

O problema dos dois capacitores revisitado

(The problem of two capacitors revisited)

Vitor Lara, Dayanne F. Amaral, Kaled Dechoum¹

Instituto de Física, Universidade Federal Fluminense, Niterói, RJ, Brasil

Recebido em 4/4/2012; Aceito em 15/1/2013; Publicado em 15/5/2013

Discutimos o problema da descarga de um capacitor associado a outro, idêntico e inicialmente descarregado. É sabido que, com ou sem a presença de resistência elétrica no circuito, o estado final de equilíbrio, assim como a energia dissipada no processo, são sempre os mesmos. O mecanismo de dissipação no caso em que não há resistência elétrica é a irradiação do sistema e no caso em que a resistência elétrica está presente ocorrem ambos, irradiação e dissipação por efeito Joule, devido à interação dos elétrons de condução com a rede cristalina, de forma a sempre satisfazer o teorema de Poynting. A diferença entre ambos os processos está no intervalo de tempo em que o sistema atinge o equilíbrio e, conseqüentemente, no espectro da radiação eletromagnética emitida por este sistema.

Palavras-chave: circuito RC, dissipação, irradiação.

We discuss the problem of the discharge of a capacitor associated with another identical and initially discharged capacitor. It is known that with or without the presence of an electrical resistance in the circuit, the final state of equilibrium, as well as the energy dissipated in the process, are always the same. The dissipation mechanism if there is no electric resistance is the irradiation of the system, and in the presence of electric resistance there are both irradiation and Joule dissipation, due to the interactions of the conduction electrons with the crystal lattice in order to always satisfy Poynting's theorem. The difference between both processes is the time interval in which the system reaches equilibrium and therefore the spectrum of electromagnetic radiation emitted by this system.

Keywords: RC circuit, dissipation, irradiation.

1. Introdução

Neste trabalho, discutiremos um problema comumente explorado em livros textos de física básica, como por exemplo a Ref. [1], sob uma perspectiva mais completa. O sistema físico é constituído por um circuito de malha simples, que possui três elementos: dois capacitores idênticos (com capacitâncias iguais à C) e uma chave, que inicialmente está aberta. Um dos capacitores possui uma carga inicial q_0 (capacitor 1), enquanto que o outro está inicialmente descarregado (capacitor 2). A Fig. (1) ilustra o circuito descrito neste parágrafo.

Poderíamos fazer uma objeção à descrição deste sistema. Sabemos que a grande maioria dos circuitos reais apresentam alguma resistência elétrica (embora existam os famosos supercondutores, descobertos por H. Kamerlingh Onnes em 1911 - ver a Ref. [2]). Por conta disso, podemos introduzir no circuito uma resistência elétrica R , como pode ser visto na Fig. (1), uma vez que esta resistência naturalmente existe em circuitos ôhmicos reais. Nosso objetivo passa a ser então obter qual a corrente $I(t)$ que fluirá no circuito tão logo fe-

chemos a chave, e quanto tempo levará para que este sistema atinja o estado final de equilíbrio. Para este caso em particular, onde ambas as capacitâncias são iguais à C , ao final do processo de descarga teremos a mesma carga $q_0/2$ para os dois capacitores (o caso mais geral, em que temos $C_1 \neq C_2$ é uma extensão natural do problema aqui apresentado). Chamaremos o tempo necessário para que o circuito atinja este estado final de tempo de equilíbrio.

Este problema já foi discutido em alguns trabalhos anteriores. Na Ref. [3] o autor analisa o problema sem considerar que o sistema irradia. Entretanto, o mesmo inclui uma auto-indutância, tornando o problema da descarga do capacitor mais realista. O mesmo ocorre na Ref. [4], onde os autores acrescentam um termo fenomenológico para incluir a radiação do sistema. Outros autores [5] fazem uma análise energética em termos do teorema de Poynting mas sem levar em conta a radiação do sistema, enquanto na Ref. [6], os autores consideram o circuito como um dipolo magnético que irradia mas sem resistência elétrica.

