chern-Simons, aqui representado por A_μ . A seção 2 traz as notações e algumas convenções e regras utilizadas neste trabalho. Na seção 3, são apresentadas as principais características deste campo, além de algumas de suas propriedades que são diferentes daquelas do eletromagnetismo usual. O propagador das partículas que compõem o campo de Chern-Simons é obtido na seção 4. É mostrado que, mesmo partindo de uma lagrangiana que não contém o termo de Chern-Simons, é possível obtê-lo utilizando teoria perturbativa. Isso é feito na seção 5. A seção 4 apresenta a conclusão. O artigo se encerra com dois apêndices técnicos úteis aos cálculos aqui realizados.

2. Notações, convenções e matrizes de Dirac em (2+1)D

Unidades. Utilizamos o sistema natural de unidades: $\hbar = c = 1$ (consulte a Ref. [5] para discussões sobre as implicações físicas deste sistema de unidades).

Índices. No espaço físico planar, os índices em grego assumem os valores $\mu = 0, 1, 2$ e as letras latinas i e j são reservadas às partes espaciais do vetor. A métrica utilizada tem a assinatura $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1)$. Portanto, sendo c_μ e d_μ dois “trivetores” quaisquer, utilizamos a regra de soma de Einstein

$$\sum_{\mu=0}^2 c_\mu d^\mu \equiv c_\mu d^\mu = c_0 d^0 - c_1 d^1 - c_2 d^2 = c_0 d^0 - \mathbf{c} \cdot \mathbf{d}. \quad (1)$$

Matrizes de Dirac. Nesta dimensão, a matriz identidade e as matrizes de Dirac escolhidas são

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}. \quad (2)$$

A notação tr_D indica que os traços são calculados sobre as matrizes γ de Dirac. As mesmas têm as seguintes propriedades: $tr_D[I] = 2$ e $tr_D[\gamma^\mu] = 0$. Então, são úteis as seguintes relações

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad (3)$$

$$\gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu = -\gamma^\nu, \quad (4)$$

$$tr_D[\gamma^\mu \gamma^\nu] = 2g^{\mu\nu}, \quad (5)$$

$$tr_D[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho] = 2i\varepsilon^{\mu\nu\rho}. \quad (6)$$

A identidade (6) apresenta o tensor completamente antissimétrico $\varepsilon^{\mu\nu\rho}$, também conhecido por símbolo de Levi-Civita. Este tensor tem as seguintes propriedades: $\varepsilon^{012} = \varepsilon_{012} = 1$. Este tensor assume os valores $+1$ para permutações pares e -1 para permutações ímpares de seus índices.

Na equação de Dirac, as matrizes γ aparecem frequentemente contraídas com quadrivetores (em nosso caso, apenas três dimensões). Assim, é comum utilizar a notação *slash* $\not{A} = A_\mu \gamma^\mu$, idealizada por Feynman. Isso satisfaz $\not{A}^2 = A^2$ e, em particular

$$(\not{p} + m)(\not{p} - m) = p^2 - m^2. \quad (7)$$

Trasformada de Fourier. A transformada de Fourier de uma função $f^\mu(x)$ é

$$f^\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f^\mu(k) e^{-ikx}. \quad (8)$$

A transformada inversa de Fourier da função $f^\mu(x)$ é dada por

$$f^\mu(k) = \int d^3x f^\mu(x) e^{ikx}. \quad (9)$$

A ação da derivada ∂_μ sobre a Eq. (8) é assim representada

$$\partial_\mu f^\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (-ik_\mu) f^\mu(k) e^{-ikx}. \quad (10)$$

Em particular, a delta de Dirac em 3D é

$$\delta^{(3)}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-ikx}. \quad (11)$$

Regras de Feynman. Para cada linha interna do férmion no gráfico de Feynman [8], associamos o seguinte propagador representado na Fig. 1.

$$\longrightarrow = \frac{i}{\not{p} - m}$$

Figura 1 - Representação gráfica do propagador do férmion.

No caso do vértice, a linha ondulada representa um fóton, como mostra a Fig. 2.

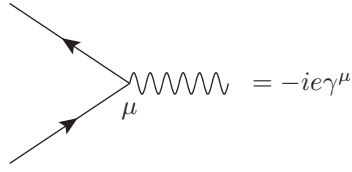


Figura 2 - Regra de Feynman para o vértice.

