Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 34, n. 1, 1301 (2012)
www.sbfisica.org.br

Artigos Gerais

A derivada funcional de segunda ordem da ação: investigando minimalidade, maximalidade e "ponto" sela

(The functional derivative of second order of the action: exploring minimality, maximality and saddle point)

Wilson Hugo C. Freire[1]

Departamento de Física, Universidade Regional do Cariri, Juazeiro do Norte, CE, Brasil

Recebido em 14/5/2011; Aceito em 1/7/2011; Publicado em 27/2/2012

O presente trabalho tem basicamente dois objetivos. O primeiro é apresentar o problema geral da mecânica lagrangiana e o princípio de Hamilton utilizando, de uma maneira didática, definições matemáticas de derivadas "direcionais"funcionais e pontos críticos ou estacionários de um funcional. O segundo é analisar, através da derivada funcional de segunda ordem, condições em que as soluções de modelos unidimensionais representam "pontos críticos"de mínimo, de sela ou de máximo local do funcional ação e mostrar alguns exemplos.

Palavras-chave: derivadas direcionais funcionais, ponto estacionário de um funcional, equação de Euler-Lagrange, derivada funcional de segunda ordem.

In this article we have two objectives. The first is to present the general problem of the lagrangean mechanics and the Hamilton principle by using mathematical definitions of functional directional derivatives and critical or stationary points of a functional. The second is to analyse, by use of the functional derivative of second order, conditions where the solutions of unidimensionals models represent minimum, of saddle or maximum local points of the action functional and show some examples.

Keywords: Functional directional derivative, stationary point of a functional, Euler-Lagrange equation, functional derivative of second order.

1. Introdução

O princípio de Hamilton é designado por vários autores como princípio de mínima ação [1-4]. Outros se referem a ação estacionária, ou crítica [5-7], mas não discutem a natureza desta criticalidade pois não seguem além da variação funcional de primeira ordem, o que é suficiente apenas para se obter as equações de movimento de Euler-Lagrange e prosseguir com suas aplicações e desmembramentos.

Em 2007, Gray e Taylor [8] apresentaram uma discussão detalhada sobre a possível não minimalidade da ação de um sistema mostrando inclusive que a solução da equação do *oscilador harmônico simples* constitui ponto de *sela* da ação, ao supor que o intervalo $[t_1; t_2]$ da correspondente integral da lagrangiana é maior do que o semiperíodo do oscilador, o que é fisicamente aceitável para possibilitar oscilações neste intervalo de observação.

Eles mostraram também uma "prova intuitiva"[2] de um teorema de Jacobi que afirma que a ação nunca pode ser máxima, embora alguns autores se refiram à ação assumindo um *extremum* [2] admitindo a possibilidade de máximo. Na Ref. [9] deste trabalho, citada também por Gray e Taylor, há de fato uma prova da não maximalidade da ação, mas pressupõe que o potencial contido na lagrangiana é dependente em geral apenas da posição e do tempo. No entanto sabemos que na natureza há potenciais que violam este pressuposto, como é o caso de uma partícula num campo eletromagnético, onde o potencial depende também da velocidade [7, 10-12].

Explorando o caso de potenciais dependentes da velocidade, o presente trabalho mostra, conforme veremos mais adiante, que é possível construir modelos unidimensionais cujas soluções das equações de movimento representam pontos de *máximo* da ação, diferentemente dos casos considerados por Jacobi, Gray e Taylor. Além do mais vamos apresentar, no contexto unidimensional, condições suficientes para assegurar maximalidade ou minimalidade da ação e o caso do ponto de sela referente ao oscilador harmônico. Contudo, vamos ini-

[1] E-mail: wilsonhugo1@gmail.com.

[2] Traduzido da expressão "intuitive proof" dos autores.

cialmente apresentar, de uma forma matematicamente instrutiva, o cálculo de variações e a formulação variacional do problema da mecânica, o princípio de Hamilton e a equação de Euler-Lagrange. Nos restringiremos ao caso de uma partícula em uma dimensão (um grau de liberdade) mas as idéias apresentadas podem ser estendidas naturalmente para outros sistemas.

