Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 35, n. 1, 1308 (2013)
www.sbfisica.org.br

Investigação teórica e experimental do efeito termiônico

(Experimental and theoretical study of the thermionic effect)

Nilson S. de Andrade[1], A.V. Andrade-Neto[1], Thierry Lemaire[2] e J.A. Cruz[1]

[1] *Departamento de Física, Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana, BA, Brazil*
[2] *Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia, Salvador, BA, Brazil*
Recebido em 19/6/2012; Aceito em 23/6/2012; Publicado em 18/2/2013

Neste trabalho realizamos um estudo teórico e experimental do efeito termiônico. Do ponto de vista teórico deduzimos a expressão para a densidade de corrente termoelétrica emitida pela superfície de um metal em função da temperatura (fórmula de Richardson-Dushman), considerando os elétrons de condução do metal como um gás de Fermi. Também analisamos a expressão que fornece a corrente em função da voltagem aplicada (lei de Child). Do ponto de vista experimental utilizamos um dispositivo de baixo custo, usando uma lâmpada de automóvel, com dois filamentos independentes, que funcionou como uma válvula. A partir de medidas da corrente termoelétrica entre os filamentos, o efeito termiônico é evidenciado. Adicionalmente, a função trabalho do material é calculada a partir das medidas experimentais.
Palavras-chave: efeito termiônico, equação de Richardson-Dushman, lei de Child.

Thermionic emission is a surface phenomenon that occurs when a flow of electrons is emitted from a heat metal. Experimental techniques and theoretical analysis for the current density are discussed in this paper. We present an experiment that was performed to study this effect using a simple car lamp with two filaments. From theoretical point of view we deduce the expression for the thermionic current density (Richardson-Dushman equation) and the space charge limited current (the Child-Langmuir law). We also performed quantitative measurements of current density. From measurements of the thermal current between the filaments, the thermionic effect is evidenced.
Keywords: thermionic effect, Richardson-Dushman equation, Child's law.

1. Introdução

Chamamos de efeito termiônico a emissão de elétrons de uma superfície metálica quando esta é aquecida a temperaturas suficientemente alta (da ordem de 2000 K). Um dos primeiros a descrever esse fenômeno foi o físico inglês Frederick Guthrie, em 1873, quando observou que uma bola de ferro aquecida a alta temperatura retinha uma carga negativa em sua vizinhança. Em 1880, esse efeito foi observado por Thomas Edison quando investigava as causas da ruptura do filamento da lâmpada incandescente. O inglês Owen W. Richardson foi um dos principais investigadores do efeito termiônico e, por seu trabalho, recebeu o Prêmio Nobel de Física de 1928 [1].

Para uma melhor compreensão do processo de emissão de elétrons por uma superfície metálica, devemos, inicialmente, entender como os mesmos estão distribuidos em um metal. É conveniente imaginar que temos dois tipos de elétrons em um metal: elétrons ligados e elétrons livres. Esses últimos são os elétrons de valência dos átomos individuais que, quando se juntam para formar o cristal, adquirem a propriedade de se mover de forma quase livre através da rede. Os elétrons livres são chamados de elétrons de condução [2].

Em um modelo simples, os elétrons de condução estão contidos em um poço de potencial de altura finita V_o. No estado fundamental, os níveis de energia são preenchidos, obedecendo ao princípio de exclusão de Pauli, até um valor máximo chamado nível de Fermi E_F, como ilustrado na Fig. 1. Para que um elétron escape do metal, como na emissão termiônica ou efeito fotoelétrico, é necessário fornecer-lhe uma energia extra. A energia mínima necessária para extrair um elétron do metal é denominada função trabalho Φ. Para o tungstênio, esse valor é cerca de 4,5 eV.

Pode-se também extrair elétrons de um metal mesmo sem o fornecimento da energia mínima necessária para sua remoção. Isso pode ser feito pela aplicação de um campo elétrico externo, o qual reduz a barreira de potencial vista pelo elétron. Esse efeito, denominado de emissão fria, tem como fenômeno físico básico o efeito túnel, que é a possibilidade de uma

[1] E-mail: aneto@uefs.br.

