

Observações sobre as soluções clássicas da equação de Friedmann

(Note on the classical solutions of Friedmann's equation)

Arthur Viglioni¹ e Domingos Soares

Departamento de Física, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil

Recebido em 1/2/2011; Aceito em 21/6/2011; Publicado em 1/12/2011

As representações gráficas dos modelos clássicos de Friedmann frequentemente induzem ao erro, na discussão das idades dos universos-modelo. A maioria dos livros ignora as diferenças conceituais das representações no que diz respeito a estas idades. Discutimos os detalhes das funções que fornecem o fator de escala em termos do tempo, para as soluções da equação de Friedmann, na faixa de tempo que inclui as idades dos universos-modelo. **Palavras-chave:** cosmologia, equação de Friedmann, modelos cosmológicos.

Graphical representations of classical Friedmann's models are often misleading when one considers the age of the universe. Most textbooks disregard conceptual differences in the representations, as far as ages are concerned. We discuss the details of the scale-factor versus time function for Friedmann's solutions in the time range that includes the ages of model universes.

Keywords: cosmology, Friedmann equation, cosmological models.

1. Introdução

Os modelos padrão da cosmologia moderna são descritos por modelos de Friedmann modificados pela inclusão de uma constante cosmológica (veja as seções IV e V da Ref. [1] para uma discussão qualitativa sobre a constante cosmológica e a Ref. [2, p. 403] para um tratamento mais formal). Consequentemente, há sempre interesse em todos os aspectos destes modelos [ver a revisão bastante completa sobre a cosmologia moderna na Ref. [3], especialmente a seção 2, que trata da contribuição do cosmólogo russo Alexander Friedmann (1888-1925)].

Os modelos cosmológicos de Friedmann são soluções das equações de campo de Einstein da teoria da relatividade geral (TRG). Estas soluções foram extremamente simplificadas, do ponto de vista da complexidade matemática, pela adoção do *Princípio Cosmológico*.

O Princípio Cosmológico afirma, basicamente, que toda a matéria do universo está distribuída de forma uniforme em todas as direções. Para a construção dos modelos cosmológicos desprezamos o fato de que a matéria se concentra em estrelas, as estrelas se estruturam em galáxias, e assim por diante, em estruturas cada vez maiores. “Alisamos” tudo, inventamos o “fluido cósmico”, que se distribui de forma homogênea e isotrópica no universo. A densidade de matéria e ener-

gia deste fluido hipotético coincide com a densidade real das estrelas, galáxias e aglomerados.

Assim como o espaço-tempo é curvo no exterior de uma concentração de massa, uma distribuição contínua de matéria também pode ser descrita por um espaço-tempo curvo, o qual se estende e é gerado pelo fluido cósmico. O modelo padrão da cosmologia adota esta perspectiva simplificadora ao utilizar a TRG em sua construção. As soluções de Friedmann descrevem portanto espaços-tempos curvos.

Os modelos de Friedmann são modelos em expansão² [1]. A equação de Friedmann é escrita em termos do chamado “fator de escala”, o qual descreve as mudanças de distâncias em cosmologia. Por exemplo, se o fator de escala dobra, a distância entre duas galáxias quaisquer também dobra. Num universo em expansão o fator de escala está sempre aumentando. As soluções clássicas da equação de Friedmann representam maneiras diferentes de expansão, como veremos a seguir.

Os modelos de Friedmann são completamente descritos pela taxa de variação relativa do fator de escala $R(t)$ — o chamado *parâmetro de Hubble* —, $H_o = \dot{R}/R(t = t_o)$, em que t_o é a idade de um determinado modelo, e pelo parâmetro de densidade $\Omega_o = \rho_o/\rho_{co}$, onde ρ_o é a densidade de massa do modelo e $\rho_{co} = 3H_o^2/8\pi G$ é a densidade do modelo plano, também chamada de *densidade crítica*, ambas para $t = t_o$.

¹E-mail: arthurviglioni@yahoo.com.br.

²Um dos modelos de Friedmann, a saber, o modelo fechado, possui também uma fase de contração.