2. Cálculo de variações e mecânica lagrangiana

O cálculo diferencial usual trata de funções de n variáveis,[3] $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que para cada $x = (x_1, ..., x_n) \in D$ associa um $y = f(x) = f(x_1, ..., x_n)$ em $\mathbb{R}$. Já o cálculo de variações ou cálculo variacional trata de funcionais ou, em outras palavras, é o cálculo diferencial de funcionais. Um funcional (linear ou não) é uma função $A : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ onde $\mathcal{F}$ é um espaço vetorial sobre o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$.

Vamos considerar o chamado funcional ação $A : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ associada a uma partícula em uma dimensão, dado pelas Refs. [6-7] (para uma abordagem mais matemática, veja as Refs. [13, 14])

$$A[x] = \int_0^\tau L(x(t), \dot{x}(t), t) \ dt, \tag{1}$$

definido para todo x no espaço vetorial das funções $\mathcal{F}$ definidas no intervalo[4] $[0, \tau]$ duas vezes continuamente diferenciáveis[5] e, todas, satisfazendo as condições de contorno com ponto inicial x_0 e ponto final x_τ fixos em $\mathbb{R}$. Precisamente

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = \{ & x : [0; \tau] \to \mathbb{R} \ \mid \ x \ \text{ é de classe } C^2, \\ & x(0) = x_0, \ \ x(\tau) = x_\tau \}. \end{aligned}$$

A função $L : \mathbb{R}^2 \times [0; \tau] \to \mathbb{R}$ é a lagrangiana do sistema que será suposta ser também de classe C^2 e associa para cada $(x, \dot{x}, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0; \tau]$ um valor real $L(x, \dot{x}, t)$. A expressão $\dot{x}(t)$ indica a derivada de x em $t \in [0; \tau]$. Assim, para cada função x em $\mathcal{F}$ o funcional ação $A : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ associa um valor real $A[x]$ dado pela integral (1) que depende em geral de todos os valores $x(t)$ da função x.

Problema: Para a partícula cuja ação é dada por (1) a questão é: dentre todas as funções $x : [0; \tau] \to \mathbb{R}$ em $\mathcal{F}$ (funções C^2 e com $x(0) = x_0$ e $x(\tau) = x_\tau$ fixos) qual é aquela que descreve o movimento da partícula?

Princípio de Hamilton: O movimento da partícula é descrito pela função $x \in \mathcal{F}$ que representa o "ponto" crítico ou estacionário[6] da ação A.

A grosso modo isto quer dizer que a partícula deve ter seu movimento descrito por uma função $x(t)$, $t \in [0; \tau]$, em $\mathcal{F}$, tal que a variação (de primeira ordem) do funcional ação nesta função x deve ser zero. Vejamos o significado disto.

Lembremos que no cálculo diferencial usual ([15-17]) dada uma função diferenciável $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dizemos que $x = (x_1, ..., x_n) \in D$ é ponto crítico de f se $\text{grad} f(x) \equiv \nabla f(x) = 0$. Vejamos uma forma equivalente desta definição que se mostrará útil aos propósitos deste trabalho. No cálculo diferencial há um teorema que nos diz que se a função f é diferenciável em x então ela possui derivada em x relativa a qualquer direção $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$ (derivada direcional), a qual é dada por

$$\partial_v f(x) = \lim_{\epsilon \mapsto 0} \frac{f(x + \epsilon v) - f(x)}{\epsilon},$$

onde ϵ é um parâmetro numérico. Pode-se verificar naturalmente que esta definição é equivalente à

$$\partial_v f(x) = \left. \frac{d}{d\epsilon} \left[f(x + \epsilon v) \right] \right|_{\epsilon = 0}, \tag{2}$$

e, tendo em vista a diferenciabilidade de f, segue da regra da cadeia que

$$\partial_v f(x) = v \cdot \nabla f(x). \tag{3}$$

Nestas condições, podemos dizer que $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ é ponto crítico de f se a derivada direcional de f em x é zero para qualquer vetor "diretor" não nulo v de $\mathbb{R}^n$, ou seja, se

$$\partial_v f(x) = 0, \ \ \forall \ \ v \neq 0 \ \text{ em } \ \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

