

# Rolamento e atrito de rolamento ou por que um corpo que rola pára

(Rolling friction or why a body that rolls stops)

A.V. Andrade-Neto<sup>1</sup>, J.A. Cruz, M.S.R. Miltão, E.S. Ferreira

Departamento de Física, Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana, BA, Brazil

Recebido em 14/12/2012; Aceito em 1/5/2013; Publicado em 26/9/2013

A dinâmica do movimento de rolamento de um objeto sobre uma superfície horizontal plana é estudada. Analisamos o rolamento de um corpo rígido bem como o de um corpo deformável, aplicando as leis de Newton. As soluções analíticas e suas discussões em várias situações físicas são apresentadas. Os resultados obtidos nos permitem entender as bases físicas de porque um corpo que rola se detém depois de um certo intervalo tempo. Esperamos que o presente trabalho contribua para o estudo deste tipo de movimento.

**Palavras-chave:** rolamento, atrito de rolamento, corpo rígido.

The dynamics of the rolling motion of an object on a horizontal plane is studied. We use the laws of Newton to analyze the rolling of a rigid body and of a deformable body. The analytical solutions and their discussions in various physical situations are presented. The results allow us to understand the physical basis of why the rolling motion of a body stops after a certain time interval. Also, these results should help undergraduate physics students to investigate this type of motion.

**Keywords:** rolling, rolling friction, rigid body.

## 1. Introdução

O movimento de um corpo sólido sobre uma superfície plana é uma situação bastante comum. Esse movimento pode ser um escorregamento puro, um rolamento puro (também chamado de rolamento sem deslizamento) e, no caso mais geral, rolamento com deslizamento [1]. Obviamente, a forma geométrica do corpo é fundamental para o tipo de movimento. Em geral, quando falamos de um escorregamento puro nos referimos ao movimento de um bloco sobre uma superfície, o qual na maioria das vezes é representado no contexto de um modelo de partícula, embora isto não seja muito rigoroso [2, 3]. Por sua vez, rolamento puro se refere ao movimento de um corpo que possui uma seção circular (cilindro ou esfera, por exemplo). Movimentos de corpos que rolam são muito comuns no dia a dia. Como exemplos óbvios podemos citar os movimentos das rodas de uma bicicleta ou de um automóvel.

Quando um corpo com simetria axial (um cilindro, uma esfera, um anel) rola sobre uma superfície plana e cada ponto da periferia do corpo não desliza sobre o plano, dizemos que acontece um rolamento sem deslizamento ou rolamento puro. Se  $v_{cm}$  é a velocidade de translação do centro de massa do corpo, para que ocorra rolamento puro devemos ter

$$v_{cm} = \omega R, \quad (1)$$

onde  $\omega$  é a velocidade angular de rotação do corpo em torno de um eixo que passa pelo seu centro de massa e  $R$  é o seu raio.

Neste trabalho vamos analisar a dinâmica do movimento de rolamento de um corpo sobre uma superfície horizontal plana, situação ignorada na grande maioria dos livros textos universitários. Vamos considerar duas situações: rolamento com e sem deslizamento de um corpo rígido, Seção 2, e rolamento puro de um corpo deformável, Seção 3.

## 2. Rolamento puro e com deslizamento de um corpo rígido

Vamos considerar a seguinte situação. Um corpo rígido de seção circular de raio  $R$  é lançado com velocidade inicial  $\mathbf{v}_0$  horizontal e sem rotação inicial ( $\omega_o = 0$ ) sobre uma superfície horizontal cujo coeficiente de atrito cinético entre o corpo e a superfície é  $\mu_c$ . No princípio do movimento acontece um rolamento com deslizamento e as forças que atuam sobre o corpo nesse estágio estão indicadas na Fig. 1. Como estamos considerando o corpo como rígido, a força normal  $\mathbf{N}$  passa pelo centro de massa do corpo.

<sup>1</sup>E-mail: aneto@uefs.br.

As equações de movimento são

$$F_{at} = -Ma_{cm}, \quad (2)$$

onde  $F_{at}$  é o módulo da força de atrito (no caso, força de atrito cinético, já que há um rolamento com deslizamento),  $M$  é a massa do corpo que rola e  $a_{cm}$  é a aceleração do centro de massa do corpo em relação a um referencial inercial.

A força de atrito exerce um torque em relação ao centro de massa do corpo que o faz girar no sentido horário. Tomando esse sentido como positivo temos que

$$F_{at}R = I\alpha = Mk^2\alpha, \quad (3)$$

onde  $I$  é o momento de inércia do corpo, calculado em relação a um eixo passando pelo seu centro de massa,  $\alpha$  é a aceleração angular em torno desse eixo e  $k$  é o raio de giração do corpo.

