

Movimento browniano: uma proposta do uso das novas tecnologias no ensino de física

(*Brownian motion: a proposal of using new technologies in Physics teaching*)

Julves S. Figueira¹

Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, PR, Brazil

Recebido em 4/1/2011; Aceito em 20/8/2011; Publicado em 1/2/2011

A partir de uma breve descrição do movimento browniano analisamos dois vídeos encontrados na rede. Com o *software* de análise de vídeos e modelagem *Tracker* é determinado o deslocamento quadrático médio das partículas brownianas. Das medidas, determina-se o número de Avogadro e discute-se os resultados encontrados. Ao longo do trabalho são utilizados vídeos de partículas brownianas em suspensão na água e softwares livres, ambos disponíveis na *web*.

Palavras-chave: Einstein, tecnologias da educação, movimento browniano, Boltzmann, análise de vídeos, tracker.

From a brief description of Brownian motion we analyzed two videos found on the web. With the software of video analysis and Tracker modeling, it was determined the mean square displacement of Brownian particles. From the measures, it was determined the number of Avogadro and discussed the results. Throughout the work, videos of Brownian particles suspended in water and free softwares were used, both available on the web.

Keywords: Einstein, education technologies, Brownian motion, Boltzmann constant, image processing, Avogadro, tracker.

1. Introdução

O uso de microcomputadores por nossos alunos cresceu de forma considerável nos últimos anos. Este crescimento percebe-se no dia-a-dia de nossas universidades e escolas de Ensino Médio. Nos intervalos, pequenos grupos com seus aparelhos, ouvem música, assistem a filmes ou jogam nos corredores e pátios. Porém, nas atividades em sala de aula, apesar de existirem propostas, poucos profissionais utilizam o microcomputador como uma ferramenta de ensino-aprendizagem. Nosso objetivo envolve a pesquisa e difusão das novas tecnologias educacionais aliadas, na melhoria do ensino de física. Essas ferramentas educacionais permitem que professor e aluno desenvolvam experimentos significativos com qualidade e baixo custo, proporcionando uma aprendizagem significativa efetiva dos conceitos físicos [1].

Uma das ferramentas utilizadas neste trabalho é o software educacional de análise de vídeos e modelagem *Tracker* desenvolvido por Douglas Brown [2]. O programa é parte do projeto *Open Source Physics*, cujo objetivo é o desenvolvimento de programas com

código aberto e licença *GPL*² voltados ao ensino-aprendizagem de física. O aplicativo pode ser utilizado em três idiomas, entre estes o português é de fácil utilização. Com a ferramenta *Tracker* é possível estudar diferentes tipos de movimentos, a partir de vídeos produzidos com câmeras digitais, *webcams* e computadores pessoais. A posição do objeto é exibida quadro a quadro, possibilitando assim encontrar as sucessivas posições no tempo. O *software* permite também comparar os dados obtidos com um modelo físico definido.

A partir de uma breve descrição do movimento browniano, seção 2, analisamos dois vídeos encontrados na *web*, seção 3. Das medidas, seção 4, determina-se o número de Avogadro e discute-se os resultados encontrados. Ao longo do trabalho foram utilizados vídeos de partículas brownianas em suspensão na água e *softwares* livres, ambos disponíveis na rede.

2. Movimento browniano

Não é o objetivo desta seção descrever o histórico, bem como, as diferentes abordagens da dinâmica do

¹E-mail: figueira@utfpr.edu.br.

²Licença Pública Geral, licença para programas da *Free Software Foundation*.

movimento browniano. Sugere-se ao leitor, consultar neste mesmo periódico os artigos [3, 4]. Podemos citar também, os textos de Nussenzveig [5] e Stachel [6]. Nossa descrição seguirá os passos apresentados na monografia de Isabel C. B. Razia sob a orientação de Borges da Costa [7]. Na construção de um modelo para descrever o movimento browniano deve-se considerar conceitos no campo da mecânica, termodinâmica e estatística. Principalmente as hipóteses básicas da teoria cinética dos gases e seus resultados. Um deles é a equação de estado dos gases ideais, $PV = nRT$, onde n é o número de moles, R é a constante universal dos gases e T a temperatura absoluta, e, o teorema da equipartição da energia, que relaciona para cada grau de liberdade a energia cinética média de uma partícula com a temperatura T e a constante de Boltzmann, $1/2m \langle v^2 \rangle = 3/2KT$.

