

Correntes de Foucault: Aspectos básicos

(Eddy currents: Basic aspects)

M. Cattani e A. Vannucci¹

Instituto de Física, Universidade de São Paulo, 05508-090, São Paulo, SP, Brasil

Recebido em 8/10/13; Aceito em 23/11/13; Publicado em 23/5/2014

Este artigo foi escrito para mostrar aos alunos de graduação em física e engenharia como estimar as correntes de Foucault. Inicialmente fazemos uma breve análise das condições de contorno entre dois meios com diferentes parâmetros ε , μ e σ , que devem ser obedecidas tanto por campos eletromagnéticos estáticos quanto dependentes do tempo. Em seguida, usando as equações de Maxwell calculamos as “correntes de Foucault”, ou *eddy currents*, que surgem em um condutor plano metálico (paramagnético ou diamagnético) quando sobre ele é aplicado um campo magnético $\mathbf{B}(t)$ variável no tempo, gerado por um solenoide longo de seção reta circular.

Palavras-chave: Foucault, Eddy current, freio magnético, levitação magnética.

This paper was written to show to undergraduate students of Physics and Engineering how to estimate the Foucault or eddy currents, in conductors. We begin with a brief discussion about the boundary conditions at the interface of two different medias with respective parameters ε , μ and σ , which must be satisfied by both static and time dependent electromagnetic fields. Afterwards, using the Maxwell equations, we calculate the eddy currents which are induced in a plane metallic conductor (either paramagnetic or diamagnetic) when a time variable magnetic field $\mathbf{B}(t)$ produced by a long solenoid of circular cross section is applied upon it.

Keywords: Foucault, Eddy current, magnetic brake, magnetic levitation.

1. Introdução

Um tópico constantemente abordado em cursos de eletromagnetismo é o movimento de cargas no vácuo e em condutores sob a ação de campos elétrico $\mathbf{E}(t)$ e magnético $\mathbf{B}(t)$ [1-6]. No presente trabalho pretendemos mostrar como reagem as cargas livres existentes em uma placa condutora, em resposta à atuação de um campo magnético que varia no tempo. Apresentamos inicialmente as condições de contorno que devem ser obedecidas pelos campos eletromagnéticos, dependentes do tempo e estáticos, na interface entre dois meios com diferentes parâmetros ε , μ e σ . Depois calculamos, usando as equações de Maxwell, as correntes de Foucault que são criadas em um *bom condutor* plano (paramagnético ou diamagnético) quando sobre ele é aplicado um campo magnético $\mathbf{B}(t)$ variável no tempo. Em seguida calculamos a força exercida pelas correntes de Foucault sobre um solenoide que gera o campo magnético externo, além da potência dissipada pelas referidas correntes, por efeito Joule, no condutor. Como este artigo foi escrito visando os alunos de graduação, das áreas de física e engenharia, fizemos os cálculos de modo mais elementar possível. A obtenção exata dos campos magnéticos resultantes, interno e externo ao

condutor, é extremamente difícil de forma que, neste artigo, aproximações foram realizadas (dentro de um quadro simplificado, mas realístico) sem perder o devido rigor matemático.

2. Condições de contorno para os campos elétrico e magnético

Como sabemos, na superfície de separação entre dois meios (1 e 2) os campos \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} e \mathbf{H} obedecem às seguintes condições gerais de contorno [3-7]

$$\hat{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \Sigma, \quad (1)$$

$$\hat{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \boldsymbol{\kappa}, \quad (2)$$

$$\hat{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0, \quad (3)$$

$$\hat{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0. \quad (4)$$

onde \hat{n} é o versor normal à superfície de separação entre os meios (aqui considerados lineares, homogêneos e isotrópicos), $\boldsymbol{\kappa}$ a densidade superficial de corrente e Σ a densidade superficial de cargas existentes na interface

¹E-mail: vannucci@if.usp.br.

entre os meios. A condutividade elétrica será indicada por σ . Lembremos também que $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ e $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$.