A Tabela 1 mostra os valores do raio de giração e de algumas relações úteis envolvendo essa grandeza para a esfera, o cilindro e o anel.

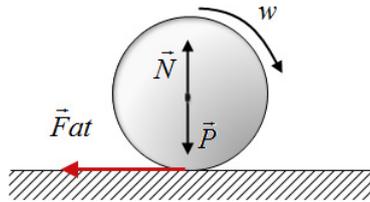


Figura 1 - Forças que atuam sobre um corpo rígido de seção circular de raio  $R$  que rola com deslizamento.

Tabela 1 - Valores do raio de giração e de algumas relações envolvendo essa grandeza para a esfera, o cilindro e o anel.

	<i>Esfera</i>	<i>Cilindro</i>	<i>Anel</i>
$k^2$	$\frac{2}{5}R^2$	$\frac{1}{2}R^2$	$R^2$
$\frac{k^2}{(k^2+R^2)}$	$\frac{2}{7} = 0,29$	$\frac{1}{3} = 0,33$	$1/2 = 0,5$
$\frac{R^2}{(R^2+k^2)}$	$\frac{5}{7} = 0,71$	$\frac{2}{3} = 0,67$	$1/2 = 0,5$

Das Eqs. (2) e (3) vemos que a força de atrito diminui a velocidade de translação do centro de massa e, ao mesmo tempo, produz um torque que faz aumentar a velocidade de rotação do corpo. Desse modo, inicialmente a velocidade de translação diminui e a velocidade de rotação aumenta até a condição de rolamento puro,  $v_{cm} = \omega R$ , ser estabelecida. O tempo transcorrido para que isso aconteça e o valor da velocidade nesse instante podem ser facilmente calculados, conforme mostrado a seguir.

A aceleração do centro de massa e a aceleração de rotação em torno do eixo que passa pelo centro do corpo são facilmente obtidas das Eqs. (2) e (3)

$$a_{cm} = -\mu_c g, \quad (4)$$

$$\alpha = \frac{R}{k^2} \mu_c g. \quad (5)$$

As velocidades de translação e de rotação são as expressões usuais do movimento retilíneo uniformemente acelerado

$$v_{cm}(t) = v_o - \mu_c g t, \quad (6)$$

$$\omega(t) = \frac{R}{k^2} \mu_c g t. \quad (7)$$

Das Eqs. (6) e (7) obtemos o tempo  $t = t_1$  para o qual teremos a condição de rolamento puro

$$t_1 = \frac{k^2}{(k^2 + R^2)} \frac{v_o}{\mu_c g}. \quad (8)$$

Utilizando os valores da Tabela 1, temos que

$$t_1 = \begin{cases} \frac{2}{7} \frac{v_o}{\mu_c g}, & \text{para uma esfera} \\ \frac{1}{3} \frac{v_o}{\mu_c g}, & \text{para um cilindro} \\ \frac{1}{2} \frac{v_o}{\mu_c g}, & \text{para um anel.} \end{cases} \quad (9)$$

Utilizando a Eq.(9) na Eq.(6) obtemos o valor da velocidade do centro de massa para a qual  $v_{cm} = \omega R$ , ou seja,

$$v_{cm}(t = t_1) = \frac{R^2}{(R^2 + k^2)} v_o = \begin{cases} \frac{5}{7} v_o, & \text{para uma esfera} \\ \frac{2}{3} v_o, & \text{para um cilindro} \\ \frac{1}{2} v_o, & \text{para um anel.} \end{cases} \quad (10)$$

O que acontece para tempos maiores que  $t_1$ ? Quais são as forças que atuam no corpo nesse caso? Supondo que haja uma força de atrito e que o sentido dessa força seja contrário ao movimento de translação, o torque produzido por essa força aumentará a velocidade angular do corpo. Então teremos um movimento de rotação cada vez mais rápido. Se, ao contrário, a força de atrito tiver o mesmo sentido do movimento de translação, haverá uma força resultante no sentido do movimento e, portanto, aumentará a velocidade do centro de massa do corpo. Ambas as situações são absurdas e violariam a segunda lei da termodinâmica. Logo, para  $t \geq t_1$ , considerando o corpo como rígido e desprezando a resistência do ar, as únicas forças que atuam no corpo que rola são a força peso e a força normal, ambas passando pelo centro de massa do corpo. Em suma, para  $t \geq t_1$  o corpo rola sem deslizamento com velocidade constante, já que a força de atrito desaparece pelas razões expostas acima. Na Ref. [4] é apresentada uma análise de entrevistas que exploram o entendimento de alunos universitários acerca desse problema, onde se constata resquícios do pensamento aristotélico na forma de explicação do movimento de rolamento.