De forma semelhante à Eq. (2) dizemos que a derivada (funcional) da ação $A : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ no "ponto" $x \in \mathcal{F}$ e com relação à "direção" $\eta \in \mathcal{G} \equiv \{X : [0; \tau] \to \mathbb{R} \ \mid \ X \ \text{ é } \ C^2\}$ é dada por [13, 14]

$$D_\eta A[x] = \left. \frac{d}{d\epsilon} \left\{ A[x + \epsilon \eta] \right\} \right|_{\epsilon = 0} = \lim_{\epsilon \mapsto 0} \frac{A[x + \epsilon \eta] - A[x]}{\epsilon}. \tag{5}$$

como no caso de funções de várias variáveis.[7] Observemos que esta equação envolve a expressão $A[x + \epsilon \eta]$, o que requer que $x + \epsilon \eta \in \mathcal{F}$ pois a ação A está definida no espaço $\mathcal{F}$; assim, visto que este é constituído

[3] Não usaremos a notação $\vec{x}$ para o vetor $x = (x_1, ..., x_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

[4] Este intervalo corresponde ao intervalo de tempo de observação, contados a partir do disparo de um cronômetro em $t = 0$; considera-se τ suficientemente grande, compatível com a escala de laboratório. Poderíamos considerar qualquer outro $[t_1; t_2]$, mas não há perda de generalidade com $[0; \tau]$.

[5] As equações de movimento são de segunda ordem, daí a colocação da hipótese da diferenciabilidade C^2.

[6] Aqui a expressão "ponto"é no sentido de elemento de $\mathcal{F}$, portanto uma função.

[7] Temos $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, assim como $D \subset \mathbb{R}^n$. A derivada $D_\eta A[x]$ é também conhecida como derivada de Gateaux [14]. Nos textos clássicos de mecânica é comum o uso da notação $x + \delta x$; além disso se referem à δx como uma pequena variação de x e trabalham com a correspondente variação δA do funcional A, o que é bem didático. Contudo, a justificação matemática para a expressão "pequena variação de x" reside no conceito de derivada (direcional) funcional $D_\eta A[x]$ dado pela expressão (5) onde temos a presença de $x + \epsilon \eta$ no limite com $\epsilon \mapsto 0$, ao invés de $x + \delta x$.

de funções $x : [0;\tau] \to \mathbb{R}$ com extremos fixos, temos $x_0 = x(0) = x(0) + \eta(0)$ e $x_\tau = x(\tau) = x(\tau) + \eta(\tau)$ de onde segue que $\eta(0) = \eta(\tau) = 0$. As funções $\eta \in \mathcal{G}$ que satisfazem estas condições são chamadas de *admissíveis*.

Agora, semelhantemente a Eq. (4), dizemos que $x \in \mathcal{F}$ é ponto estacionário (ou crítico) da ação $A : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ se

$$D_\eta A[x] = 0, \quad \text{para todo} \quad \eta \in \mathcal{G} \quad \text{admissível.} \tag{6}$$

Dessa forma o princípio de Hamilton afirma que o movimento da partícula cuja ação $A : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ é dada por (1) é descrito por uma função $x \in \mathcal{F}$ tal que

$$D_\eta A[x] = \frac{d}{d\epsilon}\left\{A[x + \epsilon\eta]\right\}\bigg|_{\epsilon=0} = 0,$$
$$\text{para todo} \quad \eta \in \mathcal{G} \quad \text{admissível.}$$