¹E-mail: kaled@if.uff.br.

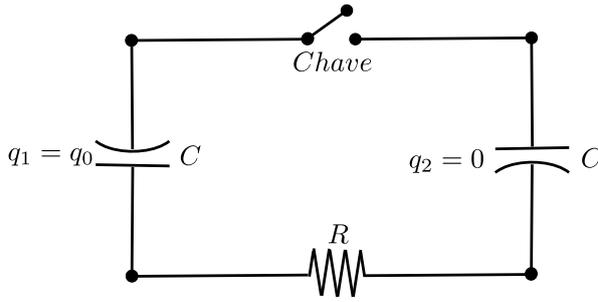


Figura 1 - Esquema do circuito descrito no texto. Nomeamos o capacitor à esquerda de 1 e à direita recebeu o rótulo 2. Introduzimos a resistência R , conforme discutido no texto.

No presente trabalho consideraremos dois processos distintos de dissipação da energia inicialmente acumulada nos capacitores. Acrescentamos a dissipação de energia por efeito Joule (que ocorre devido à resistência elétrica) e a perda de energia devida à radiação, comparando ao final estas contribuições entre si. Derivamos a expressão da potência $P_{rad}(t)$ irradiada por este circuito, e a partir desta quantidade extraímos $P_{rad}(\omega)$, a potência irradiada como função da frequência correspondente à radiação eletromagnética emitida. Deste modo, estabelecemos uma relação entre a distribuição espectral e o tempo de decaimento.

2. Considerações de energia em termos da distribuição de cargas nos capacitores

O circuito em questão apresenta uma particularidade. A carga acumulada em ambos capacitores, após o tempo necessário para que se atinja o equilíbrio, vale $q_0/2$, independente do valor da resistência elétrica. Isto implica que a diferença de energia eletrostática acumulada no circuito é a mesma para qualquer valor de R , evidenciando que o papel da resistência se limita em ditar o intervalo de tempo que o sistema leva para atingir o equilíbrio e não a quantidade de energia dissipada.

Primeiramente, vejamos qual a energia acumulada nos capacitores na situação inicial, antes de fecharmos a chave, e na situação final de equilíbrio, em que ambos os capacitores possuem carga $q_0/2$. A dedução da energia eletrostática acumulada em um capacitor feita aqui segue de perto à feita na Ref. [7].

Para obter a quantidade de energia que está acumulada num capacitor de carga q e capacitância C , pensemos no seguinte: suponhamos que o sistema esteja numa configuração em que a placa positiva possui carga q e, por conseguinte, a negativa possui $-q$. Desta maneira, a diferença de potencial entre as duas placas vale $V = q/C$. Agora, se retiramos uma carga δq da placa negativa para em seguida colocarmos esta carga na placa positiva, fazendo com que o sistema capacitivo fique com uma carga $q + \delta q$ acumulada, o trabalho δW necessário para isso será

$$\delta W = V\delta q = \frac{q}{C}\delta q. \quad (1)$$

De posse da Eq. (1), podemos integrar o trabalho δW para obter a energia total U acumulada neste sistema, integrando o lado direito da mesma de $q = 0$ até $q = Q$. Fazendo isto, obtemos

$$U = \int dW = \int_0^Q \left(\frac{q}{C}\right) dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}. \quad (2)$$

Contudo, se a carga inicial acumulada em um dos capacitores vale q_0 , temos que a energia eletrostática inicial acumulada no sistema vale

$$U_0 = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C}, \quad (3)$$

uma vez que um dos capacitores inicialmente não possui carga alguma, e que a energia acumulada em todo o sistema após fecharmos a chave e esperarmos o tempo de equilíbrio vale

$$U_F = \frac{1}{2C} \left(\frac{q_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2C} \left(\frac{q_0}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \frac{q_0^2}{C}, \quad (4)$$

independentemente do valor da resistência R do sistema. Desta maneira, temos que

$$\Delta U = U_F - U_0 = -\frac{1}{4} \frac{q_0^2}{C}, \quad (5)$$

e esta é precisamente a energia dissipada pelo sistema durante o processo.