Copyright by the Sociedade Brasileira de Física. Printed in Brazil.

partícula com energia total E penetrar numa região com energia potencial V, na qual $E < V$, o que é impossível acontecer na mecânica clássica. Esse efeito ocorre com frequência em sistemas atômicos e moleculares e é o princípio básico de funcionamento de alguns microscópios que apresentam resolução em escala atômica [3, 4].

Em geral, as experiências para demonstrar a emissão termiônica são realizadas com válvulas [5]. Neste trabalho apresentaremos uma montagem experimental de baixo custo para a investigação do efeito termiônico. Uma montagem semelhante foi apresentada na Ref [6]. A fim de tornar o trabalho mais completo também são apresentadas as deduções das expressões da densidade de corrente (fórmula de Richardson-Dushman) e da lei de Child-Langmuir.

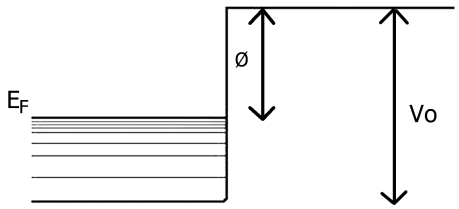

Figura 1 - Modelo simples que representa a energia potencial dos elétrons de condução em um sólido. E_F é a energia de Fermi, Φ é a função trabalho do material, que corresponde a energia mínima necessária para arrancar um elétron do metal. V_o é a altura do poço de potencial tal que $V_o = E_F + \Phi$.

2. Abordagem teórica

Uma grandeza fundamental a ser determinada no efeito termiônico é a densidade de corrente dos elétrons emitidos, a chamada corrente termiônica (J).

Se utilizamos a estatística clássica (distribuição de Maxwell-Boltzmann) é fácil demonstrar [7] que a densidade de corrente é dada por

$$J = A' T^{1/2} \exp(-V_o/k_B T), \tag{1}$$

onde T é a temperatura absoluta, k_B é a constante de Boltzmann e $A' = n\sqrt{k_B/(2\pi m)}$, onde n é o número de elétrons por unidade de volume e m é a massa do elétron.

Uma nova expressão para J foi obtida por Saul Dushman, que deduziu a seguinte expressão [8].

$$J = AT^2 \exp(-\Phi/k_B T) \ , \tag{2}$$

onde A é uma constante e Φ é a função trabalho do material emissor. Essa nova expressão, conhecida como equação de Richardson-Dushman, pode ser deduzida do modelo do gás de elétrons livres, substituindo a distribuição de Maxwell-Boltzmann pela de Fermi-Dirac, conforme veremos a seguir.

2.1. Fórmula de Richardson-Dushman

Se a velocidade de arraste dos elétrons de condução é $\mathbf{v}$, a densidade de corrente é dada por

$$\mathbf{J} = ne\mathbf{v}, \tag{3}$$

onde e é a carga elementar e n é a concentração de portadores.

Designando por x a componente normal à superfície e considerando os elétrons de condução como um gás ideal quântico (gás de Fermi), a Eq. (3) pode ser escrita como

$$J_x = \frac{e}{\Omega} \sum_k v_x(k) f(E(k)) \tag{4}$$

onde Ω é o volume do cristal, $f(E(k))$ é a distribuição de Fermi-Dirac e k é o vetor de onda que caracteriza o estado eletrônico. A soma discreta na Eq. (4) pode ser transformada em uma integral pela regra

$$\sum_k \rightarrow \frac{\Omega}{8\pi^3} \int d^3k \ . \tag{5}$$

Utilizando a Eq. (5) podemos escrever a Eq. (4) como

$$J_x = \frac{2e}{8\pi^3} \int v_x(k) f(E(k)) dk_x dk_y dk_z \ , \tag{6}$$

onde o fator 2 foi introduzido devido a degenerescência dos elétrons.

