

# Estudo do amortecimento do pêndulo simples: uma proposta para aplicação em laboratório de ensino

(*Study of the damping of a simple pendulum: a purpose for teaching laboratory*)

Francisco José Arnold<sup>1</sup>, Rangel Arthur, Leonardo Lorenzo Bravo-Roger,  
Marcos Sérgio Gonçalves e Mário José Garrido de Oliveira

*Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Tecnologia, Limeira, SP, Brasil*

Recebido em 25/2/2010; Aceito em 21/1/2011; Publicado em 1/12/2011

Os pêndulos são muito empregados nas atividades de ensino de cursos introdutórios de física. Nessas atividades, frequentemente, faz-se uso de modelos ideais para estudar o comportamento do pêndulo. Neste trabalho é sugerido um modelo que leva em conta o amortecimento das oscilações. Uma metodologia experimental é proposta com a finalidade de detectar a diminuição da amplitude das oscilações e ajustar estes dados a um modelo matemático. Os resultados demonstram que o pêndulo simples, composto de esferas de pequeno volume e oscilando com baixas velocidades, pode ser estudado por modelos simplificados. A metodologia e o modelo matemático são compatíveis com o nível de conhecimento de alunos de cursos introdutórios de física e oferecem uma visão mais realística sobre o comportamento do pêndulo.

**Palavras-chave:** pêndulo, amortecimento, número de Reynolds.

The pendula are largely used in teaching activities of physical introductory courses. Often, in these activities an ideal model is used to study the behavior of the pendulum. In this work a model that takes into account the oscillation damping is suggested. An experimental methodology is purposed aiming to detect the falling down of oscillation amplitude and to fit these data to a mathematical model. The results show that the simple pendulum, set up by a small volume sphere and oscillating on low speed, can be studied with simplified models. The methodology and the mathematical model are appropriated for the knowledge level of the students from physic introductory courses and offer a more realistic insight about the pendulum behavior.

**Keywords:** pendulum, damping, Reynolds number.

## 1. Introdução

Os pêndulos são objetos de estudos desde muitos séculos atrás. Seus diferentes tipos e particularidades vêm sendo frequentemente exploradas na literatura científica [1]. A abordagem do pêndulo como elemento de estudo pode ocorrer em diferentes níveis, mas, inequivocamente, encontra-se sempre presente nas disciplinas introdutórias de física básica ministradas em cursos de ciências, engenharias e tecnologias. Evidentemente, conceitos de física de maior profundidade sobre os pêndulos e seu respectivo tratamento matemático não são acessíveis a estudantes dessas disciplinas.

Diante da importância deste tema, experimentos com pêndulos estão sempre presentes na maior parte dos programas das disciplinas das físicas elementares em laboratório. Dos diversos tipos de pêndulos, o pêndulo simples é um dos experimentos mais conhecidos e didáticos desenvolvido nos cursos elementares de física. Mesmo com sua inerente simplicidade, o conheci-

mento de física necessário para um entendimento mais aprofundado não é acessível a um estudante iniciante. Da mesma forma, a obtenção de resultados mais precisos e exatos necessita de instrumental de laboratório de alto custo, fato que é incompatível com a realidade da maioria dos laboratórios de ensino.

A Fig. 1 mostra um desenho de um pêndulo tipicamente utilizado nos experimentos. A massa  $m$  é ligeiramente deslocada de sua posição de repouso (vertical) e solta em seguida, fazendo com que o pêndulo entre em movimento oscilatório. Com auxílio de um cronômetro pode-se determinar o período de oscilação do pêndulo. Em práticas de laboratório mais elaboradas utilizam-se sistemas opto-eletrônicos para determinar o período de oscilação desses pêndulos.

A análise dos resultados a partir deste procedimento é severamente simplificada. O modelo matemático empregado para estudar o pêndulo, encontra-se fartamente apresentado nas bibliografias usadas no ensino da física básica [2-5]. Este modelo, essencialmente, exclui o

<sup>1</sup>E-mail: arnold@ft.unicamp.br.

efeito das forças de amortecimento, despreza a massa do fio e estabelece que as amplitudes de oscilação da massa se restringem às oscilações em ângulos pequenos. Na Fig. 1 também são mostradas as forças consideradas para análise do problema do pêndulo em disciplinas introdutórias dos cursos de física.