3. Dissipação por efeito Joule

Como explicar o fato de que não há dependência em ΔU com a resistência? Em particular, mesmo que R seja igual a zero (formalmente, tomamos o limite $R \rightarrow 0$), temos que $\Delta U \neq 0$, uma vez que as configurações inicial e final serão as mesmas descritas anteriormente. Como explicar esta perda, mesmo no caso em que não há resistência elétrica? Vamos primeiro analisar o caso em que o sistema não irradia, ou seja, toda energia é dissipada via efeito Joule.

Sabemos que a potência dissipada em um resistor é calculada a partir da relação

$$P_{Joule} = RI^2(t). \quad (6)$$

Deste modo, se conseguirmos obter $I(t)$ para o circuito da Fig. (1), podemos obter a energia total dissipada pela resistência R integrando a potência dissipada $P_{Joule}(t)$ de $t = 0$ (quando fechamos a chave) até $t = \infty$

$$\int_0^\infty P_{Joule} dt = \int_0^\infty RI^2(t) dt. \quad (7)$$

Para obter $I(t)$, temos que aplicar a lei de Kirchhoff das malhas ao circuito da Fig. (1). Aplicando esta lei, temos

$$-V_1 - RI(t) + V_2 = 0, \quad (8)$$

onde V_1 é a diferença de potencial entre os terminais do capacitor 1, V_2 a diferença de potenciais entre os terminais do capacitor 2, e $-RI(t)$ é a diferença de potencial entre os terminais da resistência R . Chamando a carga acumulada no capacitor 1 de q_1 e a carga acumulada no capacitor de $q_2 = q_0 - q_1$, sabemos também que a corrente que flui no sistema vale $I(t) = dq_1/dt$, de modo que podemos reescrever a Eq. (8) como

$$-\frac{q_1(t)}{C} - R\dot{q}_1 + \frac{(q_0 - q_1)}{C} = -R\dot{q}_1 - \frac{2q_0}{C} + \frac{q_0}{C} = 0, \quad (9)$$

e, finalmente, dividindo ambos os lados por $-1/R$, obtemos

$$\dot{q}_1(t) + \frac{2}{RC}q_1(t) - \frac{q_0}{RC} = 0. \quad (10)$$

Para resolver a Eq. (10) e finalmente obter a expressão de $I(t)$, basta perceber que esta equação é do tipo separável. Separando e resolvendo a Eq. (10), obtemos

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{1}{RC}(q_0 - 2q_1) \Rightarrow \int_{q_0}^{q_1(t)} \frac{dq_1}{(q_0 - 2q_1)} = \frac{1}{RC} \int_0^t dt, \quad (11)$$

e temos agora $q_1(t)$, que vale

$$q_1(t) = \frac{q_0(1 + e^{-2t/RC})}{2}. \quad (12)$$

Agora podemos extrair $I(t)$ da Eq. (12), bastando apenas derivar $q_1(t)$ com relação ao tempo. Deste modo obtemos

$$I(t) = \frac{d}{dt} [q_1(t)] = -\frac{q_0}{RC} e^{-2t/RC} \Theta(t), \quad (13)$$

onde $\Theta(t)$ é a função degrau de Heaviside, que aparece justamente porque antes da chave ser fechada, não havia nenhuma corrente fluindo pelo circuito.

Utilizando esta expressão para $I(t)$ em (7), descobrimos que a energia dissipada pelo efeito Joule vale

$$\Delta U_{Joule} = \int_0^\infty R \frac{q_0^2}{(RC)^2} e^{-4t/RC} dt = \frac{q_0^2}{4C}, \quad (14)$$

e de fato não depende de R . Na verdade, observando o valor de ΔU_{Joule} obtido na Eq. (14), vemos que é justamente a diferença de energia ΔU obtida anteriormente, na Eq. (5), onde calculamos a diferença de energia eletrostática acumulada nos capacitores entre as situações final e inicial.