3. A eletrodinâmica de Chern-Simons

Como é bem conhecido, a teoria de calibre (*gauge*) de Maxwell usual é descrita a partir de um campo vetorial fundamental A_μ , através da lagrangiana ²

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - A_\mu J^\mu, \quad (12)$$

onde

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (13)$$

é o tensor antissimétrico do campo eletromagnético e $J^\mu = (\rho, \mathbf{J})$ é a corrente de matéria. Esta lagrangiana é invariante frente as transformações de calibre

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda. \quad (14)$$

Ao se inserir a lagrangiana de Maxwell nas equações de Euler-Lagrange [9]

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu A^\nu)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu}, \quad (15)$$

obtém-se as *equações de movimento* ou *equações de Maxwell*

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu. \quad (16)$$

Essas equações também são invariantes frente a mesma transformação da Eq. (14). Devido a antisimetria de $F^{\mu\nu}$, a corrente de matéria se conserva, ou seja,

$$\partial_\nu J^\nu = 0. \quad (17)$$

Na teoria eletromagnética de Maxwell convencional, o tensor $F_{\mu\nu}$ é uma matriz quadrada antissimétrica de ordem 4×4 . O número de campos nesta teoria é dado por $\frac{1}{2}D(D-1)$ que, em quatro dimensões, corresponde a três campos elétricos e três campos magnéticos. No entanto, esta teoria pode ser definida em *qualquer* dimensão, se os índices do campo de calibre A_μ variam de $\mu = 0, 1, 2, \dots, D-1$, onde D é a dimensão escolhida.

No caso particular de sistemas planares, o campo magnético é dado por $B = \varepsilon^{ij} \partial_i A_j$, ou seja, este campo

é um *escalar*. Isso acontece porque nesta teoria o potencial vetor é bidimensional, e o rotacional de um vetor em duas dimensões resulta em um escalar. Já o campo elétrico é um vetor espacial de duas componentes. Portanto, o número de campos eletromagnéticos em $(2+1)$ dimensões é três, de acordo com a relação acima.

Uma teoria que apresenta características distintas em relação à teoria de Maxwell simplesmente reduzida dimensionalmente é a *teoria de Chern-Simons* (CS), cuja lagrangiana é dada por [6]

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{\theta}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho - A_\mu J^\mu, \quad (18)$$

onde θ é o parâmetro de CS, cujo significado físico será discutido mais adiante. Com a transformação de calibre $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$, a lagrangiana (18) varia apenas por uma divergência

$$\mathcal{L}_{CS} \rightarrow \mathcal{L}_{CS} + \partial_\rho \left(\frac{\theta}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho \Lambda \right), \quad (19)$$

mas a ação

$$\Gamma_{CS} = \int d^3x \mathcal{L}_{CS} \quad (20)$$

permanece invariante, pois os termos de superfície são desprezados.

As equações de movimento de CS são obtidas como resultado da ação das equações de Euler-Lagrange na lagrangiana (18)

$$J^\mu = \frac{\theta}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho} F_{\nu\rho}, \quad (21)$$

que também gozam da liberdade de calibre representada acima. Também é possível observar que a corrente se conserva devido a verificação da identidade de Bianchi

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\mu F_{\nu\rho} = 0. \quad (22)$$

Como $F^{\mu\nu}$ é uma matriz antissimétrica e o campo magnético é um escalar, sua representação matricial [2] é

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y \\ E_x & 0 & -B \\ E_y & B & 0 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

A teoria de CS pura apresenta características interessantes. As equações de Euler-Lagrange para esta teoria, em termos das densidades de carga e corrente, são denominadas *equações de Chern-Simons*

$$\rho = \theta B, \quad (24)$$

$$J^i = \theta \varepsilon^{ij} E_j. \quad (25)$$

A primeira indica que a densidade de carga é *localmente* proporcional ao campo magnético, cuja constante de proporcionalidade é o parâmetro de CS. Assim,

²Em teoria quântica de campos, em geral, os campos são locais. É conveniente assim definir uma função \mathcal{L} , denominada *densidade de lagrangiana*, onde $L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$. Portanto, a terminologia *lagrangiana* se refere simplesmente à *densidade de lagrangiana*. Há uma discussão detalhada desse assunto na Ref. [10].

o efeito produzido por este termo na teoria de CS pura é anexar fluxo magnético à carga elétrica (tais partículas são denominadas *ânions*). Já a segunda relação diz que o campo elétrico é proporcional à corrente, cuja constante de proporcionalidade também é θ . Estes efeitos estão em contraste com a teoria eletromagnética de Maxwell usual.