A inclusão da massa do fio no modelo do pêndulo foi estudada em [6, 7]. Uma interessante discussão teórica sobre a metodologia de cálculo do período de oscilação é feita em [8]. Os efeitos do amortecimento no pêndulo foram explorados em [9-13]. Miller associou o amortecimento do pêndulo a efeitos proporcionais ao quadrado da velocidade [9]. As análises de Crawford [10] estabeleceram uma dependência entre amortecimento e velocidade com uma potência não inteira (1,94) que, fisicamente, apresenta algumas objeções. Nelson e Olsson [13] realizaram uma ampla discussão do pêndulo simples e analisaram extensivamente os diversos fatores que influenciam no comportamento do mesmo.

A modelagem do pêndulo simples empregada nos cursos introdutórios de física exclui o amortecimento de suas oscilações, portanto, sua premissa não é correta. Neste trabalho, a proposta é analisar o comportamento das oscilações de um pêndulo simples incluindo os fatores de amortecimento do mesmo e, portanto, focando uma condição mais realista para o ensino da física do pêndulo. Com a intenção de viabilizar uma proposta de ensino, também foram empregados conceitos físicos e ferramenta matemático compatíveis ao conhecimento de estudantes iniciantes e metodologia experimental simples e acessível à maior parte dos laboratórios de ensino.

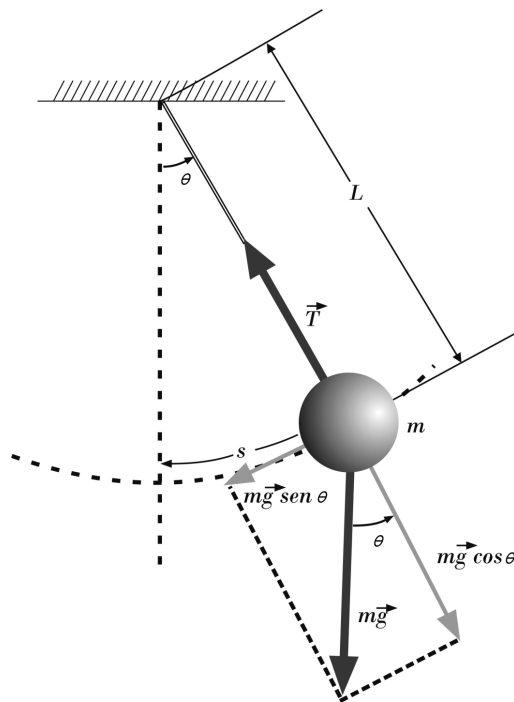


Figura 1 - O pêndulo simples e as forças atuantes consideradas na modelagem simplificada.

Na literatura encontram-se muitos trabalhos que buscam por esta condição mais realista de análise [9-13]. Verifica-se claramente que, apesar da simplicidade do experimento, o tratamento físico e matemático adquire grande complexidade. No entanto, muitos dos trabalhos presentes na literatura se restringem a análises teóricas ou incluem conhecimentos mais avançados da física, descompassados com o nível de conhecimento do estudante.

Neste trabalho é apresentado um experimento com o pêndulo simples que permite a investigação da diminuição da amplitude do movimento oscilatório. Este experimento consiste de um pêndulo simples, similar aos convencionalmente utilizados nos laboratórios de física básica, e de um sensor ultra-sônico que monitora a movimentação do mesmo. A análise dos resultados é feita baseando-se em um modelo mais realístico do que aquele empregado convencionalmente e inclui as taxas de amortecimento. A perda de energia do pêndulo é investigada com o fator de qualidade. O objetivo deste trabalho é apresentar um experimento em que se obtenham interpretações mais abrangentes, estimulantes e reais empregando-se um sistema físico simples e acessível ao estudante.

## 2. Teoria

### 2.1. Modelagem simplificada

Contabilizando as forças atuantes no pêndulo da Fig. 1, pode-se escrever a Eq. (1)

$$mL \frac{d^2\theta}{dt^2} + mg \sin\theta = 0, \quad (1)$$

onde  $\theta$  é a posição horizontal da esfera em m,  $t$  é o tempo em s,  $g$  é a aceleração da gravidade em  $m/s^2$  e  $L$  é o comprimento do fio em m.

Considerando que os ângulos de oscilação são pequenos, pode-se dizer que  $\sin\theta \cong \theta$  e afirmar que o arco da trajetória  $s$  é aproximadamente horizontal. A posição referente ao movimento horizontal da esfera é denotado por  $x$ . Substituindo-se estas aproximações na Eq. (1) obtém-se

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{mg}{L}x = 0. \quad (2)$$

A Eq. (2) estabelece a oscilação do pêndulo como sendo um movimento harmônico e, com isso, pode-se determinar o período da oscilação,  $T$ , pela Eq. (3)

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}, \quad (3)$$

onde  $T_0$  é o período de oscilação em s.