Podemos observar que a expressão obtida para $I(t)$ na Eq. (13) exibe uma dependência em R . Se tomamos o limite de $R \rightarrow 0$, temos assintoticamente o caso em que a resistência elétrica se anula. Esta expressão de $I(t)$, entretanto, corresponde à uma das funções que geram a distribuição delta de Dirac no limite mencionado, conforme pode-se ver na Ref. [8]. Temos que mesmo neste limite, ainda haverá perda de energia por efeito Joule, embora esta perda se dê “instantaneamente”.

Entretanto, podemos obter a mesma energia perdida ΔU se calcularmos a energia dissipada via radiação eletromagnética, conforme veremos a seguir.

Estas considerações de energia, bem como outras discussões deste tipo, podem ser parcialmente encontradas na Ref. [3]. Neste momento, estamos interessados apenas na expressão de $I(t)$ dada pela Eq. (13). Com ela, obtemos a expressão para $P_{Joule}(t)$, mas se incluirmos a possibilidade do sistema irradiar, essa expressão para a corrente no circuito já não será mais válida, como será visto adiante.

4. Considerações de energia em termos de campos nos capacitores

Durante o processo de descarga do capacitor do sistema descrito pela Fig. (1), temos mudanças nas densidades de cargas nos capacitores e também na corrente $I(t)$ que flui no circuito, como vimos na seção anterior. Vamos mostrar nessa seção que um enfoque em termos de campos mostra que para o sistema entrar em equilíbrio ele precisa dissipar a mesma quantidade de energia prevista na seção anterior.

Vamos considerar o circuito formado por dois capacitores planos paralelos onde as armaduras são círculos de raio a separadas por uma distância d (temos neste caso que cada um dos capacitores possui uma capacitância igual a $C = \epsilon_0 \pi a^2/d$, numa aproximação onde se despreza os efeitos de borda, caso o leitor deseje uma referência onde se calculam capacitâncias, indicamos a Ref. [7]) [ver Fig. (2)].

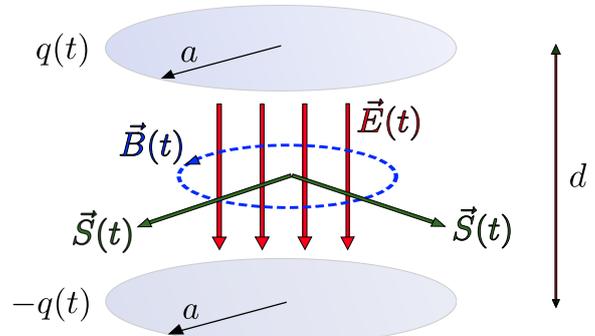


Figura 2 - Esquema representativo do capacitor de placas planas, paralelas e circulares, conforme descrito no texto.

Desprezando efeitos de borda, o campo elétrico dentro do capacitor será dado por

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{z} = \frac{q(t)}{\epsilon_0 \pi a^2} \hat{z}. \quad (15)$$

Antes de fecharmos a chave, temos que o campo elétrico dado pela Eq. (15) não se altera. Entretanto, ao fecharmos a chave, as densidades de carga σ passam a variar no tempo, e em decorrência disto surgem no interior dos capacitores campos magnéticos, cujas

expressões são dadas pela lei de Ampère-Maxwell

$$\oint_c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}, \quad (16)$$

onde o fluxo de campo elétrico ϕ_E que aparece na corrente de deslocamento é dado por

$$\phi_E = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = E\pi r^2, \quad (17)$$

e pode ser derivado em relação ao tempo para gerar

$$\frac{d\phi_E}{dt} = \pi r^2 \frac{dE}{dt}. \quad (18)$$

Se substituirmos esta última expressão na Eq. (16), obtemos a expressão do campo magnético no interior do capacitor