Temos, pela Eq. (1),

$$D_\eta A[x] = \frac{d}{d\epsilon}\left[\int_0^\tau L(x(t) + \epsilon\eta(t), \dot{x}(t) + \epsilon\dot{\eta}(t), t) \ \ dt\right]\bigg|_{\epsilon=0}.$$

Derivando sob o sinal de integração e usando a regra de derivação em cadeia [15-17] segue que

$$D_\eta A[x] = \int_0^\tau \left(\frac{\partial L}{\partial x}\eta + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{\eta}\right) dt, \tag{7}$$

em que as derivadas de L são consideradas nos pontos $(x(t), \dot{x}(t), t)$, com $t \in [0;\tau]$. Integrando por partes a integral correspondente à segunda parcela desta equação, usando o teorema fundamental do cálculo e as condições admissíveis para η ($\eta(0) = \eta(\tau) = 0$ que equivalem às condições de contorno $x(0) = x_0$ e $x(\tau) = x_\tau$) temos

$$D_\eta A[x] = \int_0^\tau \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right] \eta \ \ dt. \tag{8}$$

Pelo princípio de Hamilton o movimento da partícula é descrito por $x(t)$, $t \in [0;\tau]$, tal que $D_\eta A[x] = 0$, para todo η admissível de modo que, considerando o lema fundamental do cálculo de variações, [7, 13, 14], podemos escrever

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0, \tag{9}$$

que é a equação de movimento de Euler-Lagrange. Pode-se mostrar sem dificuldade que ela tem a forma

$$F(x, \dot{x}, t)\ddot{x} + G(x, \dot{x}, t)\dot{x} + H(x, \dot{x}, t) = 0,$$

sendo, portanto, uma equação diferencial ordinária de segunda ordem (em geral não linear) em x. Portanto, a função x que descreve o movimento da partícula (ou seja, satisfaz o princípio de Hamilton) é solução da equação de movimento de Euler-Lagrange (com condições de contorno $x(0) = x_0$ e $x(\tau) = x_\tau$).

Considerando a lagrangiana clássica $L = K - U$, onde K é a energia cinética e U é a energia potencial, a equação de Euler-Lagrange pode ser escrita como

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial K}{\partial x} = Q(x, \dot{x}, t),$$

onde

$$Q(x, \dot{x}, t) = -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}}\right)$$

é a chamada força generalizada [10].

3. A derivada funcional de segunda ordem

Para analizar a natureza da criticalidade do "ponto estacionário" $x : [0;\tau] \to \mathbb{R}$ da ação $A : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ dada pela Eq. (1) que descreve o movimento da partícula, vamos considerar a derivada (direcional) funcional de segunda ordem, que explicaremos a seguir.

Lembremos do cálculo diferencial usual que dada uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2 temos, pelo teorema de Taylor

$$f(x+v) = f(x) + (v\cdot\nabla)f(x) + \frac{1}{2!}(v\cdot\nabla)^2 f(x) + r(v), \tag{10}$$

onde $r(v)$ vai à zero mais rápido do que $|v|^2$ no sentido que $\lim_{v\mapsto 0}\{r(v)/|v|^2\} = 0$ [17]. Podemos escrever a expressão (3) de uma forma compacta da seguinte maneira

$$(v\cdot\nabla)f(x) = (\partial_v)f(x) \quad \therefore \quad v\cdot\nabla = \partial_v, \tag{11}$$

de modo que

$$(v\cdot\nabla)^2 = (v\cdot\nabla)(v\cdot\nabla) = \partial_v\partial_v = \partial_v^2. \tag{12}$$

Assim, a expressão de Taylor de segunda ordem (10) pode ser reescrita como

$$f(x+v) = f(x) + \partial_v f(x) + \frac{1}{2!}\partial_v^2 f(x) + r(v). \tag{13}$$