4. O propagador de Maxwell-Chern-Simons

A lagrangiana desta teoria é descrita pelo acoplamento dos campos de Maxwell e CS (MCS) [7]

$$\mathcal{L}_{MCS} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\theta}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu A_\rho. \quad (26)$$

Utilizando a definição (13) para o tensor do campo eletromagnético e sua propriedade de antissimetria, podemos escrever

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= 2[\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\nu A^\mu \partial_\mu A^\nu]. \end{aligned}$$

A partir da Eq. (20), a ação é calculada através de uma integral por partes

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{2} \int d^3x [A_\nu \square A^\nu - A^\mu \partial_\nu \partial_\mu A^\nu + \theta \varepsilon_{\mu\nu\rho} A^\mu \partial^\rho A^\nu] \\ &\quad - \frac{1}{2} \int d^3x \partial_\mu (A_\nu \partial^\mu A^\nu) - \frac{1}{2} \int d^3x \partial_\nu (A^\mu \partial_\mu A^\nu). \end{aligned} \quad (27)$$

Os dois termos da segunda linha da Eq. (27) são negligenciados devido ao teorema de Gauss e $\square = \partial^2/\partial t^2 - \nabla^2$ é o operador de D'Alembert.

A liberdade de calibre mostrada na Eq. (14) gera um problema quando se tenta obter o propagador dos fótons de Maxwell: ele simplesmente não existe (para uma discussão detalhada desse fato, consulte a Ref. [12]). Para quebrar essa invariância, é comum modificar a lagrangiana adicionando-se um termo denominado *termo de fixação de calibre*. É por isso que a teoria de Maxwell é denominada teoria de calibre. Este termo usualmente é definido por

$$-\frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2, \quad (28)$$

onde λ é uma constante arbitrária.

Portanto, a ação desta teoria, em (2+1) dimensões, após uma nova integração por partes no termo de fixação de calibre, agora é escrita na forma

$$\Gamma = \frac{1}{2} \int d^3x A^\mu [\square g_{\mu\nu} - \partial_\nu \partial_\mu + \theta \varepsilon_{\mu\nu\rho} \partial^\rho + \lambda \partial_\mu \partial_\nu] A^\nu. \quad (29)$$

O termo entre colchetes é o núcleo da ação e o propagador de Feynman é uma função de Green. Assim, o mesmo pode ser calculado através da identidade

$$(-\square g_{\mu\nu} + \partial_\nu \partial_\mu - \theta \varepsilon_{\mu\nu\rho} \partial^\rho - \lambda \partial_\mu \partial_\nu) \Delta_F^{\nu\sigma}(x-y) = i\delta_\mu^\sigma \delta^{(3)}(x-y). \quad (30)$$

Com o propagador escrito em termos de sua transformada de Fourier

$$\Delta_F^{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Delta_F^{\mu\nu}(k) e^{-ik \cdot (x-y)},$$

observa-se que

$$\partial_\mu \Delta_F^{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Delta_F^{\mu\nu}(k) (-ik_\mu) e^{ik \cdot (x-y)},$$

e da Eq. (30) se obtém a expressão

$$(-k^2 g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu - i\theta \varepsilon_{\mu\nu\rho} k^\rho - \lambda k_\mu k_\nu) \Delta_F^{\nu\sigma}(k) = i\delta_\mu^\sigma. \quad (31)$$

Para o cálculo da Eq. (31), será utilizado o *ansatz* geral

$$\Delta_F^{\nu\sigma}(k) = \mathcal{A}g^{\nu\sigma} + \mathcal{B}k^\nu k^\sigma + \mathcal{C}\varepsilon^{\nu\sigma\tau} k_\tau. \quad (32)$$

Assim

$$\begin{aligned} &-\mathcal{A}k^2 \delta_\mu^\sigma - \mathcal{B}k^2 k_\mu k^\sigma - \mathcal{C}k^2 g_{\mu\nu} \varepsilon^{\nu\sigma\tau} k_\tau + \mathcal{A}k_\mu k^\sigma + \\ &+ \mathcal{B}k^2 k_\mu k^\sigma + \mathcal{C}\varepsilon^{\nu\sigma\tau} k_\mu k_\nu k_\tau - i\mathcal{A}\theta \varepsilon_{\mu\nu\rho} g^{\nu\sigma} k^\rho + \\ &- i\mathcal{B}\theta \varepsilon_{\mu\nu\rho} k^\rho k^\nu k^\sigma - i\mathcal{C}\theta \varepsilon_{\mu\nu\rho} \varepsilon^{\nu\sigma\tau} k^\rho k_\tau - \mathcal{A}\lambda k_\mu k^\sigma + \\ &- \mathcal{B}\lambda k^2 k_\mu k^\sigma - \mathcal{C}\lambda \varepsilon^{\nu\sigma\tau} k_\mu k_\nu k_\tau = i\delta_\mu^\sigma. \end{aligned} \quad (33)$$

A identidade abaixo é útil para o termo com dois tensores antissimétricos na expressão acima

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho} \varepsilon^{\nu\sigma\tau} = -\delta_\mu^\sigma \delta_\rho^\tau + \delta_\rho^\sigma \delta_\mu^\tau. \quad (34)$$