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{2} \frac{dE}{dt} r \hat{\theta}. \quad (19)$$

A partir da expressão do campo elétrico, Eq. (15), e do campo magnético, Eq. (19), pode-se construir o vetor de Poynting. Na borda do capacitor que está sendo carregado ele será dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} \frac{q(t)}{\epsilon_0 \pi a^2} \frac{\mu_0 \epsilon_0}{2} a \frac{dE}{dt} \hat{r} = \\ &= \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{a}{(\pi a^2)^2} q \frac{dq}{dt} \hat{r}, \end{aligned} \quad (20)$$

onde usamos a Eq. (15).

A taxa com que a energia eletromagnética do capacitor, que está descarregando, diminui é obtida integrando-se o vetor de Poynting na superfície lateral do capacitor, enquanto que a energia total que saiu deste capacitor será dada pela integral desta potência com respeito ao tempo

$$\begin{aligned} \Delta U &= \int_0^\infty \mathcal{P} dt = \int_0^\infty \frac{1}{C} q \frac{dq}{dt} dt = \\ &= \frac{1}{2C} \int_0^\infty \frac{d(q^2)}{dt} dt = \frac{1}{2C} \int_{q_0}^{q_0/2} d(q_0^2) = -\frac{3q_0^2}{8C}. \end{aligned} \quad (21)$$

No capacitor que está sendo carregado, o vetor de Poynting aponta para dentro do mesmo, indicando que a energia no campo eletromagnético está aumentando. A energia armazenada no campo após a carga completa do capacitor será dada por

$$\Delta U' = \frac{1}{2C} \int_0^{q_0/2} d(q_0^2) = \frac{q_0^2}{8C}, \quad (22)$$

e o balanço de energia fornece

$$\Delta U_{total} = \Delta U + \Delta U' = -\frac{q_0^2}{4C}. \quad (23)$$

que é o resultado obtido anteriormente onde fizemos apenas referências às partículas (densidade de cargas),

enquanto aqui damos um enfoque energético em termos de campos.

Podemos agora pensar em termos do teorema de Poynting, relacionado à conservação de energia no sistema formado pelo campo eletromagnético e pela matéria, que estabelece que a diminuição de energia eletromagnética no campo é devido ao trabalho realizado sobre cargas, aqui representado pelo efeito Joule, além do fluxo de energia para o exterior, representado pela radiação do sistema. Na sua forma integral esse teorema pode ser escrito como

$$P_{Joule} + \oint_A \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{d}{dt} \iiint_V \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) dV = -\frac{dU}{dt}. \quad (24)$$

Vamos a seguir identificar e quantificar a contribuição dos dois termos responsáveis pela dissipação do sistema. Vemos que além do efeito Joule, primeiro termo da Eq. (24), o processo de irradiação, segundo termo da Eq. (24), deve ser levado em conta e eventualmente esse pode ser o efeito preponderante no mecanismo de dissipação.

5. Mecanismos de dissipação

Para que possamos descrever adequadamente o circuito que estudamos neste trabalho devemos nos lembrar que os fios que conectam os capacitores possuem uma certa resistência elétrica, e portanto dissipam energia via efeito Joule. Entretanto, a dependência temporal de $I(t)$ nos permite concluir que o sistema também irradia. Determinaremos agora quais termos são relevantes no processo de irradiação.

Se observarmos um capacitor isoladamente, concluiremos que o mesmo constitui um dipolo elétrico, cujo momento de dipolo \mathbf{p} é dado por

$$\mathbf{p}(t) = q(t)d\hat{z}, \quad (25)$$

onde $q(t)$ é a carga acumulada no capacitor no instante de tempo t , o eixo z foi escolhido como sendo a direção normal às placas do capacitor e d é a distância entre as placas [ver Fig. (2)]. Observando ambos os capacitores simultaneamente veremos que os momentos de dipolo \mathbf{p}_1 e \mathbf{p}_2 são tais que para qualquer instante de tempo t a relação

$$\mathbf{p}_1(t) + \mathbf{p}_2(t) = \mathbf{p}_0, \quad (26)$$

é satisfeita, onde $p_0 = q_0 d$.