Assim, se $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ é ponto crítico de f então $\partial_v f(x) = 0$ e neste caso a fórmula de Taylor nos permite obter

$$f(x+v) = f(x) + \frac{1}{2}\partial_v^2 f(x) + r(v).$$

Neste caso (detalhes em, p/ ex., Ref. [17]), se existir um disco aberto centrado em x, $C_x \subset D$, tal que $f(x+v) > f(x)$ para todo $x + v \in C_x$ então x é ponto (crítico) de mínimo local de f. Para isto ocorrer é suficiente, pela fórmula de Taylor de segunda ordem, que $\partial_v^2 f(x) > 0$ para todo $v \neq 0$ em $\mathbb{R}^n$, visto que $\lim_{v\mapsto 0}\{r(v)/|v|^2\} = 0$. Analogamente, se ocorrer $f(x+v) < f(x)$ ao invés de $f(x+v) > f(x)$ então x será ponto de máximo local de f e para isto é suficiente que $\partial_v^2 f(x) < 0$ para todo $v \neq 0$ de $\mathbb{R}^n$. Entretanto se $\partial_v^2 f(x) > 0$ para algum v e $\partial_{\tilde{v}}^2 f(x) < 0$ para um $\tilde{v} \neq v$ então x é um ponto crítico de *sela* de f. Nada podemos concluir com o uso da derivada segunda no caso em que $\partial_v^2 f(x) = 0$ para todo $v \neq 0$ em $\mathbb{R}^n$ onde pode ser conveniente (dependendo de certas condições) usar fórmulas de Taylor de ordem superior ou analizar caso a caso.

De volta ao caso da ação $A : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ dada por (1) associada a uma partícula em uma dimensão, os conceitos de máximo local, mínimo local e sela são análogos ao caso de funções $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. A fórmula de Taylor de segunda ordem é análoga à Eq. (13)

$$A[x+\eta] = A[x] + D_\eta A[x] + \frac{1}{2} D_\eta^2 A[x] + R[\eta], \quad (14)$$

onde, considerando a expressão (5) trocando A por $D_\eta A$,

$$D_\eta^2 A[x] = D_\eta \{D_\eta A[x]\} = \left. \frac{d}{d\epsilon} \{D_\eta A[x+\epsilon\eta]\} \right|_{\epsilon=0} . \quad (15)$$

Quando $x : [0;\tau] \to \mathbb{R}$, em $\mathcal{F}$, é "ponto"estacionário da ação A ($D_\eta A[x] = 0$ para todo $\eta \in \mathcal{G}$ admissível), ou seja, satisfaz o princípio de Hamilton, a fórmula de Taylor (14) nos permite notar que [13]:

- se $D_\eta^2 A[x] > 0$ para todo $\eta \in \mathcal{G}$ não identicamente nulo então x é "ponto"de mínimo (local) da ação A;
- se $D_\eta^2 A[x] < 0$ para todo $\eta \in \mathcal{G}$ não identicamente nulo então x é "ponto"de máximo (local) da ação A;
- se $D_\eta^2 A[x] > 0$ para algum $\eta \in \mathcal{G}$ e $D_{\bar\eta}^2[x] < 0$ para $\bar\eta \in \mathcal{G}$, $\eta \neq \bar\eta$, então x é "ponto"de sela da ação A.

Vamos calcular $D_\eta^2 A[x]$ para o funcional ação A dado por (1). Pelas Eqs. (15) e (7)

$$D_\eta^2 A[x] = \frac{d}{d\epsilon} \left\{ \int_0^\tau \left[\eta \frac{\partial L}{\partial x}(x+\epsilon\eta, \dot{x}+\epsilon\dot{\eta}, t) + \dot{\eta} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x+\epsilon\eta, \dot{x}+\epsilon\dot{\eta}, t) \right] dt \right\}_{\epsilon=0} .$$