Inicialmente consideraremos que os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} , de alguma forma, foram gerados em um meio não condutor (meio 2) e são aplicados sobre um material condutor (meio 1). Vamos assumir que a dependência temporal dos campos aplicados é da forma: $E(t) \approx e^{i\omega t}$ e $B(t) \approx e^{i\omega t}$; e o meio condutor pode ser diamagnético ou paramagnético [3-5]. Além disso, levaremos em conta que os campos conseguem penetrar no meio condutor somente até uma distância δ denominada *skindepth* (ou *distância de penetração*), dada por $\delta = (2/\mu\sigma\omega)^{1/2}$ [3-7]. Pode-se mostrar que, devido à variação temporal dos campos, correntes aparecem no interior do condutor em uma camada com espessura da ordem de δ [3-5,7].

De modo geral, dependendo do valor de δ , assumem-se as seguintes aproximações [3-7]

(a) $\kappa \neq 0$ quando $\delta = 0$ (*condutor perfeito*).

(b) $\kappa \approx 0$ quando $\delta \ll 1$ (*bom condutor* e frequências altas).

(c) $\kappa = 0$ quando $\delta \gg d$, onde d é a espessura da placa condutora.

Este último caso pode, inclusive, ser tratado usando a magnetostática.

2.1. Condutor perfeito ($\delta = 0$)

Analisemos, inicialmente, o caso no qual o meio 2 é não-condutor, o meio 1 é um *condutor perfeito* ($\sigma \rightarrow \infty$ e $\delta \rightarrow 0$) e o versor \hat{n} , normal à superfície de separação entre ambos, é dirigido de 1 para 2. Convencionemos que os parâmetros do condutor serão indicados por um índice c e os do meio não-condutor não terão índices. As cargas no interior de um *condutor perfeito* serão, por hipótese, tão móveis que se deslocam instantaneamente em resposta às modificações dos campos, por mais rápidas que estas sejam, e criam sempre uma densidade superficial de cargas Σ as quais se acumulam na superfície do condutor de modo a anular o campo ($\mathbf{D}_c = 0$) no interior do *condutor perfeito*.

Assim, da Eq. (1) obtemos

$$\hat{n} \cdot \mathbf{D} = \Sigma. \quad (5)$$

Analogamente, no caso de campos magnéticos externos variáveis no tempo, as cargas superficiais do condutor sempre se movem de forma a criar uma corrente superficial adequada κ , dada por

$$\hat{n} \times \mathbf{H} = \kappa, \quad (6)$$

que, por sua vez, gera um campo magnético $\mathbf{H}_c = 0$ no interior do *condutor perfeito*. Desse modo a Eq. (2) é substituída pela Eq. (6).

Quanto às outras duas condições de contorno, Eqs. (3) e (4), elas podem ser escritas na forma

$$\hat{n} \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{B}_c) = 0, \quad (7)$$

$$\hat{n} \times (\mathbf{E} - \mathbf{E}_c) = 0, \quad (8)$$

onde, novamente, a ausência de índice indica o meio não condutor e o índice c se refere ao meio condutor.

Fazendo $\mathbf{B}_c = \mathbf{E}_c = 0$ nas Eqs. (7) e (8) verificamos que na superfície de um *condutor perfeito* temos $\hat{n} \cdot \mathbf{B} = 0$ e $\hat{n} \times \mathbf{E} = 0$. Isto implica que poderia existir um campo magnético tangencial e um campo elétrico normal, não nulos, na parte externa do condutor. Assim, esse elétrico normal \mathbf{E}_\perp (perpendicular) e esse campo magnético tangencial \mathbf{H}_\parallel (paralelo) se anulariam abruptamente, tornando-se zero no interior do condutor.

2.2. Bom condutor e campos com frequências ω relativamente altas.

Um determinado meio é considerado um *bom condutor* quando a sua condutividade for bastante elevada, $\sigma \gg \omega\varepsilon$. Nessas condições, para frequências ω relativamente altas, teremos $\delta \rightarrow 0$. Ou seja, como os campos penetram pouco em um condutor, então o comportamento dos mesmos pode ser considerado aproximadamente análogo ao que temos no caso de um *condutor perfeito*. Para tratarmos este caso vamos usar um esquema de aproximações sucessivas [5]. Admitamos, em uma primeira aproximação, que imediatamente do lado de fora do condutor exista apenas um campo elétrico normal \mathbf{E}_\perp e um campo magnético tangencial \mathbf{H}_\parallel , como no caso do *condutor perfeito*. Porém, assumindo que $\kappa = 0$ é possível considerar que existirá um campo não nulo no interior do condutor, já que da Eq. (2) resulta

$$\hat{n} \times (\mathbf{H} - \mathbf{H}_c) \approx 0. \quad (9)$$

Desta última expressão vemos que na *superfície* temos $\mathbf{H}_\parallel = \mathbf{H}_{c\parallel}$, ou seja, no condutor haverá um campo paralelo à superfície igual ao campo externo \mathbf{H}_\parallel . Da mesma forma, da Eq. (4) obtemos $\mathbf{B}_\perp = \mathbf{B}_{c\perp}$.