Um modelo simplificado para descrever o comportamento de uma partícula sujeita a uma força aleatória $f(t)$, resultado dos constantes choques com as moléculas do líquido e, que resultam em uma trajetória completamente ao acaso, é conhecido como caminho aleatório. As variáveis que descrevem as distribuições de probabilidade são deslocamento médio e deslocamento quadrático médio. Para descrever o modelo, caminho aleatório, vamos imaginar uma atividade de sala de aula. Para isso, os alunos podem utilizar uma folha quadriculada com eixos do plano cartesiano, um dado e um pequeno objeto para representar a partícula. Primeiramente, considere que num resultado ímpar no lançamento do dado a partícula desloca-se no sentido positivo, da direção x , e num resultado par, o deslocamento é no sentido negativo. As distâncias entre as linhas de nossa folha quadriculada representam o deslocamento de um passo. No primeiro lançamento, instante de tempo $t = 0$, e considerando que o movimento inicia na origem, com igual probabilidade de ocorrer em ambos sentidos, direção x , pode-se escrever que, a partícula estará na posição

$$x_1 = \pm 1,$$

no segundo lançamento, passo $N = 2$, a posição será

$$x_2 = x_1 \pm 1.$$

Após um lançamento de ordem N , a partícula encontra-se na posição

$$x_N = x_{N-1} \pm 1.$$

O aluno pode verificar facilmente que as probabilidades são iguais, nosso dado não é viciado, resultando um progresso médio nulo, $\langle x_N \rangle = 0$. Porém, quanto em média os deslocamentos finais desviam-se da média? Espera-se que com o aumento do número de passos N , a partícula encontre-se distante da origem à direita ou esquerda do ponto de partida. É mais conveniente encontrar um valor médio positivo, isto é o quadrado da

distância, determinado por

$$\langle (x_N - \langle x_N \rangle)^2 \rangle = \langle x_N^2 \rangle,$$

segue-se então que o valor esperado é

$$\langle x_N^2 \rangle = \langle x_{N-1}^2 \rangle \pm 2\langle x_{N-1} \rangle + 1^2,$$

cujo valor medio esperado, “deslocamento quadrático médio”, resultado de muitas sequencias repetidas é N . Logo $\langle x_N^2 \rangle = N_x$, passos na direção x .

Utilizando o mesmo argumento para ambas direções do plano cartesiano, conclui-se que $\langle y_n^2 \rangle = N_y$. Desta forma, a atividade simulando o movimento browniano com o lançamento de um dado deve ter o seguinte procedimento. Lance o dado uma vez e siga as instruções. Se a face for: 1. a partícula desloca-se um passo no sentido positivo dos x ; 2. desloca-se um passo no sentido negativo dos x ; 3. desloca-se no sentido positivo dos y ; 4. desloca-se no sentido negativo dos y ; 5. não conte passos. Repita o lançamento; 6. não conte passos. Repita o lançamento.

Sendo iguais as probabilidades de lançamento nas direções x e y , temos que após N lançamentos do dado ou de N passos de nossa partícula, espera-se que em média $N_x = N_y = N/2$. Desta forma o deslocamento quadrático médio após N passos será

$$\langle r_N^2 \rangle = \langle x_{N_x}^2 + y_{N_y}^2 \rangle = N_x + N_y = N.$$

A partir do raciocínio acima pode-se substituir o número de passos do passeio aleatório pelo número de colisões da partícula browniana, que é proporcional ao tempo de observação, e obter uma relação entre o deslocamento quadrático médio na direção x e o tempo de observação t

$$\langle x^2 \rangle = 2D t, \quad (1)$$

em que a constante de proporcionalidade D , Eq. (1), chama-se *coeficiente de difusão*. A Eq. (1) foi obtida a partir de um modelo, e com o objetivo de descrever o movimento *browniano*. Desta forma é preciso observar que, construir um modelo para o movimento browniano é partir da hipótese atomística. E, medir o movimento browniano comparando os resultados esperados com os observados é testar a hipótese de que a matéria é feita de átomos, moléculas.