Conforme procedimento descrito na seção anterior, derivando sob o sinal de integração e usando a regra da cadeia obtemos a *forma quadrática* (em $\eta, \dot{\eta}$)

$$D_\eta^2 A[x] = \int_0^\tau \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}\eta^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}}\eta\dot{\eta} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2}\dot{\eta}^2 \right) dt. \quad (16)$$

Aqui, as derivadas segundas de L são consideradas em $(x, \dot{x}, t)$. Para uma função lagrangiana não relativística $L = K - U$ da forma

$$L(x,\dot{x},t) = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - U(x,\dot{x},t), \quad (17)$$

temos

$$D_\eta^2 A[x] = -\int_0^\tau \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\eta^2 + 2\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \dot{x}}\eta\dot{\eta} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \dot{x}^2} - m \right) \dot{\eta}^2 \right] dt. \quad (18)$$

Vamos considerar inicialmente a classe de modelos em que o termo cruzado em $\eta\dot{\eta}$ da ação é nula. Tal classe é ainda bastante ampla e os potenciais são da forma

$$U(x,\dot{x},t) = V(x,t) + W(\dot{x},t), \quad (19)$$

onde temos a presença da parcela $W(\dot{x},t)$ dependente da velocidade. Neste caso

$$D_\eta^2 A[x] = -\int_0^\tau \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\eta^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \dot{x}^2} - m \right) \dot{\eta}^2 \right] dt. \quad (20)$$

3.1. Modelos que minimizam a ação

Pela Eq. (20) teremos $D_\eta^2 A[x] > 0$ para todo η admissível se, por exemplo, ocorrer

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \leqslant 0, \quad (21)$$

e

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \dot{x}^2} < m, \quad (22)$$

para todo $(x, \dot{x}, t)$. Sob estas condições a solução da equação de Euler-Lagrange minimiza a ação. Em particular isto ocorre para todos os potenciais da forma

$$U = V(x,t) = \alpha(t)x + \beta(t), \quad (23)$$

para o qual W é identicamente nulo. Para os potenciais desta forma temos $\partial_x^2 V = 0$ e $m > \partial_{\dot{x}} W = 0$ em concordância com as Eqs. (21) e (22). A derivada funcional segunda da ação é simplesmente

$$D_\eta^2 A[x] = \int_0^\tau \left[(m)\,\dot{\eta}^2 \right] dt > 0 \quad \text{para todo } \eta \quad \text{admissível.}$$

Alguns exemplos que se enquadram neste caso são: partícula livre ($U = V =$ constante) e partícula em queda livre num campo gravitacional constante ($U = V = \alpha x$, α constante).

Um exemplo interessante, topologicamente equivalente ao do oscilador harmônico simples a ser apresentado mais adiante, é o de um potencial $U(x) = c|x|$ que se enquadra nos casos aqui analisados de mínima da ação, desde que a hipótese da lagrangiana ser C^2 seja trocada por C^2 por partes (ou seccionalmente C^2).[8]

Um outro exemplo de mínima ação é o da partícula livre *relativística*, cuja lagrangiana é [6, 10, 11]

$$L = -mc^2 \left[1 - \left(\frac{\dot{x}}{c} \right)^2 \right]^{1/2} = -\frac{mc^2}{\gamma},$$

onde

$$\gamma = \left[1 - \left(\frac{\dot{x}}{c} \right)^2 \right]^{-1/2} .$$

De fato, por substituição desta lagrangiana na Eq. (16),

$$D_\eta^2 A[x] = m \int_0^\tau \gamma \left[1 + \left(\frac{\dot{x}\gamma}{c} \right)^2 \right] \dot{\eta}^2 dt \quad > \quad 0.$$

[8]A equivalência topológica aqui é no sentido de que o gráfico de $c|x|$ pode ser deformado continuamente no de $(1/2)m\omega^2 x^2$ do oscilador e vice-versa.