Conforme apontado na seção anterior, este modelo, apesar de fornecer elementos instrutivos e didáticos para determinação da aceleração da gravidade, possui uma premissa falha, pois não considera o efeito das

forças de amortecimento das oscilações. Segundo o modelo utilizado, o pêndulo oscilaria com amplitude fixa e indefinidamente.

## 2.2. A resistência do ar

O amortecimento das oscilações ocorre, principalmente, por conta dos efeitos da resistência do ar sobre as peças que constituem o pêndulo (fio e massa). A Eq. (4) expressa a força de arraste mencionada

$$F = \frac{1}{2} C_D A \rho v^2, \quad (4)$$

onde  $\rho$  é a densidade do fluido onde se processa o deslocamento do corpo em  $\text{kg/m}^3$ ,  $v$  é a velocidade do corpo em  $\text{m/s}$ ,  $A$  é a área de contato do corpo com o fluido em  $\text{m}^2$  e  $C_D$  é uma constante adimensional que depende do número de Reynolds [14].

O número de Reynolds é calculado pela Eq. (5)

$$R = \frac{\rho V r_c}{\eta}, \quad (5)$$

onde  $R$  é o número de Reynolds (adimensional),  $V$  é a velocidade máxima de deslocamento do corpo em  $\text{m/s}$ ,  $r_c$  é a dimensão característica do corpo em  $\text{m}$  e  $\eta$  é a viscosidade do fluido em  $\text{kg/m}\cdot\text{s}$ .

O pêndulo simples é basicamente constituído pelo fio e por uma esfera maciça. A dimensão característica,  $r_c$ , dessas peças para o cálculo do número de Reynolds é o diâmetro. O número de Reynolds muda com a velocidade, assim quando a esfera passa pela posição central da trajetória, ela assume o máximo valor de  $R$ .

O coeficiente  $C_D$  se relaciona com o número de Reynolds por meio de uma lei empírica [13]. A Eq. (6) apresenta esta lei para uma esfera.

$$C_D \cong \frac{24}{R} + \frac{6}{1 + R^{1/2}} + 0,4. \quad (6)$$

Quando o número de Reynolds é menor do que 1, a primeira parcela da Eq. (6),  $(24/R)$ , é o termo dominante na definição de  $C_D$ . Com isso, substituindo  $24/R$  na Eq. (4), verifica-se que a força de arraste é linearmente proporcional à velocidade de deslocamento da esfera. Quando o número de Reynolds for superior a  $10^3$ , a terceira parcela da Eq. (6) deve prevalecer e, com isso, a força de arraste da Eq. (4) torna-se proporcional ao quadrado da velocidade da esfera [15]. A segunda parcela da Eq. (6) representa uma faixa de transição entre os dois limites da relação entre a força de arraste e a velocidade da esfera.

As condições do experimento com o pêndulo estabelecem a dependência com o número de Reynolds que pode fazer com que a força responsável pelo amortecimento das oscilações possa ser linearmente proporcional a velocidade, quadraticamente proporcional ou ainda, que combine ambas as dependências. Isto significa que a força de atrito pode ser escrita conforme a Eq. (7) [13]

$$F_d = bv + c|v|v, \quad (7)$$

onde  $F_d$  é a força de amortecimento em  $\text{N}$ ,  $b$  e  $c$  são constantes em  $\text{kg/s}$  e  $\text{kg/m}$ , respectivamente e  $v = L(d\theta/dt)$  é a velocidade do corpo em  $\text{m/s}$ .

Dessa forma, inserindo essa força na Eq. (1), esta passa a ser escrita como

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{d\theta}{dt} + \frac{c}{m} \left| \frac{d\theta}{dt} \right| \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{L} \sin\theta = 0. \quad (8)$$

A Eq. (8) apresenta alguns inconvenientes. Ela não possui solução exata e o sinal do termo quadrático da velocidade deve ser ajustado a cada meio ciclo para que o termo sempre atue como força de amortecimento. No entanto, como as forças de amortecimento atuam sobre a amplitude, não é necessária a resolução da Eq. (8), mas apenas uma avaliação da modificação da amplitude de oscilação com o tempo. Nelson e Olsson [13] se basearam no teorema do trabalho-energia para obter a uma expressão do ângulo de oscilação em função do tempo. A Eq. (9) apresenta o resultado do cálculo que estes autores realizaram

$$\theta = \frac{\alpha \theta_M e^{-\alpha t}}{[\beta \theta_M (1 - e^{-\alpha t}) + \alpha]}, \quad (9)$$

onde  $\theta_M$  é o ângulo máximo de deslocamento em  $\text{rad}$ ,  $\alpha = (1/2)(b/m)$  em  $\text{s}^{-1}$ ,  $\beta = (4/3)(\omega_0/\pi)(cL/m)$  em  $(\text{rad}\cdot\text{s})^{-1}$ ,  $\omega_0 = (\frac{g}{L})^{1/2}$  é a frequência angular do movimento para o caso ideal (Eq. (1)) em  $\text{rad/s}$  e  $m$  é a massa da esfera do pêndulo em  $\text{kg}$ .