A distribuição de Fermi-Dirac é dada por

$$f(E(k)) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E-\mu}{k_B T}\right) + 1} \ , \tag{7}$$

onde μ é o potencial químico. Em um metal típico o potencial químico difere muito pouco da energia de Fermi do material, de modo que podemos considerar $\mu \approx E_F$. A energia dos elétrons que escapam do metal é

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V_o = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \Phi + E_F \ , \tag{8}$$

onde $\hbar$ é a constante de Planck e m é a massa do elétron. Assim, temos que

$$E - \mu \approx E - E_F = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \Phi \ . \tag{9}$$

Utilizando a Eq. (9) na Eq. (7) temos que

$$f(E(k)) = \frac{1}{\exp\left(\frac{(\hbar^2 k^2)/2m + \Phi}{k_B T}\right) + 1} \ . \tag{10}$$

Como o valor da função trabalho de um metal é da ordem de alguns eletrons volts ($\Phi \sim 4$ eV) enquanto $k_B T \sim 0,17$ eV (para $T = 2000$ K), vemos que a unidade no denominador da Eq. (10) pode ser desprezado e ficamos

$$f(E(k)) = \exp\left(-\frac{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \Phi}{k_B T}\right) \ . \tag{11}$$

Substituindo a Eq. (11) na Eq. (6) e utilizando que $v_x = \hbar k_x/m$, obtemos

$$J_x = \frac{e\hbar}{4\pi^3 m} e^{-\Phi/k_B T} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha k_y^2} dk_y \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha k_z^2} dk_z \times \int_0^{\infty} k_x e^{-\alpha k_x^2} dk_x, \quad (12)$$

onde fizemos

$$\alpha = \frac{\hbar^2}{2mk_B T} \ . \quad (13)$$

O limite de integração da variável k_x varia de 0 a ∞ porque apenas os elétrons com componente v_x positivo podem contribuir para a corrente.

As duas primeiras integrais que aparecem na Eq. (12) são do tipo gaussianas e valem

$$I_y = I_z = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \ . \quad (14)$$

A última integral é facilmente resolvida e tem como resultado

$$I_x = \frac{1}{2\alpha} \ . \quad (15)$$

Utilizando as Eqs. (14) e (15) na Eq. (12) obtemos

$$J_x = \frac{em}{2\pi\hbar^3} (k_B T)^2 e^{-\Theta/k_B T}, \quad (16)$$

que é a equação de Richardson-Dushman. Em geral, essa equação é escrita na forma mais compacta

$$J = AT^2 \exp(-\Phi/k_B T), \quad (17)$$

onde

$$A = \frac{emk_B^2}{2\pi^2\hbar^3} \approx 120(A \cdot cm^{-2} \cdot K^{-2}). \quad (18)$$

A Eq. (17) fornece a dependência da densidade de corrente com a temperatura que ocorre de forma quadrática e de forma exponecial, que é o fator predominante. Se fazemos um gráfico $\ln(J/T^2)$ em função de $1/T$ a curva resultante será uma reta cuja inclinação (coeficiente angular) é dada por $-\Phi/k_B$. Isso permite determinar experimentalmente a função trabalho do material emissor, conforme faremos na Seção 3.

Levando em conta a possibilidade de que um elétron, mesmo tendo energia total maior que a altura da barreira, pode ser refletido de volta para o metal, a Eq. (17) fica

$$J = AT^2(1-r) \exp(-\Phi/k_B T), \quad (19)$$

onde r é a probabilidade de que o elétron seja refletido de volta [9].

2.2. Fórmula de Child-Langmuir

Os elétrons que escapam do metal aquecido tendem a permanecer na região próxima ao metal formando uma nuvem eletrônica conhecida como carga espacial. Isso acontece devido a interação coulombiana entre o metal (que fica carregado positivamente) e a carga espacial. Assim, para que haja a corrente é necessário a existência de um campo elétrico que acelere os elétrons para longe do metal.