3.2. Modelos que maximizam a ação

Para ocorrer maximalidade da ação é suficiente que $D_\eta^2 A[x] < 0$ para qualquer η admissível. Isto, de fato ocorre, se o potencial $U(x, \dot{x}, t) = V(x,t) + W(\dot{x}, t)$ for tal que

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \geqslant 0, \tag{24}$$

e

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \dot{x}^2} > m, \tag{25}$$

para todo $(x, \dot{x}, t)$.

Como exemplo, considere o potencial

$$U(x, \dot{x}, t) = V(x,t) + W(\dot{x}) = [\alpha(t)x + \beta(t)] + \left(\frac{1}{2}\tilde{k}\dot{x}^2 + \frac{1}{12}l\dot{x}^4\right), \quad \tilde{k} > m, \quad l > 0.$$

Visto que $\partial_x^2 V = 0$ e $\partial_{\dot{x}}^2 W = \tilde{k} + l\dot{x}^2 > m$, temos as expressões (24) e (25) satisfeitas e a solução da correspondente equação de Euler-Lagrange *maximiza* a ação.

3.3. Modelo com ponto sela da ação

Existe a possibilidade de que a solução da equação de Euler-Lagrange seja ponto de sela da ação, mesmo no caso em que $U = V(x,t)$ (W identicamente nula), por causa do termo $\partial_x^2 U$ na Eq. (20), que neste caso assume a forma

$$D_\eta^2 A[x] = \int_0^\tau \left[-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\eta^2 + m\dot{\eta}^2\right] dt. \tag{26}$$

Vamos considerar o oscilador harmônico simples, para o qual

$$U(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, \tag{27}$$

de modo que a Eq. (26) torna-se

$$D_\eta^2 A[x] = m\int_0^\tau \left[-\omega^2\eta^2 + \dot{\eta}^2\right] dt. \tag{28}$$

Seja

$$\eta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi t}{\tau}\right), \quad t \in [0;\tau], \tag{29}$$

a qual satisfaz $\eta(0) = \eta(\tau) = 0$ (η admissível). Então, por derivação termo a termo,

$$\dot{\eta} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{n\pi}{\tau}\cos\left(\frac{n\pi t}{\tau}\right). \tag{30}$$

Substituindo as Eqs. (29) e (30) na Eq. (28) e fazendo uma mudança apropriada de variável nas integrais segue que

$$D_\eta^2 A[x] = m\left[-\omega^2\sum_{l,n} a_l a_n \frac{\tau}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{sen}(ly)\mathrm{sen}(ny)dy + \sum_{l,n} a_l a_n \left(\frac{l\pi}{\tau}\right)\left(\frac{n\pi}{\tau}\right)\frac{\tau}{\pi}\int_0^\pi \cos(ly)\cos(ny)dy\right].$$

Usando as relações de ortogonalidade

$$\int_0^\pi \mathrm{sen}(ly)\mathrm{sen}(ny)dy = \int_0^\pi \cos(ly)\cos(ny)dy = \frac{\pi}{2}\delta_{ln}$$

em que δ_{ln} é o delta de Kronecker ($\delta_{nn} = 1$ e $\delta_{ln} = 0$ para $l \neq n$) temos

$$D_\eta^2 A[x] = \frac{m\tau}{2}\sum_n a_n^2\left[n^2\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2 - \omega^2\right]. \tag{31}$$

Notemos que escolhendo um η para o qual $a_1 \neq 0$ e $a_n = 0$ para todo $n > 1$ temos

$$D_\eta^2 A[x] = \frac{m\tau}{2}a_1^2\left[\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2 - \omega^2\right] < 0,$$

quando o tempo τ de observação é maior do que o semiperíodo π/ω do oscilador (o que é fisicamente aceitável).[9] Mas, ainda para este tempo de observação, podemos selecionar um outro η escolhendo um N tal que $a_N \neq 0$, $a_n = 0, \ \forall \ n \neq N$ e com $(N\pi/\tau)^2 > \omega^2$ o que implica em

$$D_\eta^2 A[x] = \frac{m\tau}{2}a_N^2\left[\left(N\frac{\pi}{\tau}\right)^2 - \omega^2\right] > 0.$$

Logo a solução da equação de movimento do *oscilador harmônico simples* é ponto de sela da ação para o tempo de observação τ maior do que o semiperíodo π/ω do oscilador, conforme obtido por Gray e Taylor.