Deste modo podemos concluir que o momento de dipolo elétrico não contribui para a irradiação, devido à completa interferência destrutiva da radiação dos dois dipolos a longas distâncias.

O momento de dipolo magnético \mathbf{m} exibe um comportamento diferente. Se considerarmos que o nosso

sistema é composto por um circuito de área A , teremos que \mathbf{m} será dado por [7]

$$\mathbf{m}(t) = AI(t) \hat{z}. \quad (27)$$

Os campos associados à irradiação de dipolo magnético são bem conhecidos [7] e podem ser usados para o cálculo do vetor de Poynting em todos os pontos do espaço. Posteriormente, integramos o vetor de Poynting numa superfície fechada, que incorpora o dipolo, para enfim determinar a potência total irradiada por este dipolo magnético, dada pela fórmula de Larmor [7]

$$P_{rad} = \frac{\ddot{m}^2}{6\pi\epsilon_0 c^5} = \frac{A^2 \ddot{I}^2}{6\pi\epsilon_0 c^5}. \quad (28)$$

Caso o sistema não irradiasse, ou seja, se o único mecanismo de dissipação fosse por efeito Joule, a corrente elétrica no circuito seria dada pela expressão (13), um decaimento exponencial com o tempo característico sendo dado por RC . Por outro lado, caso o circuito não apresentasse resistência elétrica e o mecanismo de dissipação fosse apenas por irradiação de dipolo magnético, a dinâmica da corrente elétrica seria diferente da expressão dada pela Eq. (13), mas se ainda admitirmos que a corrente cai exponencialmente na forma $I(t) = I_0 \exp(-kt) = (q_0/2)k \exp(-kt)$, teríamos a seguinte expressão para a potência dissipada por irradiação

$$P_{rad} = R_{rad} I(t)^2, \quad (29)$$

onde $R_{rad} = A^2 k^4 / 6\pi\epsilon_0 c^5$.

A constante k pode ser obtida pelo fato de que aqui toda energia é dissipada na forma de radiação, assim

$$\int_0^\infty P_{rad} dt = \frac{q_0^2}{4C}, \quad (30)$$

que gera o resultado $k^5 = 12\pi\epsilon_0 c^5 / A^2 C$, ou seja, como esperado, k é bastante grande e a corrente decai muito rapidamente.

No caso concreto em que ocorrem ambos, dissipação por efeito Joule e por irradiação, a nova expressão para a potência dissipada seria

$$P_{total} = (R + R_{rad}) I^2(t), \quad (31)$$

sendo que $I(t) = (q_0/2)k' \exp(-k't)$, e k' deve ser obtido da mesma forma que obtivemos k , ou seja, a integral da potência acima deve dar a energia total dissipada. Dessa forma obtemos $k' = 2/(R + R_{rad})C$ e a corrente elétrica no circuito dada por

$$I(t) = \frac{q_0}{(R + R_{rad})C} \exp\left(-\frac{2t}{(R + R_{rad})C}\right). \quad (32)$$

A expressão acima permite identificar os dois mecanismos de dissipação, assim como a contribuição de

cada uma delas. Como em geral $R \gg R_{rad}$, o efeito Joule é de fato o mecanismo preponderante na dissipação de energia do sistema. No entanto, no caso de ótimos condutores é a radiação quem determina a dissipação do sistema. Na verdade, o processo de dissipação ocorre por ambos os processos: a matéria esquentada e o sistema irradia. A contribuição de cada evento desses depende da relação entre a resistência elétrica dos fios e a resistência associada à emissão de ondas eletromagnéticas.