A equação de Friedmann clássica, *i.e.*, sem a constante cosmológica, é escrita como ([4, cap. 27] e [5, cap. 2])

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{H_o^2 \Omega_o}{R} = -H_o^2(\Omega_o - 1), \quad (1)$$

onde $R(t_o) = 1$, por convenção, para qualquer valor de Ω_o . A solução para o modelo plano é facilmente obtida inserindo-se $\Omega_o = 1$ na Eq. (1)

$$R_{pl}(t) = \left(\frac{t}{t_o}\right)^{2/3}, \quad (2)$$

em que $t_o = 2/(3H_o)$ é a idade do modelo plano. No modelo fechado ($\Omega_o > 1$), a solução é expressada na forma paramétrica ([4, Eqs. (27.24) e (27.26)])

$$R_{fe}(x) = \frac{1}{2} \frac{\Omega_o}{\Omega_o - 1} [1 - \cos(x)], \quad (3)$$

$$t(x) = \frac{1}{2H_o} \frac{\Omega_o}{(\Omega_o - 1)^{3/2}} [x - \sin(x)], \quad (4)$$

onde o parâmetro é $x \geq 0$. Da mesma forma, a solução para o modelo aberto ($\Omega_o < 1$) é dada por

$$R_{ab}(x) = \frac{1}{2} \frac{\Omega_o}{1 - \Omega_o} [\cosh(x) - 1], \quad (5)$$

$$t(x) = \frac{1}{2H_o} \frac{\Omega_o}{(1 - \Omega_o)^{3/2}} [\sinh(x) - x]. \quad (6)$$

Estas soluções para os modelos aberto ($\Omega_o = 0,5$), plano ou crítico ($\Omega_o = 1$) e fechado ($\Omega_o = 2$) estão traçadas na Fig. 1. É importante salientar que a discussão subsequente não depende dos valores de Ω_o escolhidos aqui para os modelos fechado e aberto.

A maior parte dos livros ou artigos qualitativos sobre cosmologia moderna apresentam diagramas semelhantes a este, quando descrevem os modelos de Friedmann. Com raras exceções, eles diferem da nossa Fig. 1 em dois pontos principais. Primeiro, não há eixos quantitativos, sendo estes genericamente rotulados como “fator de escala” e “tempo”. Segundo, as características interessantes que aparecem nos fatores de escala pequenos, os quais correspondem a $R(t) < 2$ na Fig. 1, não são comentadas e muito menos representadas graficamente. Tais diferenças levam a uma compreensão errada para as idades dos modelos, *i.e.*, os tempos correspondentes a $R = 1$.

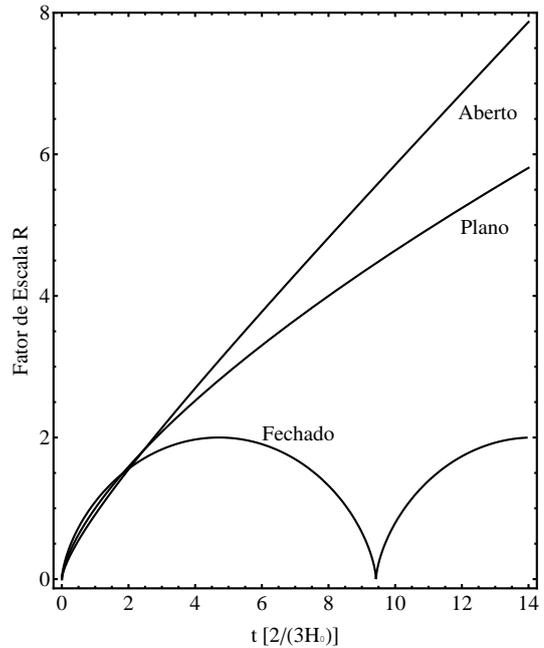


Figura 1 - Modelos de Friedmann aberto ($\Omega_o = 0,5$), plano e fechado ($\Omega_o = 2$). Este gráfico é um exemplo das representações mais comuns. O tempo, nas abscissas, está em unidades de $2/(3H_o)$, a idade do modelo plano. Os detalhes importantes em $R < 2$ estão ausentes na maioria dos livros e textos de divulgação de cosmologia.

Na próxima seção, mostramos porque é importante apresentar um gráfico preciso dos modelos de Friedmann, para um entendimento claro das idades dos modelos. Em seguida, apresentamos uma análise quantitativa das diferenças relativas entre os modelos clássicos de Friedmann como funções do tempo cósmico. A última seção contém as nossas considerações finais.