Aproximando um coletor (anodo) do metal aquecido (catodo) e estabelecendo uma diferença de potencial entre os dois, resultará uma corrente termiônica cuja dependência da tensão aceleradora é dada pela lei de Child-Langmuir que será deduzida a seguir para uma superfície plana.

Consideremos um diodo no vácuo formado por duas placas paralelas infinitas. Uma positiva situada em $x = d$ e a outra negativa situada em $x = 0$ e com uma diferença de potencial V_o aplicada entre elas. As equações que governam o sistema são a equação da continuidade e a equação de Poisson. A diferença de potencial entre as placas satisfaz a equação de Poisson

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_o}, \quad (20)$$

onde ρ é a densidade de carga e ϵ_o é a permissividade do vácuo. Supondo que os elétrons são emitidos numa direção perpendicular, podemos tratar o problema como unidimensional, *i.e.*,

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_o}, \quad (21)$$

cujas condições de contorno são

$$V(x=0) = 0, V(x=d) = V_o. \quad (22)$$

A densidade de carga está relacionada com a densidade de corrente pela equação

$$J(x) = \rho(x)v(x), \quad (23)$$

onde $v(x)$ é a velocidade dos portadores. Por sua vez, a velocidade dos elétrons se relaciona com o potencial elétrico através da equação

$$(1/2)mv^2(x) = eV(x). \quad (24)$$

Utilizando a expressão acima temos que

$$\rho(x) = \frac{J(x)}{v(x)} = J(x)\sqrt{\frac{m}{2eV(x)}} \ . \quad (25)$$

Utilizando a Eq. (25) na Eq. (21) obtemos

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{J}{\epsilon_o}\sqrt{\frac{m}{2e}}\frac{1}{\sqrt{V(x)}}. \quad (26)$$

Fazendo a mudança de variável $dV/dx = \xi$ a Eq. (26) pode ser escrita como

$$\xi d\xi = -\frac{J}{\epsilon_o}\sqrt{\frac{m}{2e}}V^{-1/2}(x)dV. \quad (27)$$

Integrando a equação acima e usando a Eq. (22) para determinar a constante de integração obtemos

$$\left(\frac{dV(x)}{dx}\right)^2 = -4\frac{J}{\epsilon_o}\sqrt{\frac{m}{2e}}V^{1/2}(x). \quad (28)$$

Integrando a Eq. (28) obtemos

$$V(x) = \left(-\frac{9}{4}\frac{J}{\epsilon_o}\sqrt{\frac{m}{2e}}\right)^{2/3} x^{4/3}. \quad (29)$$

Explicitando a densidade de corrente e usando que $V(x = d) = V_o$, obtemos

$$J_x = -\frac{4\epsilon_o}{9}\sqrt{\frac{2e}{m}}\frac{V_o^{3/2}}{d^2}. \quad (30)$$

Da equação acima vemos que a densidade de corrente é proporcional a potência 3/2 da tensão aplicada entre os eletrodos e inversamente proporcional ao quadrado da distância. Lembremos que esta equação foi deduzida supondo que o anodo e o catodo possuem uma interface plana.

3. Abordagem experimental

Vamos agora descrever o procedimento experimental realizado para investigar o efeito termiônico. Para construir o circuito utilizamos os seguintes dispositivos: uma lâmpada de automóvel de 12 V, duas fontes ajustáveis (uma de 12 V e outra de 150 V), dois multímetros digitais, um resistor de 1 MΩ e um capacitor de 220 nF . A Fig. 2 mostra um esquema da montagem do circuito e a Fig. 3 mostra uma foto do arranjo experimental.

A lâmpada possui dois filamentos incandescentes independentes que funcionaram como o catodo e o anodo. Um dos filamentos (o catodo) foi submetido a uma tensão proveniente de uma fonte ajustável, que denominaremos F_1, o que provocou o seu aquecimento (por efeito Joule) e a consequente emissão de elétrons. A voltagem da fonte F_1 pode ser variada entre 7 e 12 V. Essa fonte possui um mostrador que indica a tensão e a corrente fornecida, assim, não foi necessário introduzir um multímetro para medir a tensão e a corrente no catodo.