A fim de determinar o *coeficiente de difusão* D em função das propriedades do líquido e da partícula, vamos considerar a dinâmica da partícula browniana de massa m suspensa em um líquido à temperatura T . A cada instante a partícula sofre colisões com as moléculas do líquido. Como não há direção preferencial para o movimento molecular, o número de colisões flutua de forma irregular, resultando uma força $f(t)$, com média zero $\langle f(t) \rangle = 0$. A partícula também está sujeita a uma força de atrito determinada pelo número de moléculas que a partícula encontra no seu caminho. Esta força é função da velocidade e se opõe ao movimento da partícula, αv .

Pela segunda lei de Newton, a dinâmica de movimento da partícula na direção de um dos eixos, proposta por P. Langevin (1908) é

$$m \frac{dv}{dt} = -\alpha v + f(t). \quad (2)$$

O parâmetro α é uma função da viscosidade do fluido, η , e da forma da partícula. Para partículas esféricas de raio a , o coeficiente de atrito α e a viscosidade η são relacionados pela lei de Stokes ($\alpha = 6\pi\eta a$).

A solução da Eq. (2) resulta no coeficiente de difusão $D = kT/\alpha$, que também pode ser escrito como $D = RT/N_A\alpha$, onde R é a constante dos gases e N_A o número de Avogadro.

Assim, vamos escrever o deslocamento quadrático médio em duas dimensões como

$$\langle r^2 \rangle = \frac{4RT}{6\pi N_A \eta a} t. \quad (3)$$

A Fig. 1 ilustra o movimento browniano obtidos com partículas de diâmetros de 0,5 microm em suspensão na água. As medidas das posições x e y foram obtidas com o software *Tracker*.

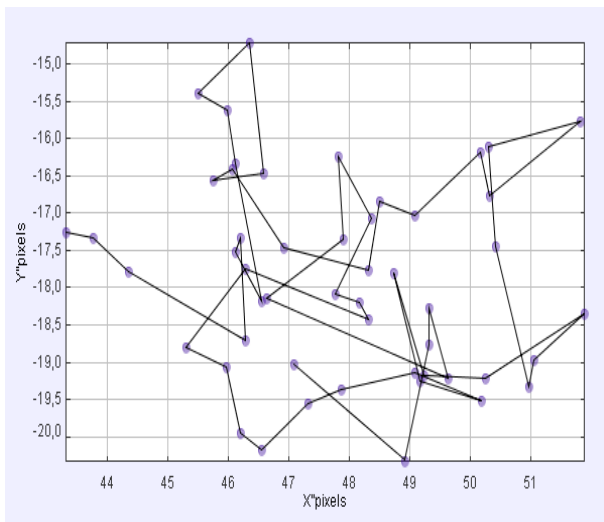


Figura 1 - Posições de partícula browniana com diâmetros de 0,5 microm em suspensão na água.

3. Procedimentos

Conforme exposto na introdução, nossa proposta é utilizar vídeos disponíveis na rede para o estudo do movimento browniano. Após uma busca de vídeos sobre o tema, selecionamos alguns filmes que atendessem os seguintes critérios e assim permitissem a realização de medidas do deslocamento quadrático médio das partículas em suspensão. Um dos requisitos era que esses apresentassem documentação sobre diâmetro das partículas, viscosidade e temperatura do fluido. Em outra faixa de critérios procuraram-se vídeos com duração acima de 10 segundos e que as partículas permanecessem visíveis

neste tempo. Após uma busca rápida na *web*, acessando navegadores de busca, foram encontrados três vídeos com estas características [8–10].