4. Considerações finais

Gray e Taylor mostraram como a ação pode ser mínima ou sela para potenciais dependentes da posição e do tempo e tendo em vista as dimensões das linhas de mundo da partícula em questão. O presente trabalho considerou o caso de potenciais unidimensionais dependentes também da velocidade e apresentou nestes casos condições em que podem ocorrer situações de maximização da ação independentemente dos comprimentos das linhas de mundo, com um formalismo matemático didaticamente instrutivo. Esta abordagem particularmente recupera de maneira direta o resultado de ponto de sela para o oscilador harmônico (obtido por Gray e Taylor). A importância de trabalhos desta natureza é apresentar e ilustrar com certos detalhes o teste da segunda derivada funcional, um tanto ausente nos textos clássicos de mecânica. Além do mais este formalismo pode ser utilizado sem grandes dificuldades formais em outros sistemas, em mais dimensões e em ordens superiores.

[9] Gray e Taylor enquadram este caso numa classificação que designaram como coleção de linhas de mundo suficientemente longas.

Agradecimentos

Agradeço especialmente ao amigo e colega Prof. Dr. Mickel Ponte, do Departamento de Física da Universidade Regional do Cariri - Ceará, pela gentileza de ler todo trabalho, pelas discussões esclarecedoras e por fazer as correções necessárias. Agradeço também ao referido Departamento pelas condições oferecidas para que este trabalho fosse realizado. Agradeço à Prof. Dra. Cicera Nunes do Departamento de Educação da mesma universidade pelas observações de ordem estética.

Referências

[1] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Mechanics* (Butterworth-Heinenann, Oxford, 1993), 3rd ed.

[2] J.V. Jose and E.J. Saletan, *Classical Dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1988).

[3] J.P. Provost, Am. J. Phys. **43**, 774 (1975).

[4] J. Hanc, S. Tuleja and M. Hancova, Am. J. Phys. **71**, 380 (2003).

[5] T.W. Kible and F. Berkshire, *Classical Mechanics* (Imperial College Press, London, 2004), 5th ed.

[6] H. Goldstein, C. Poole and J. Safko, *Classical Mechanics* (Addisson Wesley, New Jersey, 2000), 3rd ed.

[7] Nivaldo A. Lemos, *Mecânica Analítica* (Ed. Livraria da Física, São Paulo, 2004).

[8] C.G. Gray and Edwin F. Taylor, Am. J. Phys. **75**, 5 (2007).

[9] D. Morin, *Introductory Classical Mechanics*, disponível em `www.courses.fas.harvard.edu/~phys16/Textbook/` chap. 5, p. V-8.

[10] J. Barcelos Neto, *Mecânica Newtoniana, Lagrangiana e Hamiltoniana* (Ed. Livraria da Física, São Paulo, 2004).

[11] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (J. Wiley, New York, 1998), 3rd ed.

[12] D.J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics* (Addison Wesley, New Jersey, 1999), 3rd ed.

[13] I. Gelfand and I. Fomin, *Calculus of Variations* (Dover, New York, 2000).

[14] A. Komech, in: *Lecture Notes of The Max Plank Institute for Mathematics in the Sciences*, LN 25/2005, Leipzig, 2005. Apêndice sobre derivadas funcionais direcionais (de Gateaux) e mecânica lagrangiana.

[15] S. Lang, *Calculus of Several Variables* (Springer-Verlag, New York, 1991), 3rd ed.

[16] J. Marsden and A. Tromba, *Vector Calculus* (Freeman, New York, 2003).

[17] Elon L. Lima, *Análise Real* (IMPA, Rio de Janeiro, 2004,) v. 2.