Este termo fica

$$\begin{aligned} -i\mathcal{C}\theta \varepsilon_{\mu\nu\rho} \varepsilon^{\nu\sigma\tau} k^\rho k_\tau &= -i\mathcal{C}\theta (-\delta_\mu^\sigma \delta_\rho^\tau + \delta_\rho^\sigma \delta_\mu^\tau) k^\rho k_\tau \\ &= i\mathcal{C}\theta (k^2 \delta_\mu^\sigma - k_\mu k^\sigma). \end{aligned} \quad (35)$$

Assim, é possível identificar um sistema de três equações com três incógnitas \mathcal{A} , \mathcal{B} e \mathcal{C} de acordo com a forma do tensor

$$\begin{aligned} [-\mathcal{A}k^2 + i\mathcal{C}\theta k^2] \delta_\mu^\sigma &= i\delta_\mu^\sigma \\ [\mathcal{A}(1-\lambda) - \mathcal{B}\lambda k^2 - i\mathcal{C}\theta] k_\mu k^\sigma &= 0 \\ (-i\mathcal{A}\theta - \mathcal{C}k^2) g_{\mu\nu} \varepsilon^{\nu\sigma\tau} k_\tau &= 0. \end{aligned}$$

As soluções do sistema são

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= -\frac{i}{k^2 - \theta^2} \\ \mathcal{B} &= \frac{i}{k^2(k^2 - \theta^2)} - \frac{1}{\lambda k^4} \\ \mathcal{C} &= -\frac{\theta}{k^4 - k^2 \theta^2}. \end{aligned}$$

Portanto, de acordo com a Eq. (32) e os resultados acima, o propagador do fóton para a teoria de MCS em (2+1) dimensões é escrito da seguinte maneira

$$\Delta_F^{\mu\nu}(k) = -\frac{ig^{\mu\nu}}{k^2 - \theta^2} + \frac{ik^\mu k^\nu}{k^2(k^2 - \theta^2)} - \frac{\theta\varepsilon^{\mu\nu\rho}k_\rho}{k^2(k^2 - \theta^2)} - \frac{1}{\lambda} \frac{ik^\mu k^\nu}{k^4}. \quad (36)$$

Nessa expressão para o propagador, de modo semelhante ao que ocorre em campos massivos, é evidente a existência de um pólo em $\theta = \sqrt{k^2}$, que representa uma massa. É por isso que essa teoria é denominada *teoria de calibre topologicamente massiva* [6]. Também é interessante observar que, para o caso de $\lambda \rightarrow \infty$, ocorre o calibre de Landau, que fornece a condição de transversalidade similar a do propagador do fóton usual

$$k_\mu \Delta_F^{\mu\nu}(k) = 0. \quad (37)$$

5. Indução de Chern-Simons em (2+1) dimensões

A teoria da eletrodinâmica quântica possibilita o estudo de sistemas que envolvem interações entre férmions e um campo de calibre externo A_μ . No caso de um espaço-tempo tridimensional, uma característica interessante desses sistemas é que, mesmo ao se partir de uma teoria de interação de férmions de massa m com um campo vetorial A_μ sem a presença de um termo de CS na dinâmica deste campo, um termo deste tipo é induzido por correções radiativas. Este termo induzido será calculado utilizando-se do formalismo de integrais de trajetórias [11] para o campo de Dirac e expandindo o resultado até termos de segunda ordem. Assim, a lagrangiana que indica tal acoplamento é dada por [6]

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - e\cancel{A} - m)\psi. \quad (38)$$

A ação efetiva para este modelo dependente do campo A_μ . Na aproximação de um laço (*loop*) [13], esta ação é definida como se segue

$$e^{i\Gamma_{ef}(A)} = N \int D\bar{\psi} D\psi \exp \left[i \int d^3x \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - e\cancel{A} - m)\psi \right], \quad (39)$$

onde N é uma constante de normalização.

Integrando sobre os campos de férmions ³, obtemos

$$e^{i\Gamma_{ef}(A)} = N \det(i\cancel{\partial} - e\cancel{A} - m), \quad (40)$$

ou seja ⁴

$$\begin{aligned} \Gamma_{ef}(A) &= -i \ln \det[i\cancel{\partial} - e\cancel{A} - m] \\ &= -i \text{Tr} \ln[i\cancel{\partial} - e\cancel{A} - m], \end{aligned} \quad (41)$$

onde o termo constante foi negligenciado.