Muitos filmes encontrados na rede não apresentam qualidade, alguns por apresentarem uma grande densidade de partículas, de forma que o constante choque entre estas dificultavam as medidas. Outros por possuírem um número pequeno de partículas e pouco tempo de exposição. Um bom material para análise necessita que as partículas browniana permaneçam visíveis, no foco da câmera, por tempo superior a dez segundos e com número razoável de partículas, além do material ser documentado como temperatura, viscosidade e diâmetro das partículas em suspensão.

Nos próximos parágrafos vamos detalhar algumas questões técnicas e procedimentos necessários para uma análise de um filme usando o software *Tracker*.

Após executar o aplicativo *Tracker*, use a função importar filme. Observe que, o tamanho do filme é medido em pixels (640 x 340, 800 x 600). Quanto maior o número de pixels maior a capacidade de representar detalhes da imagem, significando também o quanto a imagem pode ser ampliada sem perder a qualidade. Outro dado importante que determina a qualidade de um filme é o número de frames por segundo, ou quadros por segundo. Um vídeo de qualidade produzido por máquinas domésticas ou webcam apresenta 30 frames por segundo. Com as informações acima é possível encontrar as sucessivas posições com seus intervalos de tempo ao longo do deslocamento de um objeto. Para determinar o deslocamento em metros, é preciso conhecer a resolução do filme pixels por metro, geralmente fornecido pelo autor do filme. Também pode ser determinada conhecendo o diâmetro médios das partículas (em metros). Por exemplo: um dos filmes analisados, Ref. [3], apresenta tamanho 384 x 284 pixels e tamanho médio das partículas de 1,5 microns. Deslocando o mouse sobre uma das partículas, ao longo do diâmetro, e contando o número de pixels, obtém-se para um total de dez partículas o valor médio de $3,45 \times 10^{-7}$ metros/pixels. A medida do intervalo de tempo entre posições é uma tarefa mais fácil. Com o software é possível “abrir” o filme quadro a quadro. Um filme de 30 frames/segundo, fornece um intervalo entre os quadros de 0,0333 s. Não há necessidade de determinar as posições quadro a quadro, pois o programa apresenta inúmeras facilidades como escolher o intervalo de tempo entre as medidas.

Como sugestão, escolha uma determinada partícula marcando sua posição quadro a quadro, isto é, siga a partícula nos sucessivos intervalos de tempo. Observe que dependendo da qualidade do filme é possível automatizar esta tarefa. O comando *autotracker* se encarrega de determinar as posições ao longos dos quadros. A Fig. 1 ilustra o resultado obtido, a partícula browniana apresenta uma trajetória “quebrada”, resultado do caráter aleatório da força $f(t)$ diferente de partículas

macroscópicas cujo o deslocamento é suave.

4. Resultados experimentais

Na Fig. 2 estão os valores experimentais obtidos a partir de dois vídeos. Os dados relativos ao ajuste da reta $\langle r^2 \rangle_A$, correspondem ao vídeo produzido por Walker [9]. O vídeo tem resolução de 384 x 284 pixels e apresenta 15 quadros/segundo com total de dez segundos. As partículas brownianas são gorduras do leite com diâmetros que variam entre 0,5 e 3 micron em suspensão na água. Na Tabela 1, indicado por água/leite. Com a ferramenta de análise de vídeos *Tracker*, foram determinados as posições de um total de 15 partículas. De posse das posições de cada partícula, x_i e y_i , e com ajuda da planilha do BrOffice foi determinado o deslocamento quadrático para cada partícula segundo

$$[\Delta r_i(t)]^2 = [\Delta x_i(t)]^2 + [\Delta y_i(t)]^2.$$

A média para o total de partículas

$$\langle r^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\Delta r_i(t)]^2.$$

O ajuste do *deslocamento quadrático médio* $\langle r^2 \rangle_B$, Fig. 2, é relativo ao vídeo *Atomic* [10]. O filme foi obtido da página da Princeton University e apresenta partículas brownianas de poliestireno representadas na tabela 1 como água/poliest, com raio de 0,5 micron imersas em água. A resolução é de 640 x 480 pixels com 2,0 quadros/segundo totalizando dez segundos. Utilizando o *software Tracker*, foram determinadas quadro a quadro as posições de 11 partículas.