2. As idades dos universos de Friedmann

As idades dos universos de Friedmann são obtidas fazendo $R = 1$ nas Eqs. (2), (3) e (5). Assim, com ajuda das Eqs. (4) e (6), tem-se as idades dos modelos aberto, plano e fechado como funções do parâmetro de densidade Ω_o . O resultado está traçado na Fig. 2.

A idade do modelo aberto é a maior dentre as soluções clássicas de Friedmann. Isto não está claro quando se examina a Fig. 1, porque a região relevante do fator de escala, *i.e.*, $R(t) \approx 1$, não está apresentada de forma suficientemente detalhada na figura. Este tipo de representação gráfica é predominante na maioria dos livros. Por exemplo, ele é visto em Harrison [6], Fig. 18.6, p. 360, em Carroll e Ostlie [4], Fig. 27.4, p. 1230, em Rindler [2], Fig. 18.2, p. 402, e em Shu [7], Fig. 15.7, p. 362 e Box 15.4, p. 368. Harrison discute as idades, depois de apresentar a Fig. 18.6. Ele chama a atenção do leitor para as diferenças entre os diferentes modelos, mas a conclusão permanece concei-

tualmente inconsistente com o diagrama mostrado na Fig. 18.6. Em Carroll e Ostlie, a região de $R(t)$ pequeno está detalhada como aqui. De fato, eles satisfazem ambas as características desejadas, mencionadas na seção introdutória, mas não discutem a questão da idade. De qualquer forma, estes autores representam uma rara exceção, na literatura de cosmologia, quando o assunto é a representação gráfica das soluções da equação de Friedmann.

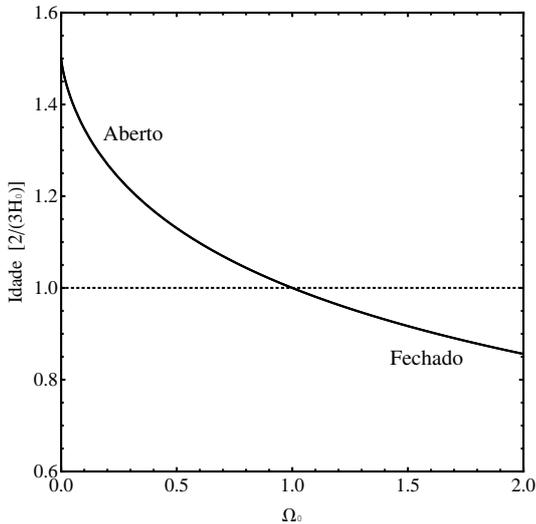


Figura 2 - Idades dos modelos de Friedmann aberto, plano e fechado como funções do parâmetro de densidade Ω_0 . Observe que a idade do modelo aberto é sempre maior que as idades dos modelos plano ($\Omega_0 = 1$) e fechado. O eixo vertical está em unidades da idade do modelo plano, ou seja, $2/(3H_0)$.

Na Fig. 3, traçamos $R(t)$ com a escala apropriada para mostrar as idades dos modelos. A idade do universo, como vimos, é atribuída a $R(t) = 1$. Diferentemente da Fig. 1, está claro agora, que o modelo fechado tem idade menor do que os demais modelos. Em torno de $t = 2$, o modelo fechado realiza duas interseções, a primeira com o modelo plano e a segunda com o modelo aberto. Observe também uma terceira interseção, um pouco mais à frente, do modelo aberto com o plano. Depois das interseções, $R(t)$ se comporta de forma usual, como na Fig. 1.

Se não tomarmos cuidado em olhar a escala numérica do eixo vertical da Fig. 1, as conclusões sobre as idades dos modelos ficam confusas. As coisas podem se tornar piores porque, normalmente, como mencionado antes, os gráficos, em geral, não mostram as escalas numéricas em ambos os eixos.