³No resultado do cálculo de integrais gaussianas em variáveis ordinárias, o determinante surge no denominador. No entanto, em gaussianas de variáveis anticomutantes (variáveis de Grassmann), o determinante aparece no numerador. Esta demonstração está no Apêndice A. Também há um detalhe maior no formalismo matemático da álgebra de férmions na Ref. [14].

⁴O Apêndice B contém a demonstração desta identidade.

⁵ $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

A expressão acima é expandida ⁵ para se obter

$$\begin{aligned} \Gamma_{ef}[A, m] &= -i \text{Tr} \ln \left[(i\cancel{\partial} - m) \left(\frac{i\cancel{\partial} - e\cancel{A} - m}{i\cancel{\partial} - m} \right) \right] \\ &= -i \text{Tr} \ln(i\cancel{\partial} - m) - i \text{Tr} \ln \left[1 - \frac{1}{i\cancel{\partial} - m} e\cancel{A} \right] \\ &= -i \text{Tr} \ln(i\cancel{\partial} - m) + i \text{Tr} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\frac{1}{i\cancel{\partial} - m} e\cancel{A} \right]^n. \end{aligned}$$

O primeiro termo da expressão acima é livre, ou seja, não tem caráter perturbativo porque $A_\mu = 0$ [7]. Para $n = 1$ na expansão acima, temos que

$$\Gamma_{ef}^{(1)} = ie \text{Tr} \left[\frac{1}{i\cancel{\partial} - m} \cancel{A} \right]. \quad (42)$$

As contribuições da expressão (42) dão origem a termos do tipo *tadpoles*, que são lineares em A_μ e são divergentes no ultravioleta por contagem de potências [13]. Como esses termos não contribuem com a indução de CS, os mesmos serão desconsiderados nos cálculos a seguir. Entretanto, seu gráfico em primeira ordem no campo de calibre é mostrado na Fig. 3.

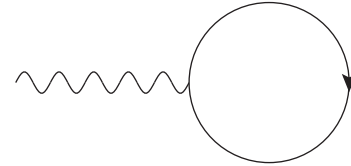


Figura 3 - Diagrama de Feynman representando o *tadpole*.

Como estamos procurando pelo termo induzido de CS, que é quadrático no campo de calibre, restringiremos nossa atenção somente ao termo bilinear. Então, temos que

$$\Gamma_{ef}^{(2)} = \frac{ie^2}{2} \text{Tr} \left[\frac{1}{i\cancel{\partial} - m} \cancel{A} \frac{1}{i\cancel{\partial} - m} \cancel{A} \right]. \quad (43)$$

Para o cálculo do traço da ação acima, considere \mathcal{O} um operador que depende das matrizes de Dirac e dos índices internos do grupo de Lie. Então, seu traço total Tr é definido por

$$\text{Tr} \mathcal{O} \doteq \text{tr} \text{tr}_D \int d^3x \langle x | \mathcal{O} | x' \rangle \Big|_{x=x'}. \quad (44)$$

Inserindo as relações de completeza ou fechamento nos espaços das posições e momentos

$$\int d^3x |x\rangle \langle x| = 1 \quad , \quad \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} |p\rangle \langle p| = 1, \quad (45)$$

sendo $\langle x | p \rangle = \langle p | x \rangle^* = e^{ipx}$, assumindo-se a propriedade de ciclicidade do traço, obtém-se

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ef}^{(2)} &= \frac{ie^2}{2} tr tr_D \int d^3x \int d^3y \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \langle x | \frac{1}{i\not{p} - m} | p \rangle \langle p | \not{A}(y) \langle y | \frac{1}{i\not{q} - m} | q \rangle \langle q | \not{A}(x) \\
&= \frac{ie^2}{2} tr tr_D \int d^3x \int d^3y \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\not{p} - m} \not{A}(y) \frac{1}{\not{q} - m} \not{A}(x) e^{ipx - ipy + iqy - iqx} \\
&= \frac{ie^2}{2} tr tr_D \int d^3x \int d^3y \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{(\not{p} + m) \not{A}(y) (\not{q} + m) \not{A}(x)}{(p^2 - m^2)(q^2 - m^2)} e^{i(p-q)(x-y)} \\
&= -\frac{ie^2}{2} tr tr_D \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{(\not{p} + m) \not{A}(-k) (\not{p} + \not{k} + m) \not{A}(k)}{[(p+k)^2 - m^2](p^2 - m^2)},
\end{aligned}$$

onde foi feita a mudança de variável $p - q \rightarrow -k$.