Desse modo, podemos dividir o movimento em duas etapas. A primeira se desenrola desde o instante inicial em que o corpo lançado toca a superfície horizontal até o instante  $t = t_1$ ; enquanto a segunda etapa ocorre para  $t > t_1$ .

Na primeira etapa do movimento temos um rolamento com deslizamento ( $v_{cm} > \omega R$ ) e conforme mostram as Eqs. (6) e (7) a  $v_{cm}$  decresce linearmente com o tempo enquanto  $\omega$  cresce linearmente até o instante  $t = t_1$ . Para tempos maiores que  $t_1$  a força de atrito entre as superfícies deixa de existir e teremos um rolamento puro e, mais que isso, um movimento uniforme ( $v_{cm} = \omega R = constante$ ). A Fig. 2 ilustra essa situação para uma esfera.

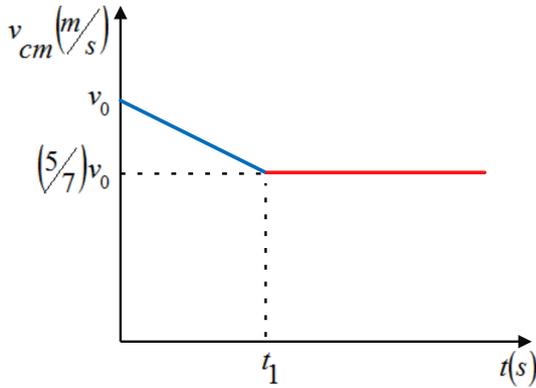


Figura 2 - Gráfico da velocidade do centro de massa em função do tempo para uma esfera lançada sobre uma superfície horizontal plana com velocidade inicial  $v_0$ .

Contudo, sabemos da experiência que um corpo rolando sobre uma superfície horizontal pára após algum tempo. Isso nos leva a seguinte questão. Como explicar esse fato já que, como vimos acima, a força de atrito se anula para  $t > t_1$ ? A resposta a essa questão será abordada a seguir.

### 3. Rolamento de um corpo deformável

#### 3.1. Atrito de rolamento

É evidente da experiência que um corpo sólido que rola em um plano horizontal perde velocidade e pára após certo tempo, em contradição com a previsão teórica para um corpo perfeitamente rígido. Por que isso acontece? A resposta a essa questão expõe o limite de aplicação do modelo de corpo rígido. Além da resistência do ar (arrasto aerodinâmico) há o atrito de rolamento que surge devido ao fato de que nem o corpo nem o plano são perfeitamente rígidos e, assim, ambos sofrem deformações, o que dá origem ao atrito de rolamento. Vamos considerar que as deformações ocorrem exclusivamente no corpo que rola. Um exemplo dessa situação seria um pneu de automóvel trafegando sobre uma pista horizontal de concreto ou asfalto. A Fig. 3 mostra as forças que atuam sobre o corpo onde desprezaremos a resistência do ar. Devido ao achatamento do corpo, o ponto de aplicação de  $N$  será deslocado para frente por uma distância  $x$  em relação ao ponto em que  $N$  atua no caso do corpo indeformável [5]; isso acontece porque a pressão na região de contato com o plano

horizontal não é uniforme, aumentando no sentido do deslocamento do centro de massa do corpo que rola,  $\vec{F}$  é uma força horizontal aplicada em uma altura  $h = R$  na direção do movimento de translação e  $\vec{F}_{at}$  é a força de atrito. As equações dinâmicas ficam agora

$$F - F_{at} = Ma_{cm} , \tag{11}$$

$$F_{at}R - Nx = I\alpha . \tag{12}$$

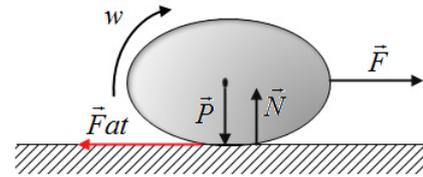


Figura 3 - Forças que atuam sobre um corpo deformável. Deve ser notado que a força  $N$  está deslocada em relação à posição de um corpo perfeitamente rígido.