A análise da Eq. (9) resulta em conclusões importantes sobre o amortecimento das oscilações do pêndulo. Um pêndulo simples que descreve uma trajetória curta (portanto, com pequena velocidade de movimentação) e seja constituído por uma esfera de pequeno diâmetro, possui número de Reynolds reduzido. Com isso, a componente de força de arraste proporcional ao quadrado da velocidade deve ser severamente reduzida. Dessa forma, em ambos os casos, quando os valores de  $c$  e, conseqüentemente, de  $\beta$  tendem a zero e quando  $\theta_M$  tende a zero, a Eq. (9) se simplifica e passa a exibir apenas o comportamento de uma exponencial negativa, conforme mostra a Eq. (10)

$$\theta = \theta_M e^{-\alpha t}. \quad (10)$$

O resultado apresentado na Eq. (10) é idêntico ao esperado no tratamento de problemas oscilatórios linearmente amortecidos, tais como em circuitos elétricos RLC ou problemas de massa, mola e atrito. Na teoria da mecânica de fluidos, quanto menores forem a velocidade de oscilação e as dimensões características da esfera do pêndulo, mais reduzido é o valor do número de Reynolds e, conseqüentemente, mais dominantes serão as condições de estabelecimento da dependência

linear da força de arraste com a velocidade. Sob estas condições, pode-se aproximar a força de acordo com a fórmula de Stokes para o arrasto de uma esfera em um fluido com movimento lento e uniforme. Esta fórmula é dada pela Eq. (11)

$$F = -6\pi\eta r v, \quad (11)$$

onde  $r$  é o raio da esfera em m.

### 2.3. Modelagem incluindo força de amortecimento proporcional a velocidade

De acordo com as ponderações feitas na sub-seção anterior, pode-se incluir na Eq. (2) o termo referente a força de amortecimento proporcional a velocidade ( $F = -bv$ )

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + \frac{mg}{L}x = 0, \quad (12)$$

onde

$$b = 6\pi\eta r \quad (13)$$

é chamado de resistência mecânica do movimento.

A resolução da Eq. (12) é conhecida

$$x(t) = \exp(-\alpha t)(A \cos(\omega' t) + B \sin(\omega' t)), \quad (14)$$

onde

$$\alpha = \frac{b}{2m}, \quad (15)$$

$$\omega' = (\omega_0^2 - \alpha^2)^{1/2}. \quad (16)$$

Analogamente a Eq. (10), as amplitudes também são reduzidas exponencialmente

$$x = x_M e^{-\alpha t}, \quad (17)$$

onde  $x_M$  é a máxima amplitude de deslocamento em relação a posição de equilíbrio.

Nesta modelagem, o efeito do amortecimento restringe-se aos efeitos da resistência do ar conforme sua interação com as partes do pêndulo. Os efeitos de empuxo e deslocamento da massa de ar são discutidos na Ref. [13].

### 2.4. O fator de qualidade (fator Q)

A diminuição das amplitudes de oscilação está relacionada a perda da energia mecânica total armazenada no pêndulo. A cada ciclo a energia total é reduzida por conta do efeito das forças de oposição ao movimento. Este balanço de energia pode ser avaliado usando-se o fator de qualidade (fator  $Q$ ). O fator  $Q$  é definido na Eq. (18)

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E}, \quad (18)$$

onde  $E$  é a energia total armazenada e  $\Delta E$  é a energia dissipada por ciclo.

Em [16] é apresentada uma discussão sobre o fator  $Q$  e apresentada uma forma de determinação do mesmo baseada na ressonância do sistema e nas suas frequências de potência média. Neste caso a definição do fator  $Q$  é dada pela Eq. (19)

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_1 - \omega_2}, \quad (19)$$

onde  $\omega_1$  e  $\omega_2$  são as frequências de potência média inferior e superior à ressonância, respectivamente.

Tomando-se a Eq. (19) e seguindo o procedimento apresentado em [16], obtém-se a Eq. (20) que é usada para determinação do fator  $Q$  neste trabalho

$$Q = \frac{\omega_0 m}{b}. \quad (20)$$

## 3. Metodologia experimental

A Fig. 2 mostra a disposição do pêndulo e dos instrumentos utilizados para a coleta de informações. Os materiais empregados no experimento são: o pêndulo simples, o sensor ultra-sônico e o computador. A condução do processo experimental e a escolha dos materiais componentes do sistema devem ser cuidadosas. Na Ref. [17] encontra-se uma valiosa discussão sobre os erros envolvidos no experimento com pêndulos.