Os termos que aparecem no numerador da integral acima são escritos explicitamente

$$\begin{aligned}
&\not{p} \not{A} \not{p} \not{A} + \not{p} \not{A} \not{k} \not{A} + \\
&m \not{p} \not{A} \not{A} + m \not{A} \not{p} \not{A} + m \not{A} \not{k} \not{A} + m^2 \not{A} \not{A}. \quad (46)
\end{aligned}$$

As integrais dos termos lineares no momento p na expressão são nulas por paridade. O único termo que contribuirá com nossos cálculos é $m \not{A} \not{A}$, uma vez que é bilinear em A_μ . O termo $m^2 \not{A} \not{A}$ contribuirá com uma parte diferente de zero, mas, apesar de ser bilinear, não vai fornecer a derivada que surge no termo de CS. Assim, para nossos propósitos, a ação será obtida explicitamente de

$$\begin{aligned}
\Gamma_{CS} &= -\frac{ie^2}{2} m tr_D tr \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \times \\
&\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\not{A}(-k) \not{k} \not{A}(k)}{[(p+k)^2 - m^2](p^2 - m^2)}. \quad (47)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{CS} &= -\frac{ie^2}{2} m tr_D tr \int d^3x \int d^3y \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int_0^1 dz \not{A}(y) \not{k} \not{A}(x) e^{-ikx + iky} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(p^2 - \mu^2)^2} \\
&= \frac{ie^2}{16} m tr_D tr \int d^3x \int d^3y \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \not{A}(y) \not{\partial}_x \not{A}(x) \int_0^1 \frac{dz}{|\mu|} e^{-ik(x-y)} \\
&= \frac{ie^2}{16\pi} m tr tr_D \int d^3x \int d^3y \not{A}(y) \not{\partial}_x \not{A}(x) g(x-y), \quad (51)
\end{aligned}$$

onde ⁶

$$g(x-y) = 2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{|k|} \arcsin\left(\frac{|k|}{\sqrt{4m^2 - k^2}}\right) e^{-ik(x-y)}.$$

⁶Integral [15] sobre o parâmetro z : $\int \frac{dz}{|\mu|} = -\frac{1}{|k|} \arcsin\left[\frac{(2z-1)|k|}{\sqrt{4m^2 - k^2}}\right]$, $\mu^2 = m^2 - k^2z(1-z)$.

Com o uso da parametrização de Feynman

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dz \frac{1}{[az + b(1-z)]^2}, \quad (48)$$

onde $a = (k+p)^2 - m^2$ e $b = p^2 - m^2$, é possível escrever

$$\begin{aligned}
&(k+p)^2z - m^2z + (p^2 - m^2)(1-z) = \\
&= k^2z + p^2z + 2(k \cdot p)z - m^2z + p^2 - m^2 - p^2z + m^2z \\
&= k^2z + k^2z^2 + 2(k \cdot p)z + p^2 - k^2z^2 - m^2 \\
&= (p+kz)^2 + k^2z(1-z) - m^2. \quad (49)
\end{aligned}$$

Com a mudança de variável $p \rightarrow p - kz$, e considerando o parâmetro $\mu^2 = m^2 - k^2z(1-z)$, a integral no momento p regularizada dimensionalmente [13] será utilizada logo adiante

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(p^2 - \mu^2)^2} = \frac{i}{8\pi|\mu|}, \quad (50)$$

Escrevendo os campos de CS no espaço das posições, a partir da Eq. (47), temos que

Para que o termo local de CS induzido na ação acima possa ser extraído, o integrando de $g(x - y)$ é expandido em torno de $k \rightarrow 0$. Assim

$$g(x - y) = \frac{1}{|m|} \delta^{(3)}(x - y). \quad (52)$$

Com este resultado na Eq. (51), obtém-se

$$\Gamma_{CS} = \frac{ie^2 m}{16\pi |m|} \text{tr} \int d^3x \text{tr}_D [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho] A_\mu \partial_\nu A_\rho. \quad (53)$$

Portanto, a ação induzida é

$$\Gamma_{CS}^{(2+1)D} = -\frac{e^2 m}{8\pi |m|} \text{tr} \int d^3x \varepsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho. \quad (54)$$

Este resultado é a contribuição bilinear (abeliana) no campo de calibre encontrada na Ref. [7], e cálculos mais detalhados são descritos na Ref. [16]. A Fig. 4 mostra o gráfico de Feynman utilizado no cálculo do termo induzido de Chern-Simons. A Eq. (54) indica que a interação de férmions com um campo de calibre formulado em (2+1) dimensões gera um termo semelhante ao de Chern-Simons. Como foi discutido na seção 2, é possível afirmar então que os quanta deste campo de calibre podem ser massivos.