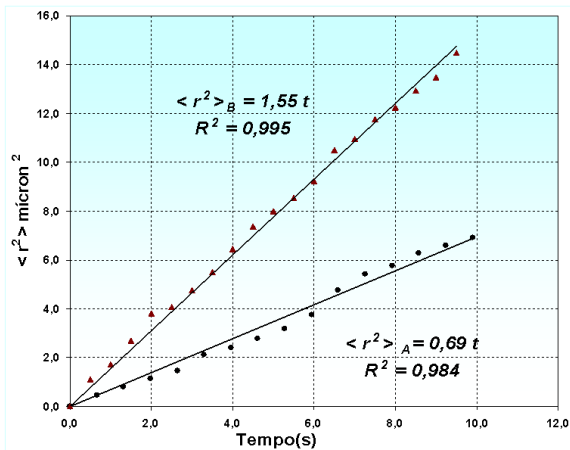


Figura 2 - Deslocamento quadrático médio em função do tempo. O ajuste $\langle r^2 \rangle_A$ são de partículas de gordura do leite e o ajuste $\langle r^2 \rangle_B$, correspondem as esferas de poliestireno.

O vídeo, Ref. [9], apresenta resolução de $3,45 \times 10^{-7}$ metros/pixels e temperatura de 291 K. O de partículas de poliestireno, resolução de $1,64 \times 10^{-7}$ metros/pixel, temperatura 297 K e viscosidade da água de

$\eta = 9,135 \times 10^{-4} \text{ Nsm}^{-2}$. Valores disponibilizados na página do autor.

Podemos observar na Tabela 1 os valores para o coeficiente de difusão D , obtidos do ajuste pelo método dos mínimos quadrados. Os valores do *número de Avogadro* N_A , foram obtidos considerando os valores disponíveis para viscosidade da água, temperatura e diâmetro médio das partículas.

Tabela 1 - Valores experimentais.

Sol/Part	D ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$)	N_A (mol^{-1})	%
Água/poliest.	$1,55 \times 10^{-12}$	$7,40 \times 10^{23}$	23
Água/leite	$6,90 \times 10^{-13}$	$5,32 \times 10^{23}$	11

Cabe uma reflexão neste parágrafo sobre as incertezas envolvidas na atividade proposta. É possível identificar duas fontes de erros. Resultado do processo para determinar as posições e tempo das partículas e as incertezas dos instrumentos de medida; temperatura, viscosidade do líquido e diâmetros das partículas. Das incertezas dos instrumentos, não há indicação de valores pelos autores dos vídeos. Os erros para as medidas da posições x_i e y_i são estatísticos. Isto é, ao utilizarmos o programa de análise de vídeo para as medidas das posições das partículas, os valores sob as mesmas condições tem a mesma probabilidade de ser por excesso ou por falta. E, ao determinar $\langle r^2 \rangle$ as incertezas se compensam para um número grande de medidas. Considerando que nossa proposta tem cunho didático e que não dispomos das incertezas dos instrumentos de medida, pode-se dizer que diferenças são aceitáveis. Na tabela 1, terceira coluna pode-se observar a diferença percentual entre os valores obtidos e o valor conhecido do número de Avogadro.

É possível estimar resultados possíveis para nossas constantes. Considerando valores aproximados de $\eta \simeq 10^{-3} \text{ Nm}^{-2}\text{s}$ na temperatura ambiente, e raio $a \simeq 10^{-6} \text{ m}$, a relação $D = kT/6\pi\eta a$ fornece para o coeficiente de difusão D um valor de $10^{-12} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ o que concorda com os valores determinados.