Outra fonte ajustável, denominada F_2, foi utilizada para fornecer uma tensão entre 10 a 150 V entre o catodo e o anodo e teve a função de direcionar os elétrons para formar a corrente termiônica. Deve-se observar a polaridade dos terminais colocados: o terminal positivo no anodo e o negativo no catodo; caso contrário a corrente não será observada.

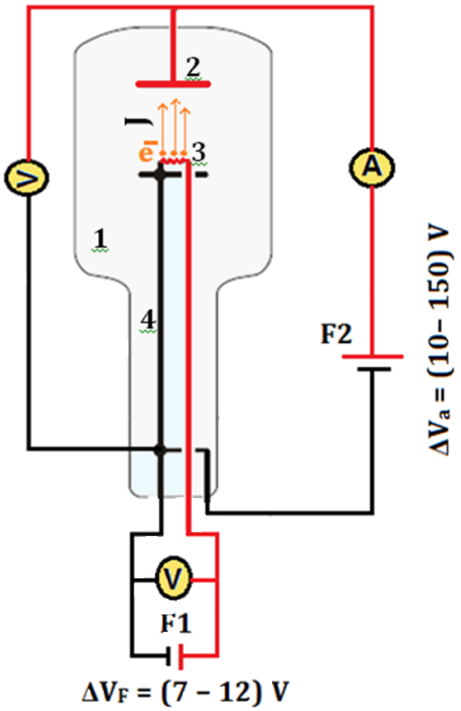

Figura 2 - Diagrama do arranjo experimental.

Figura 3 - Foto do arranjo experimental.

Foram utilizados dois multímetros digitais da marca BK TEST BENCH 390, um dos quais foi usado para medir diretamente a tensão fornecida pela fonte F_2, enquanto o outro tinha a função de medir indiretamente a corrente termiônica. Considerando que a corrente termiônica é de baixa intensidade foi usado um resistor de 1MΩ, que servia como conversor de corrente em tensão. O multímetro foi colocado em paralelo a este resistor e media a diferença de potencial no mesmo. A determinação da corrente termiônica foi feita usando a lei de Ohm. Contudo, o uso deste resistor e do multímetro em paralelo, possuindo uma resistência interna de 1MΩ, provocava um desvio de metade da corrente. Desta maneira, ao resultado obtido pela utilização da lei de Ohm será multiplicado por um fator 2. Utilizamos também um capacitor de 220 nF que

serve de filtro para correntes alternadas, pois sendo a corrente termiônica de baixa intensidade, o ruído prejudicaria a sua detecção. Antes de apresentarmos os resultados obtidos, vamos mostrar como determinamos a temperatura do filamento que serve de catodo.

3.1. Temperatura no filamento

Utilizamos a seguinte equação que relaciona a temperatura com a resistência elétrica

$$R(T) = R_o[1 + \alpha(T - T_o) + \beta(T - T_o)^2] \ , \qquad (31)$$

onde R_o é a resistência a temperatura T_0 que, por sua vez, é o valor da temperatura ambiente e as constantes α e β são, respectivamente, $\alpha = 4.8 \times 10^{-3}$ K^{-1} e $\beta = 6.7 \times 10^{-7}$ K^{-2}. Os valores experimentais de T_0 e R_0 foram $T_0 = 22$ °C e $R_0 = 2\ \Omega$.

A temperatura do filamento é obtida achando as raízes da equação

$$aT'^2 + bT' + c = 0 \ , \qquad (32)$$

onde $a = \beta R_0 = 1,34\ \Omega$ K^{-2}, $b = \alpha R_0 = 9,6\ \Omega$ K^{-1}, $c = R_0 - V/i$ e $T' = T - T_0$. Na tabela abaixo temos os valores da tensão no filamento e de sua respectiva intensidade de corrente, bem como a temperatura T.