Vamos inicialmente considerar que o corpo se desloca com velocidade do centro de massa constante. Para essa situação as Eqs de movimento são

$$F = F_{at} , \tag{13}$$

$$F_{at}R = Nx . \tag{14}$$

Da Eq. (14) podemos definir uma grandeza adimensional  $\mu_r$  tal que

$$\mu_r = \frac{x}{R} = \frac{F_{at}}{N} , \tag{15}$$

onde  $\mu_r$  é denominado coeficiente de atrito de rolamento ou coeficiente de resistência ao rolamento. Deve ser observado que se o corpo é perfeitamente rígido  $x = 0$  e, desse modo,  $\mu_r = 0$ . Isso explica porque no rolamento puro de um corpo rígido a força de atrito é nula. Valores típicos de  $\mu_r$  para pneus de carro sobre asfalto são da ordem de 0,01 enquanto o coeficiente de atrito estático ( $\mu_e$ ) é da ordem de 0,9, ou seja,  $\mu_r$  é cerca de 90 vezes menor que  $\mu_e$ . Esses valores explicam porque é tão mais fácil deslocar um objeto que possui rodas em comparação com o mesmo objeto sem rodas.

#### 3.2. Por que o corpo pára?

Se o corpo rola sobre uma superfície horizontal e não está submetido a uma força motriz, as Eqs. (11) e (12) ficam

$$F_{at} = -Ma_{cm} , \tag{16}$$

$$Nx - F_{at}R = -I\alpha . \tag{17}$$

Utilizando que  $N = P = Mg$  e as Eqs. (16) e (15) em (17) obtemos

$$a_{cm} = -\frac{R^2}{(R^2 + k^2)}\mu_r g = \begin{cases} -\frac{5}{7}\mu_r g, & \text{para uma esfera} \\ -\frac{2}{3}\mu_r g, & \text{para um cilindro} \\ -\frac{1}{2}\mu_r g, & \text{para um anel.} \end{cases} \quad (18)$$

A equação horária para a velocidade fica

$$v(t) = \begin{cases} v_0 - \frac{5}{7}g\mu_r t, & \text{para uma esfera} \\ v_0 - \frac{2}{3}g\mu_r t, & \text{para um cilindro} \\ v_0 - \frac{1}{2}g\mu_r t, & \text{para um anel.} \end{cases} \quad (19)$$

o que nos permite calcular o tempo  $t_p$  para o qual o corpo entrará em repouso

$$t_p = \begin{cases} \frac{7}{5}\frac{v_0}{g\mu_r}, & \text{para uma esfera} \\ \frac{3}{2}\frac{v_0}{g\mu_r}, & \text{para um cilindro} \\ 2\frac{v_0}{g\mu_r}, & \text{para um anel.} \end{cases} \quad (20)$$

Desprezando a resistência do ar e considerando, como fizemos aqui, que as deformações ocorrem exclusivamente no corpo que rola, a energia inicial do corpo é transformada em energia interna do corpo que rola provocando, assim, seu aquecimento. No caso mais geral em que ambos os corpos (o corpo que rola e o plano horizontal) se deformam, a dissipação da energia inicial do corpo provocará o aumento da energia interna de ambos os corpos.

#### 4. Conclusões

Neste trabalho consideramos a dinâmica do rolamento sobre uma superfície horizontal plana, que é tratado com diferentes abordagens em outras publicações [6, 7].

Analisamos duas situações. Na primeira consideramos um corpo rígido lançado sobre uma superfície horizontal plana não submetido a uma força motriz na direção do movimento. No estágio de rolamento puro, a força de atrito sobre o corpo anula-se, caso contrário haveria uma violação da segunda lei da termodinâmica.

Na segunda situação consideramos o rolamento de um corpo deformável (não perfeitamente rígido) e discutimos como esse fato explica porque o corpo pára após certo tempo. A matemática envolvida na análise desses movimentos é bastante simples e é acessível inclusive para estudantes do ensino médio. Apesar de sua simplicidade matemática, essas situações são de grande riqueza conceitual e, estranhamente, são ignoradas pela maioria dos livros textos universitários de física básica.

#### Referências

- [1] A. Pinto and M. Fiolhais, *Phys. Educ.* **36**, 250 (2001).
- [2] Eden V. Costa e C.A. Faria Leite, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **32**, 4301 (2010).
- [3] Osman Rosso Nelson e Ranilson Carneiro Filho, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **33**, 2308 (2011).
- [4] Osman Rosso Nelson, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **34**, 3502 (2012).
- [5] Fernando Lang da Silveira, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **33**, 1304 (2011).
- [6] D. Tabor, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* **229**, 1304 (1955).
- [7] Sol Krasner, *Phys. Teach.* **30**, 212 (1992).