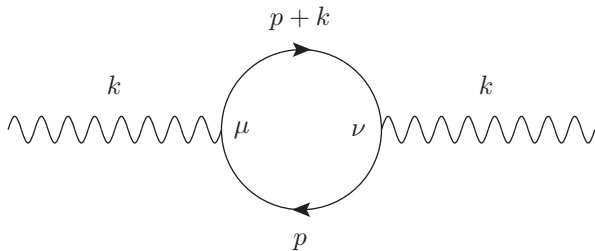


Figura 4 - Diagrama de Feynman de um laço de férmions utilizado para o cálculo da ação da Eq. (47).

6. Conclusão

Neste artigo, apresentamos o campo de Chern-Simons e discutimos algumas de suas principais características físicas, destacando seus contrastes com a teoria eletromagnética de Maxwell tradicional. Calculamos o propagador do campo de Chern-Simons com um termo de fixação de calibre acoplado ao campo convencional de Maxwell e obtivemos um propagador que indica que os quanta deste campo possuem massa.

Mostramos também que é possível obter perturbativamente um termo induzido de Chern-Simons em um sistema físico planar de férmions interagindo com um campo de calibre mesmo que este termo não constitui a lagrangiana original. Argumentamos também que é possível a abordagem de tal tópico por estudantes de graduação em disciplinas relacionadas com a teoria quântica de campos, sempre mostrando referências nas quais podem ser obtidas outras informações e cálculos

mais detalhados. O cálculo do termo induzido é interessante porque apresenta alguns métodos usuais em teoria quântica de campos, tais como integração da ação exponencial do campo de férmions, emprego de integrais de Feynman regularizadas dimensionalmente e obtenção da ação efetiva escrita nos espaços das posições e dos momentos.

Além disso, ao estudar este problema, o aluno de graduação terá a oportunidade de encontrar ferramentas e conceitos que não são tratados em geral nos cursos de graduação. Isso possibilitará um melhor preparo aos seus estudos mais avançados nas mais variadas áreas de pesquisa em física.

Agradecimentos

O autor agradece ao professor Adilson José da Silva pelas discussões sobre o tema, a Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante pela leitura atenta e valiosas sugestões e ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) pelo apoio financeiro parcial.

Apêndices

A Integração gaussiana em variáveis de Grassmann

Quando se trata de férmions, a estatística exige o emprego de variáveis anticomutantes. Variáveis que obedecem a essa propriedade são denominadas *variáveis de Grassmann*. No entanto, em contraste com integrais gaussianas em variáveis comutantes, nas integrais gaussianas que envolvem variáveis de Grassmann, o determinante da matriz no expoente aparece no numerador. Essa relação será demonstrada neste apêndice.

Sejam ξ e η duas variáveis de Grassmann e c uma variável complexa qualquer. São válidas as relações

$$\{\xi, \eta\} = 0 \quad , \quad [\xi, c] = 0, \quad (55)$$

de onde segue automaticamente que $\xi^2 = 0$. De acordo com esas definições

$$\int d\xi \equiv 0 \quad \text{e} \quad \int d\xi(\xi) \equiv 1, \quad (56)$$

obtém-se

$$\int d\xi \int d\eta(\eta\xi) = 1. \quad (57)$$

Como o campo de Dirac é definido em um espaço complexo, é verdadeira a relação

$$(\xi\eta)^* = \eta^* \xi^* = -\xi^* \eta^*. \quad (58)$$

Uma integral gaussiana simples em variáveis de Grassmann é assim calculada

$$\begin{aligned} \int d\xi^* d\xi e^{-\xi^* c \xi} &= \int d\xi^* d\xi (1 - \xi^* c \xi) \\ &= \int d\xi^* d\xi (1 + \xi \xi^* c) \\ &= \int d\xi^* d\xi (\xi \xi^* c) = c \end{aligned} \quad (59)$$

Note que a expansão da exponencial acima em série de Taylor é finita porque $(\xi \xi^*)^2 = 0$.

Agora, seja o cálculo da integral através da introdução de um fator $(\xi \xi^*)$

$$\begin{aligned} \int d\xi^* d\xi (\xi \xi^*) e^{-\xi^* c \xi} &= \int d\xi^* d\xi (\xi \xi^*) (1 - \xi^* \xi c) \\ &= \int d\xi^* d\xi (\xi \xi^* c) \left(\frac{1}{c} + \xi \xi^* \right) \\ &= 1. \end{aligned} \quad (60)$$

A integração será realizada agora sobre n variáveis de Grassmann. Considere então n variáveis de Grassmann ξ_i e C uma matriz unitária tal que $\eta_i = C_{ij} \xi_j$. Assim