V (Volt)	I (Ampere)	T (Kelvin) $\times 10^3$
11, 7	0, 5	2, 08
10, 7	0, 48	2, 01
9, 8	0, 46	1, 94
8, 8	0, 43	1, 86
7, 8	0, 41	1, 76
6, 7	0, 38	1, 67

3.2. Resultados experimentais

Os resultados experimentais foram obtidos fixando um valor de tensão no filamento-catodo (entre 7 e 12 V) na fonte ajustável F_1 e variando a tensão entre os dois filamentos da lâmpada (catodo e anodo) através da fonte F_2 (esta tensão foi variada de 10 a 150 V) e medindo o valor da corrente que passa entre os filamentos através do multímetro. O processo foi repetido para diferentes voltagens na fonte F_1, o que possibilitou construir o gráfico mostrado na Fig. 4, que evidencia a ocorrência do efeito termiônico.

Podemos também construir o gráfico $\ln i$ *vs.* $\ln V$, conforme mostrado na Fig. 5, com dados correspondentes ao valor de tensão (temperatura) de $V_1 = 12$ V. Esse gráfico nos permite obter o coeficiente da lei de Child, através do ajuste linear da reta. Encontramos um valor igual a 1, 9, maior que 1, 5 (o valor do expoente da lei de Child).

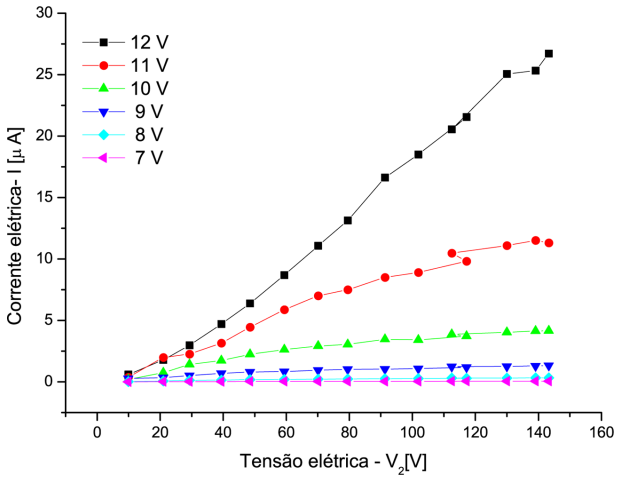

Figura 4 - Gráfico da corrente termiônica em função da voltagem no catodo para diferentes voltagens aplicadas no filamento.

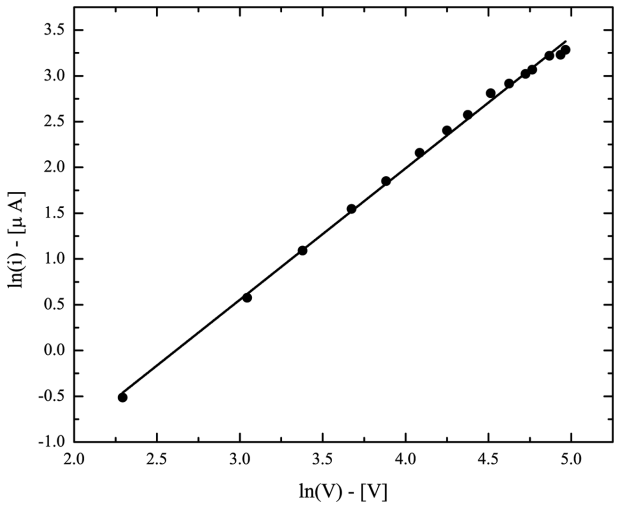

Figura 5 - Gráfico de $\ln i$ *vs.* $\ln V$ que comprova a lei de Child.

