Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 34, n. 1, 1703 (2012)
www.sbfisica.org.br

O fragmentado e tortuoso processo de construção dos conceitos de vetor e escalar

(The fragmented and tortuous process of construction of concepts of vector and scalar)

Osman Rosso Nelson[1] e Ranilson Carneiro Filho

Departamento de Física Teórica e Experimental, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, RN, Brasil
Recebido em 7/4/2011; Aceito em 7/7/2011; Publicado em 27/2/2012

O presente trabalho é uma tentativa de chamar a atenção para a forma inadequada da construção dos conceitos de vetor e escalar apresentados na maioria dos livros de física no nível universitário.
Palavras-chave: espaço vetorial, vetor, escalar.

This paper is an attempt to draw attention to the inappropriate way of constructing the concepts of vector and scalar presented in most books on physics at the university level.
Keywords: vector space, vector, scalar.

1. Introdução

Na apresentação das grandezas relevantes no estudo da física, livros textos básicos ressaltam a existência de dois tipos de grandezas, identificadas como *escalar* e *vetorial.* Em paralelo, disciplinas de natureza mais matemática, no contexto da álgebra linear, oferecem suas contribuições a esses conceitos, que passam a ser retratados, de forma mais abstrata, como os constituintes de estruturas matemáticas conhecidas como *corpo* e *espaço vetorial.*

Com o aumento do nível de dificuldades das disciplinas de física, novos objetos matemáticos, mais elaborados, são apresentados. Dentre eles, os *tensores* marcam presença dando um ar de generalização aos conceitos de escalar e vetor à medida que estes passam a serem vistos como tensores de ordem zero e tensores de ordem um, respectivamente.

O quadro de fragilidade didática que pretendemos expor terá como pano de fundo as definições de vetor que permeiam aquilo que designaremos como abordagens *geométrica*, *abstrata* e *tensorial.*

2. Abordagem geométrica

É no âmbito da mecânica clássica que os estudantes de física e engenharias têm o primeiro contato com os conceitos de vetor e escalar. Em disciplinas com esse conteúdo, vemos ressaltados por diferentes autores [1-5] a necessidade de distinguir as grandezas físicas que são grandezas escalares daquelas designadas por grandezas vetoriais. Nesse contexto, um vetor é definido como sendo uma grandeza com módulo, direção e sentido, que se adicionam segundo a regra do paralelogramo, sendo, portanto, um objeto mais sofisticado que um escalar, uma vez que este último apenas necessita de um número para designar sua intensidade. Surge então uma identificação natural que todo número é um escalar**.** Essas concepções influenciarão de forma dramática os alunos nas disciplinas de física mais avançadas.

2.1. Conflitos com a abordagem geométrica

Uma vez estabelecida, ainda na física clássica, essa visão de escalar e vetor, os conflitos conceituais começam a aparecer. Um exemplo desse conflito ocorre na transição da mecânica clássica para a mecânica relativística, onde a regra de adição de velocidade está em desacordo com a regra do paralelogramo [6]. Como o aluno pode aceitar essa informação e ser coerente com a definição de vetor encontrada nos livros básicos de física? A grandeza velocidade deixou de ser vetor por não obedecer mais à regra do paralelogramo? Esse é um dos conflitos que ele precisa administrar.

3. Abordagem abstrata

Por abordagem abstrata designamos o tratamento oferecido para os conceitos de escalar e vetor dados pela

[1]E-mail: osman@dfte.ufrn.br.

álgebra linear no que concerne a elementos de estruturas matemáticas, como corpo e espaço vetorial, respectivamente. Esse contexto, abordado em livros universitários [7-10], com algumas exceções [10], não relaciona essa abordagem à anteriormente mostrada.

Nessa descrição abstrata, define-se um espaço vetorial a partir de um corpo. Um corpo K é definido como sendo um subconjunto do conjunto C dos números complexos, satisfazendo as seguintes condições:

Se x e y são elementos de K, então $x + y$ e $x\,y$ também são elementos de K;

Se $x \in K$, então $-x$ também é um elemento de K. Ademais, se $x \neq 0$, então x^{-1} é um elemento de K;

Os elementos 0 e 1 são elementos de K.