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n \eta_i &= \frac{1}{n!} \varepsilon^{ijk\dots\ell} \eta_i \eta_j \dots \eta_\ell \\ &= \frac{1}{n!} \varepsilon^{ijk\dots\ell} C_{ii'} \xi_{i'} C_{jj'} \xi_{j'} \dots C_{\ell\ell'} \xi_{\ell'} \\ &= \left[\frac{1}{n!} \varepsilon^{ijk\dots\ell} C_{ii'} C_{jj'} \dots C_{\ell\ell'} \right] [\xi_{i'} \xi_{j'} \dots \xi_{\ell'}] \\ &= (\det C) \prod_i \xi_i. \end{aligned}$$

Sendo $D\xi = \prod_i d\xi_i$ e $D\xi^* = \prod_i d\xi_i^*$ e C_{ij} uma matriz diagonalizada, segue então que

$$\begin{aligned} \int D\xi^* D\xi e^{-\xi_i^* C_{ii} \xi_i} &= \int D\xi^* D\xi e^{-\sum_i \xi_i^* c_{ii} \xi_i} \\ &= \prod_i c_{ii} = \det C. \end{aligned} \quad (61)$$

Portanto, concluímos que o determinante da matriz no expoente na integração gaussiana em variáveis de Grassmann surge no numerador.

B Prova da relação $\ln \det Q = \text{Tr} \ln Q$

Seja P_D a matriz diagonal dada por

$$P_D = \begin{pmatrix} p_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & p_n \end{pmatrix}, \quad (62)$$

e Q_D definida como

$$\begin{aligned} Q_D &= I + P_D + \frac{1}{2} P_D^2 + \frac{1}{3!} P_D^3 \cdots \\ &= e^{P_D}, \end{aligned} \quad (63)$$

então

$$P_D = \ln Q_D. \quad (64)$$

Desta forma, Q_D também será diagonal

$$Q_D = \begin{pmatrix} e^{p_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{p_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & q_n \end{pmatrix}. \quad (65)$$

Sendo U uma matriz arbitrária, a multiplicação de (B.1) pela esquerda por U e pela direita por U^{-1} é representada por

$$\begin{aligned} U Q_D U^{-1} &= I + U P_D U^{-1} + \\ &+ \frac{1}{2} (U P_D U^{-1}) (U P_D U^{-1}) + \cdots \end{aligned} \quad (66)$$

Agora, seja $Q = U Q_D U^{-1}$ e $P = U P_D U^{-1}$ as matrizes *não diagonais* resultantes dessa operação. Assim, de (B.4), segue que

$$Q = I + P + \frac{1}{2} P^2 + \cdots = e^P,$$

ou seja

$$P = \ln Q. \quad (67)$$

Assim

$$\begin{aligned} \ln \det Q &= \ln \det (U Q_D U^{-1}) \\ &= \ln(q_1 q_2 \cdots q_n) \\ &= \ln e^{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} \\ &= p_1 + p_2 + \cdots + p_n \\ &= \sum_i p_i \equiv \text{Tr} P. \end{aligned} \quad (68)$$

Portanto, de (B.6) e (B.7), temos que

$$\ln \det Q = \text{Tr} \ln Q. \quad (69)$$

Referências

- [1] J.J. Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics* (Addison-Wesley Publishing Company, Chicago, 1967).
- [2] Nivaldo A. Lemos, *Mecânica Analítica* (Editora Livraria da Física, São Paulo, 2004).
- [3] J.M.F. Bassalo, *Eletrodinâmica Quântica* (Editora Livraria da Física, São Paulo, 2006).
- [4] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields* (Elsevier Butterworth-Heinemann, Oxford, 2004).

- [5] Michele Maggiore, *A Modern Introduction to Quantum Field Theory* (Oxford University Press, New York, 2005).
- [6] S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, *Ann. Phys. (NY)* **140**, 372 (1982).
- [7] G.V. Dunne, [arXiv:hep-ph/99021151](https://arxiv.org/abs/hep-ph/99021151).
- [8] M.E. Peskin and D.V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (The Advanced Book Program, New York, 1995).
- [9] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (John Wiley & Sons, New York, 1999), 3rd ed.
- [10] W. Greiner and J. Reinhardt, *Field Quantization* (Springer, Frankfurt am Main, 1996).
- [11] Ashok Das, *Field Theory - A Path Integral Approach* (World Scientific, New Jersey, 1993).
- [12] Michio Kaku, *Quantum Field Theory - A Modern Introduction* (Oxford University Press, New York, 1994).
- [13] M.O.C. Gomes, *Teoria Quântica dos Campos* (Edusp, São Paulo, 2002).
- [14] C.E.I. Carneiro e M.T. Thomaz, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **22**, 474 (2000).
- [15] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products: Corrected and Enlarged Edition* (Academic Press, Inc. San Diego, 1980).
- [16] D. M. Oliveira, [arXiv:quant-ph-th/1007.0999v1](https://arxiv.org/abs/quant-ph-th/1007.0999v1).