Podemos observar da Fig. 4 que as correntes termiônicas tendem a um valor constante, o que é denominado na literatura de corrente de saturação, que significa que todos os elétrons que são emitidos pelo catodo são absorvidos pelo anodo. Isto é claramente observado na Fig. 4 para valores de tensão de 10 V e 11 V. É possível visualizar que a corrente do anodo se satura para os valores compreendidos entre 7 a 9 V se forem feitas mudanças de escala no gráfico. Para verificar a saturação da corrente do anodo com a tensão de catodo de 12 V é necessário aumentar a diferença de potencial entre os filamentos da lâmpada para valores acima de 150 V o que poderia exceder as especificações da mesma. Na situação em que ocorre a corrente de saturação podemos utilizar a equação de Richardson-Dushman. Construindo o gráfico $\ln(i/T^2)$ *vs.* $1/T$, Fig. 6, vemos da Eq. (16) que o coeficiente angular dessa reta, que denominaremos de B, é dado por $B = -\Phi/k_B$. Do gráfico da Fig. 6 achamos que $B = -5,05 \times 10^4$ K. Assim, encontramos que $\Phi = 4,36$ eV, um valor bastante próximo da função

trabalho do tungstênio, que é cerca de 4,5 eV.

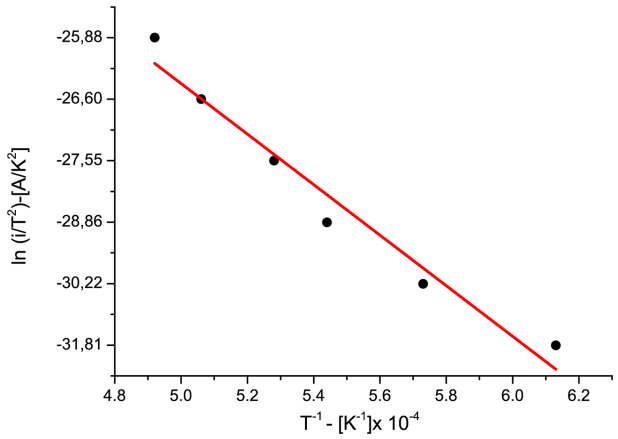

Figura 6 - Gráfico de $\ln(i/T^2)$ *vs.* $1/T$ que permite calcular a função trabalho.

4. Conclusões

O efeito termiônico deu origem a importantes aplicações tecnológicas, servindo como base para a montagem de dispositivos que possibilitaram o desenvolvimento da tecnologia eletrônica e de comunicação. Neste trabalho utilizamos um aparato experimental simples para fazer um estudo desse efeito. A fim de que o trabalho ficasse completo, fizemos também uma apresentação teórica da densidade de corrente termiônica (equação de Richardson-Dushman) bem como da lei de Child para uma geometria simples.

O efeito termiônico está evidente na Fig. 4. A lei de Child é evidenciado na Fig. 5. Encontramos para o expoente da lei de Child um valor que difere da literatura em cerca de 27 por cento. O valor da função trabalho calculado a partir do experimento foi de $4,36$ eV, próximo, portanto, do valor de 4,52 eV encontrado na literatura, o que mostra que esta montagem pode ser utilizada para realizar medidas relativamente precisas.

Referências

[1] Owen W. Richardson, *Thermionic Phenomena and the Laws which Govern Them* Nobel Lecture (1929).

[2] Neil W. Ashcroft and N. David Mermin, *Solid State Physics* (Saunders College Publishing, Fort Worth, 1976).

[3] A.V. Andrade-Neto e Ariel Almeida Abreu Silva, Caderno de Física da UEFS **7**, 115 (2009).

[4] Ariel Almeida Abreu Silva e A.V. Andrade-Neto, Revista Brasileira de Ensino de Física **34**, 1304 (2012).

[5] Everton Lüdke, Revista Brasileira de Ensino de Física **33**, 4701 (2011).

[6] E.F. de Lima, M. Foschini e M. Magini, Revista Brasileira de Ensino de Física **23**, 391 (2001).

[7] Max Born, *Física Atômica*. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa (1986).

[8] S. Dushman, Phys. Rev. **21**, 623 (1923).

[9] L.W. Nordheim, Proc. Roy. Soc. **A121**, 626 (1928).