Define-se um espaço vetorial V sobre o corpo K como sendo um conjunto de elementos (vetores) que podem ser somados entre si e multiplicados por elementos de K (escalares), de maneira que a soma de dois elementos de V é novamente um elemento de V; que o produto de um elemento de V por um elemento de K é um elemento de V; e que as seguintes propriedades são satisfeitas:

1. $\mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{u}$;
2. $(\mathbf{u} + \mathbf{w}) + \mathbf{v} = \mathbf{u} + (\mathbf{w} + \mathbf{v})$;
3. Existe um elemento neutro, vetor nulo, $\mathbf{0}$, em V, tal que $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$;
4. Para cada $\mathbf{v}$ em V, existe um elemento inverso, chamado de negativo de $\mathbf{v}$, $-\mathbf{v}$, em V, tal que $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$;
5. $c\,(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = c\,\mathbf{v} + c\,\mathbf{w}$;
6. $(c + d)\,\mathbf{w} = c\,\mathbf{w} + d\,\mathbf{w}$;
7. $c\,(d\,\mathbf{v}) = (c\,d)\,\mathbf{v}$;
8. $1\,\mathbf{v} = \mathbf{v}$.

Aqui, $\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$ e $\mathbf{v}$ são elementos de V e c, d, elementos de K.

Essa abordagem abstrata revela que diferentes tipos de objetos podem ser vetores, como os já mencionados segmentos de reta orientados, as matrizes, os conjuntos, as funções, as soluções de equações diferenciais etc.

3.1. Conflito com a abordagem abstrata

No primeiro contato do estudante com a idéia geométrica de vetor, não é explicitado que essa forma simples de conceituação de vetor é um caso particular. Na mecânica quântica, por exemplo, o conceito de estado de um sistema é descrito por um vetor (ket), que é um elemento de um espaço vetorial complexo. Portanto, o aluno é forçado a abandonar a idéia geométrica de vetor e investir na concepção abstrata. Normalmente ele incorpora a nova descrição sem perceber que a anterior está contida nessa abordagem.

4. Abordagem tensorial

Uma nova apresentação dos conceitos de escalar e vetor é dada no cálculo tensorial [6-8]. Esse tipo de tratamento é extremamente conveniente na teoria da relatividade, sendo normalmente apresentado de forma dissociada dos anteriores. A partir de regras de transformação, definem-se os tensores de quaisquer ordens. Um caso particular é o tensor de ordem um, chamado de vetor, e o de ordem zero, um escalar. Nesse contexto, um vetor contravariante, a^μ, é um conjunto de n componentes que dependem do sistema de coordenadas, de tal modo que, se as quantidades a^μ descritas no sistema de coordenadas x^μ forem representadas em outro sistema de coordenadas $\tilde{x}^\mu$, elas se transformarão no objeto $\tilde{a}^\mu$, de acordo com a Eq. [1]

$$\tilde{a}^\mu = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha}\, a^\alpha . \tag{1}$$

Analogamente, um vetor covariante, a_μ, é um conjunto de n quantidades que se transformam sob mudanças de coordenadas, como

$$\tilde{a}_\mu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu}\, a_\alpha . \tag{2}$$

No cálculo tensorial, um escalar é qualquer quantidade determinada por um único valor numérico, independente do sistema de coordenada, ou seja, um invariante sob transformações de coordenadas. Naturalmente, expressões como escalar de Lorentz ou escalar de Galileu especificam o tipo de transformação que foi utilizada. No tratamento tensorial, essas quantidades são obtidas a partir do produto interno de um vetor contravariante com um vetor covariante, ou seja, através da contração

$$b_\mu a^\mu = \tilde{b}_\mu \tilde{a}^\mu , \tag{3}$$

para qualquer $x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu$.

4.1. Conflito com a abordagem tensorial

Diferentemente das abordagens anteriores, na representação tensorial, os estudantes percebem que um objeto pode ser um escalar, sob um tipo de transformação, e não o ser, em outro. Ficam surpresos em notar que grandezas como tempo e energia, no contexto da mecânica clássica, foram tratadas como escalares, enquanto na relatividade, elas são componentes de vetores no quadri-espaço (quadri-posição e quadri-momento, respectivamente).

5. Conciliando as abordagens - dissolvendo os conflitos

Quão separadas estão essas abordagens?

A abordagem abstrata permite dizer que um vetor é qualquer objeto matemático que satisfaça às condições estabelecidas na seção 3, para um espaço vetorial. Nesse sentido, um vetor geométrico satisfaz ao conceito de um elemento de um espaço vetorial [10]; portanto, esses objetos podem ser chamados de vetores.