3. Modelos aberto e fechado versus modelo plano

Para $R(t)$ muito pequeno, o termo do lado direito da equação de Friedmann fica desprezível em comparação com o segundo termo do lado esquerdo. Isso vale

quando $R(t) \ll \Omega_0/|\Omega_0 - 1|$, *i.e.*, $R(t) \ll 1$, para os valores de Ω_0 considerados aqui. A solução da equação diferencial resultante desta aproximação é dada, então, por

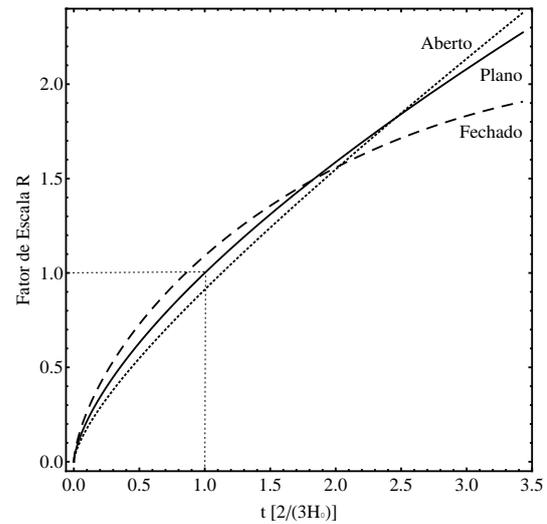


Figura 3 - Modelos de Friedmann aberto ($\Omega_0 = 0,5$), plano e fechado ($\Omega_0 = 2$) mostrados, agora, numa faixa que inclui $R(t) = 1$, no meio do eixo vertical. A idade do modelo plano é mostrada no diagrama, $t_0 = 9$ Ganos, para $H_0 = 72$ km/s Mpc $^{-1}$ [8]. Note (i) que a idade do modelo fechado (aberto) é menor (maior) do que a idade dos outros modelos, e (ii) que de acordo com a Eq. (1), independentemente de Ω_0 , as três curvas possuem a mesma inclinação dR/dt em $R = 1$, ou seja, o mesmo parâmetro de Hubble $\dot{R}/R(t = t_0) = H_0$.

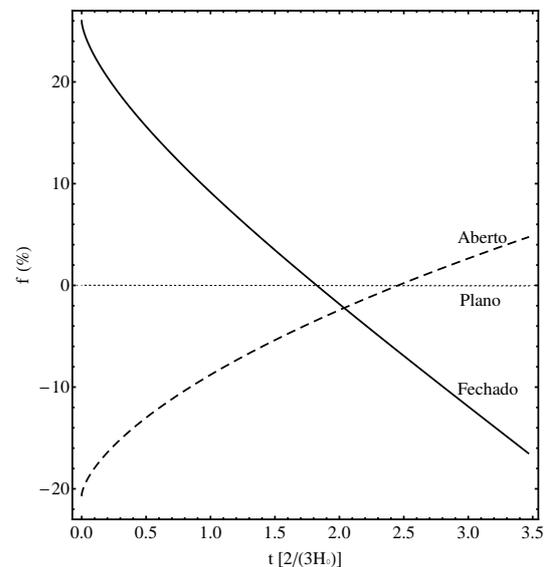


Figura 4 - Diferenças relativas entre os modelos aberto e fechado e o modelo plano como funções do tempo. As diferenças em $t \rightarrow 0$ são facilmente calculadas por meio da Eq. (7). Observe os pontos de interseção com o modelo plano, utilizando a linha horizontal pontilhada.

$$R(t) \cong \Omega_o^{1/3} \left(\frac{t}{t_o} \right)^{2/3} = \Omega_o^{1/3} R_{pl}(t), \quad (7)$$

onde $t_o = 2/(3H_o)$ é a idade do modelo plano. Esta aproximação confirma, para $t \rightarrow 0$, que $R(t)$ é maior para o modelo fechado, como mostrado na Fig. 3.

As diferenças relativas entre os modelos podem ser investigadas pela função porcentagem $f = 100 \times (R - R_{pl})/R_{pl}$. Com ajuda da Eq. (7), tem-se $f = 100 \times (\Omega_o^{1/3} - 1)$, que significa $f = +26\%$, para o modelo fechado, e $f = -21\%$, para o modelo aberto, em $t \approx 0$. Isto mostra claramente que os modelos são muito diferentes ainda no início da história cósmica, sendo as diferenças relativas maiores do que em torno de $t = t_o$ ($|f| \approx 9\%$, para os modelos fechado e aberto).

A Fig. 4 mostra a função exata $f(t)$. Vale a pena notar os pontos de interseção, mencionados na seção 2, os quais ocorrem depois das idades de todos os modelos.