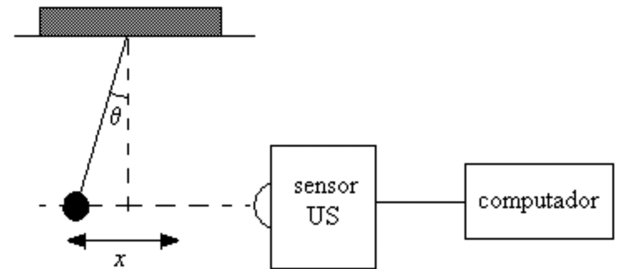


Figura 2 - Disposição experimental do sistema.

Um pêndulo simples similar ao mostrado na Fig. 1 foi montado. Foi utilizado um fio de nylon com densidade linear de 0,555 g/m. Uma das pontas desse fio foi presa no teto de uma sala com auxílio de uma garra jacaré, a outra ponta foi fixada em um corpo esférico. A esfera foi deslocada manualmente da posição de repouso a uma distância aproximada de 10 cm, medida pela projeção da mesma sobre o plano horizontal. Neste caso, o ângulo de deslocamento é pequeno e a aproximação  $\sin \theta \cong \theta$  é aceitável. Em seguida, soltando-a cuidadosamente, esta entra em oscilação decrescendo um movimento, aproximadamente, horizontal. As ações de correntes de ar e de forças laterais podem alterar este quadro fazendo com que a trajetória do pêndulo adquira forma elíptica. Procurou-se realizar os experimentos em locais onde os efeitos do deslocamento do ar podiam ser minimizados. Para verificar um

possível desvio de trajetória, junto ao ponto de fixação do fio do pêndulo no teto, foi colocada um lâmpada cuja luz projetou a sombra da esfera em uma plataforma situada em um plano perpendicular ao alinhamento do fio com o pêndulo em repouso. Nesta plataforma foi desenhado um retângulo com marcações dos limites de trajetória. Se a sombra ultrapassasse o limite imposto, o experimento era cancelado e um novo procedimento era realizado. A limitação da trajetória foi imposta por uma elipse de excentricidade sempre superior a 0,95.

A leitura da posição da esfera do pêndulo foi realizada por um sensor ultra-sônico da marca GoMotion fabricado pela Vernier. Este sensor foi posicionado alinhado com a direção horizontal de movimentação do pêndulo. Este sensor é constituído por uma membrana de PVDF (Fluoreto de Polivinilideno) e por circuitos eletrônicos capazes de chavear o elemento transdutor nos modos de transmissão e recepção. No modo transmissão, a membrana de PVDF é excitada por sinais elétricos e converte energia elétrica em energia acústica. No modo recepção, ondas incidentes sobre a membrana são convertidas em sinais elétricos.

Quando o transmissor é excitado por pulsos de alta tensão elétrica, são geradas ondas acústicas que se projetam sobre a massa do pêndulo. Parte da energia acústica presente nas ondas em cada disparo realizado retorna, por conta da reflexão na massa do pêndulo, ao sensor ultra-sônico. Após a excitação elétrica do transdutor, por meio de um processo eletrônico interno, este se converte em uma unidade receptora e, ao receber as ondas refletidas pela massa do pêndulo, converte-as em sinais elétricos.

O sensor utilizado possui um circuito eletrônico que processa a informação recebida e a transfere para um computador, via comunicação USB. Por meio de um programa de computador, os sinais recebidos pelo sensor são armazenados em um arquivo que associa cada disparo realizado com a posição e a velocidade da massa do pêndulo. A posição é aferida com um erro de  $\pm 1,0$  mm.

Os pêndulos utilizados nos experimentos foram construídos e colocados em oscilação de modo a atender as condições que geram a simplificação exibida na Eq. (10). Foram usadas três esferas diferentes para se construir os pêndulos. A primeira, denominada esfera A, é tipicamente usada em “mouses” de computadores e possui massa de  $31,244 \pm 0,001$  g. A segunda, esfera B, a massa é de  $33,809 \pm 0,001$  g. A terceira, esfera C, foi uma bola de jogo de sinuca, a massa é de  $95,181 \pm 0,001$  g. Em todos os casos as massas foram determinadas em uma balança eletrônica da marca Marconi, modelo AL500C. Os diâmetros das esferas A, B e C são de  $2,22 \pm 0,01$  cm,  $5,55 \pm 0,01$  cm e  $5,00 \pm 0,01$  cm, respectivamente. O comprimento do fio foi medido entre a garra de fixação e o centro da esfera utilizando-se uma trena. O diâmetro do fio é de  $0,45 \pm 0,05$  mm. Os comprimentos utilizados nos experimentos foram de

1,0, 1,5, 2,0 e 2,5 m com tolerância de  $\pm 1,0$  mm.