5. Considerações finais

É fácil perceber, como mostra a Fig. 2, a relação linear entre o deslocamento quadrático médio $\langle r^2 \rangle$ e o tempo t , que está de acordo com modelo teórico. Também é possível verificar no gráfico diferentes coeficientes angulares para as retas. O ajuste dos dados da reta A, apresenta um menor coeficiente do que o ajuste da reta B, como previsto pelo modelo teórico. Naturalmente, pois as partículas brownianas de gordura do leite, diluídas em água, apresentam diâmetros médios maiores que as partículas do ajuste B e um coeficiente de viscosidade do líquido maior que o da água. Isto implica um deslocamento médio $\langle x_i \rangle$ e $\langle y_i \rangle$ menor.

Podemos destacar algumas contribuições deste trabalho. Os *softwares* e vídeos utilizados são livremente

encontrados na *web*. Em um dos vídeos utilizados, Ref. [9], não foi feito pelo autor uma análise do movimento das partículas no líquido. No segundo vídeo, veja Ref. [10], os autores utilizam um software específico para medidas do movimento browniano, obtendo para o número de Avogadro o valor de $6,63 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$. O fato de utilizarem material específico para análise dos dados torna inviável a realização deste experimento em muitas instituições de ensino.

Medidas do deslocamento quadrático médio de partículas brownianas usando vídeo são encontrados em recentes publicações [11, 12]. A atividade exige uma série de cuidados e certa experiência em atividades experimentais de laboratório, além de materiais e equipamentos como partículas selecionadas, microscópios e câmeras digitais que muitos institutos de ensino não possuem.

Nossa proposta foi utilizar os recursos de multimídia disponíveis na rede e ferramentas computacionais livres dirigidas ao ensino-aprendizagem de física. Dependendo da qualidade do vídeo, o professor pode explorar características qualitativas ou quantitativas do movimento browniano. Utilizando o *software Tracker*, o aluno pode localizar em pixels as posições das partículas, Fig. 1, analisando o aspecto caótico do movimento. Verificar a relação linear entre o deslocamento quadrático médio e o tempo exige uma grande quantidade de dados, e o cálculo do coeficiente de difusão e do número de Avogadro necessitam das grandezas que caracterizam as propriedades do fluido e partícula.

Espera-se com esse trabalho que educadores dos primeiros anos do ensino superior sintam-se motivados a usar as novas tecnologias educacionais nas atividades de sala de aula.

Agradecimentos

Dedico este trabalho aos meus ex-professores da UFSM turma de 1983.

Referências

- [1] I.S. Araujo e E.A. Veit, *Rev. Bras. de Pesquisa em Educação em Ciências* **4**,5 (2004).
- [2] D. Brown, *Tracker: Free Video Analysis and Modeling Tool for Physics Education*, disponível em <http://www.cabrillo.edu/dbrown/tracker>.
- [3] Silvio R.A. Salinas, *Revista Brasileira de Ensino Física* **27**, 263 (2005).
- [4] J.M. Silva e J.A.S. Lima, *Revista Brasileira de Ensino Física* **29**, 25 (2007).
- [5] H.M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica* (Ed. Edgard Blücher, São Paulo, 1998).
- [6] J. Stachel, *O Ano Miraculoso de Albert Einstein: Cinco Artigos que Mudaram a Face da Física* (Ed. UFRJ, Rio de Janeiro, 2001).
- [7] I.B.R. Cristina e J.A.T. Borges da Costa, *Explorando o Movimento Browniano em um Curso de Física Básica*. Especialização em Física, UFSM, Santa Maria, 1993.
- [8] <http://www.physics.emory.edu/weekssquishyExperiments.html>, acesso em 20/12/2010.
- [9] <http://www.microscopy-uk.org.uk/dww/home/hombrown.htm>, acesso em 20/12/2010.
- [10] <http://www.cs.princeton.edu/>, acesso em 20/12/2010.
- [11] P. Nakroshis, A. Matthew, J. Legere and C. Smith, *American Journal of Physics* **71**, 568 (2003).
- [12] R.V. Castro, V. Gómez y P.V. Castro, *Lat. Am. J. Phys. Educ.* **2**, 271 (2008).