4. Considerações finais

Mostramos que as idades dos universos de Friedmann clássicos são melhores compreendidas, quando as características do fator de escala $R(t)$ são mostradas em detalhe, no intervalo de tempo de $t = 0$ a $t \approx 3 \times 2/(3H_o)$ (Fig. 3).

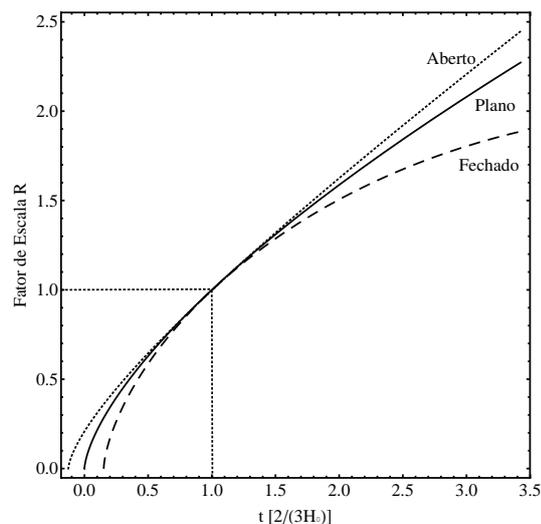


Figura 5 - Os modelos de Friedmann aberto ($\Omega_o = 0,5$), plano e fechado ($\Omega_o = 2$) possuem a mesma inclinação — ou parâmetro de Hubble — em $R = 1$ (hoje). As diferentes idades t_o surgem ao longo do eixo do tempo: $t_o = 1, 0_{-0,14}^{+0,13}$ para o modelo fechado (-) e aberto (+) (ver também Fig. 2).

Este é um caminho alternativo ao adotado por Harrison ([6, Fig. 18.7, p. 360]) e por Linder ([9, Fig. 2.3,

p. 32]). Estes autores escolhem ressaltar o fato de que todos os modelos têm o mesmo parâmetro de Hubble *hoje* ($R = 1$), como mencionado na legenda da nossa Fig. 3. As figuras apresentadas por estes autores tornam-se equivalentes à nossa Fig. 3, ao se mover, nesta última, a curva do modelo fechado para a frente e a do modelo aberto para trás, ao longo do eixo do tempo, até tocarem a curva do modelo plano em $t = 1$ (Fig. 5).

Calculamos as diferenças relativas entre os modelos aberto e fechado e o modelo plano, como funções do tempo (Fig. 4). Estes modelos são quantitativamente diferentes desde o início, passando por pontos de interseção em torno de $t \approx 2 \times 2/(3H_o)$ antes de divergirem em $t \gg 2/(3H_o)$.

Agradecimentos

Gostaríamos de agradecer a discussão bastante proveitosa com Maxwell Rosa, Natália Móller e Osvaldo Assunção. Agradecemos também ao avaliador anônimo pelas sugestões que contribuíram para maior clareza na apresentação deste trabalho.

Referências

- [1] I. Waga, Revista Brasileira de Ensino de Física **22**, 163 (2000).
- [2] W. Rindler, *Relativity - Special, General, and Cosmological* (Oxford University Press, New York, 2006).
- [3] I. Waga, Revista Brasileira de Ensino de Física **27**, 157 (2005).
- [4] B.W. Carroll and D.A. Ostlie, *An Introduction to Modern Astrophysics* (Addison-Wesley Publ. Co., Inc., Reading, 1996).
- [5] R.E. de Souza, *Introdução à Cosmologia* (EDUSP, São Paulo, 2004).
- [6] E. Harrison, *Cosmology - The Science of the Universe* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [7] F.H. Shu, *The Physical Universe - An Introduction to Astronomy* (University Science Books, Mill Valley, 1982).
- [8] Wendy L. Freedman, Barry F. Madore, Brad K. Gibson, Laura Ferrarese, Daniel D. Kelson, Shoko Sakai, Jeremy R. Mould, Robert C. Kennicutt Jr., Holland C. Ford, John A. Graham, John P. Huchra, Shaun M.G. Hughes, Garth D. Illingworth, Lucas M. Macri and Peter B. Stetson, ApJ **553**, 47 (2001).
- [9] E.V. Linder, *First Principles of Cosmology* (Addison-Wesley Publ. Co., Inc., Reading, 1997).