A partir das dimensões características do fio e da esfera é possível determinar o máximo valor do número de Reynolds usando-se a Eq. (5). Este valor máximo foi estimado pela máxima velocidade medida nos experimentos.

Para cada comprimento de fio e para cada esfera foram realizados 5 experimentos com o pêndulo construído. Em cada experimento o sensor foi acionado após 5 ciclos do início das oscilações do pêndulo.

O sensor foi posicionado a 25,0 cm da posição de repouso do pêndulo. Os disparos foram feitos a cada 50 ms. Com auxílio da Eq. (1) é assegurado que, com os comprimentos de fio utilizados (entre 1,0 e 2,5 m), os períodos de oscilação dos pêndulos (entre 2,0 e 3,2 s) são bem maiores que o intervalo de tempo entre os disparos do transdutor. Assim, é possível garantir que a reconstrução eletrônica do movimento do pêndulo é feita a partir de um número considerável e suficiente de disparos do transdutor.

Os dados referentes a cada experimento foram armazenados em arquivos. Estes dados foram usados em um programa, escrito em Matlab, que selecionou os primeiros 45 valores de máxima amplitude (máximo ângulo de oscilação). Os dados experimentais foram ajustados aproximando-se a curva da Eq. (17). Para tal, recorreu-se a um toolbox do Matlab, encontrado livremente na internet, denominado Ezyfit [18]. Dessa forma é possível encontrar os valores de  $x_M$  e  $\alpha$ , da Eq. (17), ajustados aos dados experimentais.

Com os valores de  $\alpha$ , é possível determinar o fator  $Q$  usando a Eq. (20).

## 4. Resultados

Em todos os pêndulos experimentados não foi verificada variação significativa do período de oscilação. A maior velocidade detectada de movimentação do pêndulo foi de 29,0 m/s, para um pêndulo com comprimento de 1,0 m.

A densidade ( $\rho$ ), a viscosidade ( $\eta$ ) do ar e a aceleração da gravidade ( $g$ ) são de  $1,171$  kg/m<sup>3</sup>,  $1,853 \times 10^{-5}$  Pa.s e  $9,65$  m/s<sup>2</sup>, respectivamente, obtidas de tabelas apropriadas. Com isso, pela Eq. (5), os valores máximos do número de Reynolds para o fio e para as esferas A, B e C foram de 8,2, 403,2 e 474,0, respectivamente.

A Fig. 3 ilustra um exemplo de dados experimentais obtidos com o sensor ultra-sônico montado conforme o esquemático da Fig. 2. Como o movimento da massa do pêndulo é, aproximadamente, horizontal, o sensor capta distâncias da esfera e os armazena como distância em relação a sua posição. Portanto, a Fig. 3 apresenta o gráfico de posição da esfera em relação ao tempo.

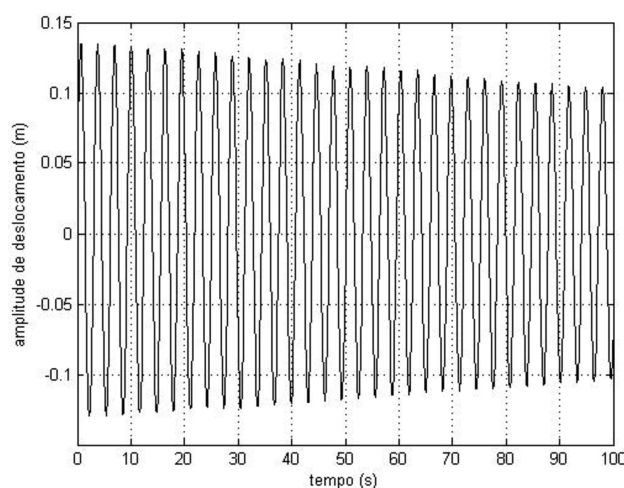


Figura 3 - Exemplo de resultado obtido com o sensor ultra-sônico para um pêndulo com comprimento de fio de 2,5 m. Gráfico de posição horizontal em função do tempo. Distância do sensor já subtraída.