Dado que a energia total dissipada no processo não depende da resistência elétrica do circuito, o papel dessa resistência está associada ao tempo de equilíbrio do sistema e, portanto, ao espectro da radiação emitida pelo circuito, que analisaremos na próxima seção.

Podemos agora analisar a dissipação vista pelos campos. Para isso vamos dividir a análise aqui em duas etapas: campos próximos, percebendo os campos dentro do fio, esses que serão considerados como campos quase estáticos, e campos distantes, muito longe dos fios, considerados como campos irradiados. No primeiro caso, o campo elétrico dentro do fio será dado basicamente pelas cargas dos capacitores que criam um campo uniforme, ainda que dependente do tempo, pois a densidade de carga muda com o tempo, dada pela expressão

$$\mathbf{E} = -\nabla V \equiv \frac{V(t)}{d} \hat{z} = \frac{RI(t)}{d} \hat{z}, \quad (33)$$

onde na última igualdade usou-se a lei de Ohm. Nessa aproximação, o campo magnético pode ser calculado dentro e fora do fio pela lei de Ampère, e na superfície do fio vale

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi a}, \quad (34)$$

onde a é o raio do fio. Calculando-se agora o vetor de Poynting e integrando em toda superfície do fio encontra-se a expressão para a potência dissipada por efeito Joule, $P_{Joule} = RI^2$. Este é um resultado que aparece em vários livros textos de cursos de eletrodinâmica.

Para os campos distantes partimos das expressões dos potenciais retardados no calibre de Lorentz, e nesse caso os campos serão obtidos a partir do potencial vetor, já que o potencial escalar é nulo nessa região do espaço,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}', t-r/c) dv' = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int I(t-r/c) d\mathbf{l}, \quad (35)$$

a partir dessa expressão para o potencial vetor deriva-se a fórmula de Larmor, Eq. (29), que está associada à potência total irradiada, integrada sobre todas as frequências do espectro de radiação.

6. Espectro da potência da radiação emitida

Dado que o sistema irradia, é interessante saber qual o espectro dessa radiação, ou seja, a potência emitida num dado intervalo de frequências. Vale notar que este sistema não é oscilante e portanto não possui uma frequência natural de irradiação, que seria o caso se tivéssemos incluído uma auto-indutância L no circuito e assim a frequência natural de oscilação do circuito seria dada por $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. No entanto a diferença básica entre incluímos ou não a auto-indutância se manifestará como um deslocamento da distribuição espectral.

Tínhamos obtido a corrente no circuito

$$I(t) = -\frac{q_0}{R_T C} e^{-2t/R_T C}, \quad (36)$$

onde agora $R_T = R + R_{rad}$ representa todas as formas de resistência presentes no circuito. A potência instantânea será dada por

$$\mathcal{P}_{total} = \frac{q_0^2}{R_T C^2} e^{-4t/R_T C} = R_T I(t)^2. \quad (37)$$

O espectro de potência, ou seja, a potência dissipada por unidade de frequência será dada pela expressão [9]

$$P(\omega) = \mathcal{R}e[(V(\omega))^* I(\omega)] = \mathcal{R}e[(Z(\omega)I(\omega))^* I(\omega)] = R_T I(\omega)I(-\omega), \quad (38)$$

onde utilizamos a transformada de Fourier da corrente elétrica

$$I(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} I(t) e^{-i\omega t} dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{q_0}{R_T C} \int_0^{\infty} e^{-2t/R_T C} e^{-i\omega t} dt, \quad (39)$$

para assim obter

$$I(\omega) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{q_0}{R_T C} \left(\frac{1}{\frac{2}{R_T C} + i\omega} \right). \quad (40)$$

Finalmente, o espectro de potência será dado por

$$\mathcal{P}(\omega) = R_T I(\omega)I(-\omega) = \frac{q_0^2/C}{2\pi R_T C} \left(\frac{1}{\left(\frac{2}{R_T C}\right)^2 + \omega^2} \right), \quad (41)$$

que é a expressão desejada.