É fundamental dissolver a idéia de que vetores são flechas. É preciso tornar claro que a abordagem abstrata não estabelece como a operação de adição deve ser feita; assim, o fato de velocidades relativísticas não obedecerem à regra do paralelogramo não causará desconforto, pois não importa qual seja a forma de adição, ela precisa apenas satisfazer às propriedades mencionadas na seção 3. Portanto, enquanto na mecânica clássica a regra do paralelogramo é satisfatória, em relatividade especial, a exigência de uma velocidade limite da luz põe por terra esse tipo de adição. Não é que a grandeza tenha deixado de ser vetor, a regra de adição é que mudou para esse novo conjunto de velocidades relativísticas.

Por outro lado, a noção de vetor, retratada através das Eqs. (1) e (2), não se desvia da idéia abstrata de que esses objetos, definidos por suas regras de transformações, satisfazem às condições de serem elementos de um espaço vetorial; por isso são vetores. Analogamente, a Eq. (3) permite obter números satisfazendo às condições dadas na definição de um corpo, sendo assim escalares. Na abordagem abstrata, quando se afirma que um elemento pertence a um corpo, não é preciso dizer como o corpo é construído, apenas é dito que o elemento é de um corpo.

6. Conclusões

A abordagem fragmentada dos conceitos de escalar e vetor, vista nas disciplinas dos cursos de física, dificulta a apropriação devida desses elementos. Na apresentação do conceito de vetor geométrico, uma pequena atitude poderia fazer a diferença para um entendimento mais amplo, sinalizando para o aspecto particular dessa abordagem e a existência de abordagens mais complexas que resumidamente podem ser apresentadas:

1) abordagem abstrata: um vetor é qualquer elemento de um espaço vetorial e um escalar, um elemento de um corpo;

2) abordagem tensorial: relacionada com as mudanças dos objetos matemáticos sujeitos às transformações gerais de coordenadas, permitindo diferenciar um vetor de um escalar por regras de transformações.

Um exemplo ilustrativo é a mudança das componentes de um vetor e a invariância do módulo deste vetor quando o sistema de coordenadas sofre uma rotação. Observar-se-ia aqui que entes matemáticos, invariantes sob determinado tipo de transformação, são chamados de escalares (portanto, elementos de um corpo). Em contrapartida, as mudanças das componentes podem ser descritas pelas Eqs. (1) e (2) e, por satisfazerem às propriedades dos elementos de diferentes espaços vetoriais, são designadas de vetores contravariantes e covariantes, respectivamente. Desta forma, acreditamos poder minimizar as dificuldades conceituais que os estudantes apresentam para esses conceitos.

Agradecimentos

Agradecemos a Giana Gadelha Paiva Rosso Nelson pelas sugestões na elaboração desse texto.

Referências

[1] D. Halliday, R. Resnick e J. Walker, *Fundamentos de Física* (LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 2009), v. 1.

[2] F.W. Sears, M.W. Zemansky, H.D. Young e R.A. Freedman, *Física I - Mecânica* (Person, Addison Wesley, São Paulo, 2003).

[3] C. Kittel, W.D. Knight e M.A. Ruderman, *Curso de Física de Berkeley, v. 1, Mecânica* (Editora Edgard Blücher Ltda, São Paulo, 1970).

[4] R. Resnick, D. Halliday e K.S. Krane, *Física 1* (LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro, 2003).

[5] M. Alonso e E.J. Finn, *Física - Um Curso Universitário, v. 1, Mecânica* (Editora Edgard Blücher Ltda, São Paulo, 1972).

[6] N. Coburn, *Vector and Tensor Analysis* (The Macmillan Company, New York, 1955).

[7] E. Butkov, *Física Matemática* (Editora Guanabara Dois S.A., Rio de Janeiro, 1978).

[8] G.B. Arfken e H.J. Weber, *Física Matemática Métodos - Matemáticos para Engenharia e Física* (Elsevier Editora Ltda., Rio de Janeiro, 2007).

[9] S. Lang, *Álgebra Linear* (Editora Edgard Blucher Ltda, São Paulo, 1971).

[10] D.C. Lay, *Álgebra Linear e Suas Aplicações* (LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 1999), 2ªed.