Na Tabela 1 são apresentados os valores médios de  $\alpha$ , referentes a média aritmética de 5 experimentos com cada pêndulo.

Tabela 1 - Valores de  $\alpha$  ( $s^{-1} \times 10^{-3}$ ) obtido com o ajuste da função da Eq. (9) aos pontos experimentais.

Comprimento do fio do pêndulo (m)	Esfera A	Esfera B	Esfera C
1,0	-2,16	-6,51	-1,84
1,5	-2,13	-6,30	-1,52
2,0	-2,41	-5,43	-1,64
2,5	-2,82	-5,90	-1,64

A análise residual realizada pelo próprio programa Ezyfit mostrou que todas as curvas de ajuste determinadas apresentaram correlação superior a 99% em relação aos dados experimentais.

Com as médias aritméticas dos valores das constantes de amortecimento ( $\alpha$ ) de cada esfera e usando a Eq. (15) são calculados os valores de  $b$  em ( $kg/s \times 10^{-4}$ ). Estes valores são: 1,49, 4,08 e 1,26, para as esferas A, B e C, respectivamente

Da Eq. (20) determinam-se os valores dos fatores  $Q$  (erro de  $\pm 0,1$ ) de cada pêndulo que são apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 - Valores médios do fator  $Q$  de cada pêndulo.

Comprimento (m)	Esfera A	Esfera B	Esfera C
1,0	651,4	257,4	935,7
1,5	531,9	210,2	764,0
2,0	460,6	182,0	661,6
2,5	412,0	162,8	591,8

## 5. Discussão

No presente experimento, a inserção de um sensor ultra-sônico no processo experimental amplia a possibilidade de investigação do pêndulo, pois se pode considerar a

diminuição das amplitudes com erro previsto pelo fabricante do sensor. O custo do sensor utilizado é da ordem de 100 dólares. Em termos de um investimento para laboratório de ensino, este custo é minimizado, pois o mesmo sensor também pode ser empregado em outros experimentos de física.

Não foi avaliado se o período sofre alterações com a amplitude. A previsão teórica da proporcionalidade entre o período e a amplitude não pode ser registrada neste experimento. Tal verificação deve ser observada utilizando-se instrumental de maior precisão. Este instrumental, certamente, apresenta custos bem mais elevados e não condizentes com a realidade de investimento para um laboratório de ensino de física.

A princípio, foram consideradas duas forças como responsáveis pela diminuição das oscilações. Uma das forças é proporcional à velocidade ( $bv$ ) e outra ao quadrado da mesma ( $cv^2$ ). Segundo a teoria da mecânica dos fluidos a prevalência de uma ou de outra depende do número de Reynolds [15]. Foram calculados os números de Reynolds máximos de cada pêndulo. Nas trajetórias investigadas há predominância de valores reduzidos de  $R$  (nunca superam 500), portanto a dependência linear da força em relação a velocidade deve prevalecer.

Pode-se verificar a partir das definições de  $\alpha$  e  $\beta$  e com as dimensões de pêndulo adotadas que, se os valores numéricos de  $b$  e  $c$  são próximos,  $\alpha$  e  $\beta$  são de mesma ordem. Nestas condições e com baixas amplitudes de oscilação (valor máximo de cerca de 0,1 rad), a Eq. (9) é aproximada pela exponencial da Eq. (10).

Isto significa que, nas condições de desenvolvimento do experimento deste trabalho, a modelagem baseada em uma força opoitor a ao movimento linearmente proporcional a velocidade de oscilação é adequada. Do ponto de vista do ensino, a experiência com o pêndulo nas condições propostas neste trabalho traz novos elementos que podem ser trabalhados pelo professor. Com a inserção do amortecimento na análise do movimento do pêndulo se agregam novos conceitos da física, como o próprio amortecimento e suas funções matemáticas características, o fator de qualidade e elementos de mecânica de fluidos. Adicionalmente, o tratamento matemático do problema pode ser ensinado em um exercício em conjunto com a disciplina cálculo numérico [19].

Com os resultados experimentais não foi possível determinar a dependência da constante de amortecimento  $\alpha$  em relação ao comprimento do pêndulo. Foram obtidos valores de  $\alpha$  relacionados com a massa e área de superfície das esferas empregadas.

As esferas A e B apresentam massas próximas, mas a constante de amortecimento  $\alpha$  da esfera B é aproximadamente 2,5 vezes maior que a de A. A razão das superfícies da esfera B em relação a A é de aproximadamente 6,4. Portanto, pode-se justificar o maior amortecimento de B pelo fato de esta possuir área de superfície de contato com o ar superior. O coeficiente  $b$

está relacionado diretamente relacionado ao número de Reynolds em que a dimensão efetiva (no caso os raios das esferas) é diretamente proporcional às forças de arraste e, portanto, contribuem para o decaimento das oscilações.