Esse espectro é representado por uma Lorentziana centrada na frequência zero e com semi-largura $1/R_T C$. É interessante notar os limites $R_T C \rightarrow 0$, decaimento rápido, espectro bastante largo, ou seja, emissão numa banda de frequência bastante ampla, e $R_T C \rightarrow \infty$ onde encontramos um espectro bastante estreito (quase uma função delta de Dirac). A Fig. (3) representa o espectro de potência da diferentes valores de $R_T C$.

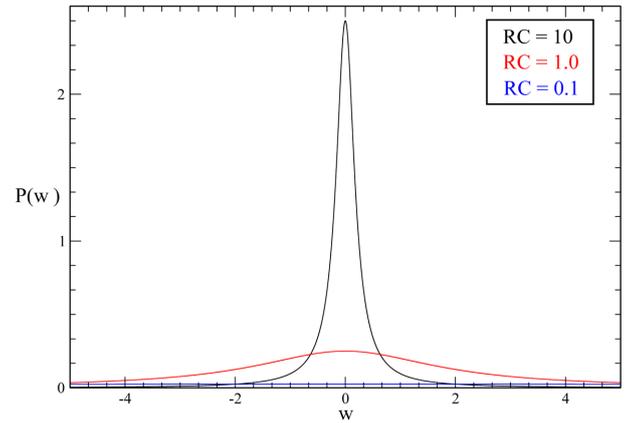


Figura 3 - Espectro de emissão do circuito para diferentes valores de RC , Eq. (41) com $q_0^2/C = 1$.

7. Conclusões

Analisamos aqui o problema dos dois capacitores tornando clara a forma como esse sistema atinge o equilíbrio. Discutimos os mecanismos de dissipação e o papel desempenhado pelo efeito Joule e pela emissão de radiação. Para circuitos onde o resistor tem valores apreciáveis, o efeito Joule é preponderante no mecanismo de dissipação. No entanto, quando pequenas resistências elétricas estão presentes no circuito, a irradiação acaba tendo bastante relevância no processo de dissipação.

Mostramos ainda que o estado final de equilíbrio será sempre o mesmo, independente de qualquer valor da resistência elétrica. O único papel da resistência elétrica é ditar o tempo de decaimento e, como consequência, o espectro da radiação emitida pelo circuito. Por exemplo, quando a resistência elétrica é muito baixa, o tempo de decaimento é muito curto e o espectro de frequências da radiação emitida é bastante largo. Para altos valores de resistências, o tempo de decaimento é bastante longo e o espectro de radiação bastante estreito e centrado na frequência zero, já que o sistema não é oscilante.

Seria possível incluir um elemento de indutância no circuito, cujo efeito final seria basicamente deslocar o espectro de frequências que estaria agora centrada na frequência de ressonância do circuito RLC , mas isso deixaremos para analisar em trabalhos futuros.

Agradecimentos

Gostaríamos de agradecer ao CNPq e a CAPES pelo apoio financeiro.

Referências

- [1] D. Halliday, R. Resnick e K. S. Krane, *Física 3* (LTC, Rio de Janeiro, 2004), 5ª ed.

- [2] D. van Delft and P. Kes, *Phys. Today* **63**, 38 (2010).
- [3] R.A. Powell, *Am. J. Phys.* **47(5)**, 460, 1979.
- [4] R.P. Mayer, J.R. Jeffries and G.F. Paulik, *IEEE Transc. Educ.* **36**, 307 (1993).
- [5] S.M. Al-Jaber and S.K. Salih, *Eur. J. Phys* **21**, 341 (2000).
- [6] T.B. Boykin, D. Hite and N. Singh, *Am. J. Phys.* **70**, 415 (2002).
- [7] D.J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics* (Pearson Education, Inc., New York, 1999), 3rd ed.
- [8] M.L. Boas, *Mathematical Methods in the Physical Sciences* (John Wiley & Sons, New York, 1983), 2nd ed.
- [9] L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995), 1st ed.