Também, de acordo, com o modelo utilizado, verificou-se que a constante de amortecimento da esfera B é cerca de 3,6 vezes maior que a da esfera C. Estas esferas apresentam diâmetros próximos, mas a massa de C é de 2,8 vezes maior que a de B, portanto, fica evidenciada a relação inversa entre constante de amortecimento e massa.

O fator  $Q$  expresso na Eq. (20), indica uma relação entre a capacidade de armazenamento de energia e a resistência mecânica do sistema. Isto é similar ao que acontece com circuitos RLC, onde a definição de fator  $Q$  relaciona uma reatância com a resistência elétrica. No caso do pêndulo, verifica-se que pêndulos com esferas de massa elevada e comprimento curtos devem exibir maior capacidade de acúmulo de energia. Por outro lado, a resistência mecânica deve ser menor para pêndulos com esferas com pouca superfície de contato. Portanto, os resultados apresentados na Tabela 2 também estão em acordo com o esperado, pois os valores mais elevados de  $Q$  foram obtidos com o pêndulo C e em comprimentos inferiores.

## 6. Conclusões

Nas condições impostas ao experimento, o efeito da força de amortecimento proporcional ao quadrado da velocidade não é significativo. Os ajustes das curvas experimentais mostraram que o modelo escolhido, com força de amortecimento linearmente proporcional à velocidade, é adequado quando se consideram as restrições impostas nos experimentos apresentados neste trabalho.

O instrumental para realização do experimento torna-se mais oneroso com a inclusão de um sensor ultra-sônico (valor estimado em 100 dólares) e de um computador, mas permite a realização do experimento do pêndulo com estimativa mais apurada dos erros experimentais e maior volume de informações. Além disso, a simplicidade de realização do experimento também torna sua compreensão acessível aos alunos dos primeiros semestres dos cursos de graduação. Adicionalmente, o experimento também permite que conceitos sobre perda de energia ( $\tan \delta = 1/Q$ ) possam ser

introduzidos sob o foco de um sistema mecânico e sem maiores complicações.

A modelagem apresentada é compatível com a interpretação física e o manejo matemático de estudantes dos cursos introdutórios e o experimento desenvolvido contribui para uma avaliação mais abrangente e realística do comportamento do pêndulo.

## Referências

- [1] C. Gauld, *Science & Education* **13**, 811 (2004).
- [2] D. Halliday, R. Resnick e K. Krane, *Física* (LTC, Rio de Janeiro, 2002), v. 2, 5ª ed.
- [3] F.W. Sears e M.W. Zemansky, *Física* (LTC, Rio de Janeiro, 1994), v. 2.
- [4] M.S. Alonso e E.S. Finn, *Física* (Editora Edgar Blucher, São Paulo, 1972), v. 2.
- [5] C. Kittel, W.D. Knight e M.A. Ruderman, *Curso de Física de Berkeley - Mecânica* (Editora Edgar Blucher, São Paulo, 1970), v. 1.
- [6] H.L. Armstrong, *Am. J. Phys.* **44**, 564 (1976).
- [7] A.J. Palangana e P.R.B. Pedreira, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **17**, 215 (1995).
- [8] C.G. Carvalhaes e P. Suppes, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **31**, 2701 (2009).
- [9] B.J. Miller, *Am. J. Phys.* **42**, 298 (1974).
- [10] F. Crawford, *Am. J. Phys.* **43**, 276 (1975).
- [11] P.T. Squire, *Am. J. Phys.* **54**, 984 (1986).
- [12] V.K. Gupta, G. Shanker and N.K. Sharma, *Am. J. Phys.* **54**, 619 (1986).
- [13] R.A. Nelson and M.G. Olsson, *Am. J. Phys.* **54**, 112 (1986).
- [14] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Fluid Mechanics* (Pergamon Press, Oxford, 1987), 2<sup>nd</sup> ed.
- [15] J.K. Vennard e R.L. Street, *Elementos de Mecânica dos Fluidos* (Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1978).
- [16] L. Kinsler, A. Frey, A. Coppens and J. Sanders, *Fundamentals of Acoustics* (John Wiley & Sons, New York, 2000), 4<sup>th</sup> ed.
- [17] C. Medina, S. Velazco e J. Salinas, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **24**, 254 (2002).
- [18] <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/10176>, acessado em 30/9/2009.
- [19] M.A.C. Ruggiero e V.L.R. Lopes, *Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais* (Makron Books, São Paulo, 1988), 2ª ed.