Para meios dia ou paramagnéticos, sendo $\mu_1 \approx \mu_2 \approx \mu_0$ e levando em conta que $\mathbf{H}_\parallel = \mathbf{H}_{c\parallel}$, $\mathbf{B}_\perp = \mathbf{B}_{c\perp}$ e $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, podemos escrever que na superfície de separação $\mathbf{H} = \mathbf{H}_c$. Assumindo agora, numa primeira aproximação, que a componente normal do campo magnético $\mathbf{H}_\perp = 0$, teremos simplesmente $\mathbf{H}_c = \mathbf{H}_\parallel$.

Na Fig. 1 mostramos os campos na vizinhança de um meio bom condutor, mas não perfeito [5].

2.3. Campo magnético estático

Quando o campo magnético aplicado é estático, não há corrente superficial de cargas. Assim, como $\kappa = 0$, as Eqs. (2) e (3) são dadas por

$$\hat{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0, \quad (10)$$

$$\hat{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0, \quad (11)$$

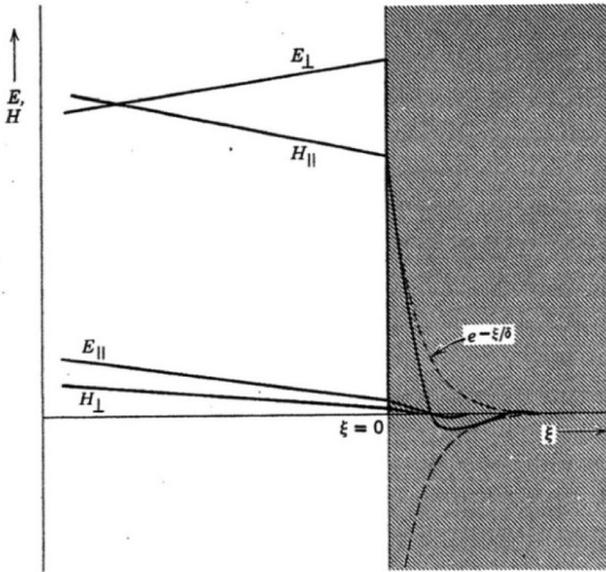


Figura 1 - Campos na vizinhança da superfície de um bom condutor, mas não perfeito. Para $\xi > 0$, sendo ξ a coordenada espacial normal à superfície do condutor, as curvas tracejadas mostram a envoltória das oscilações amortecidas de \mathbf{H}_c .

ou ainda, respectivamente, por

$$\hat{n} \cdot \mathbf{H}_2 = \frac{\mu_1}{\mu_2} \hat{n} \cdot \mathbf{H}_1, \quad (12)$$

$$\hat{n} \times \mathbf{H}_2 = \hat{n} \times \mathbf{H}_1. \quad (13)$$

Ou seja, no caso estático sempre temos $\mathbf{H}_{2//} = \mathbf{H}_{1//}$ e, para os campos normais à superfície, fica valendo a relação: $\mathbf{H}_{2\perp} = (\mu_1/\mu_2) \mathbf{H}_{1\perp}$. Portanto, como $\mu_1 \approx \mu_2 \approx \mu_0$ para a grande maioria dos materiais, temos então

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_1. \quad (14)$$

2.4. Freqüências baixas

Agora estamos em condições de analisar o caso correspondente às *freqüências baixas* e, para isso, temos de levar em conta o *skindepth* $\delta = (2/\mu\sigma\omega)^{1/2}$. Para o cobre (que é um bom condutor com $\sigma \sim 10^8$ MKS), por exemplo, quando $f = 60$ Hz temos $\delta = 0,85$ cm; e quando $f = 100$ MHz temos $\delta = 7,1 \times 10^{-4}$ cm. Assim, para *freqüências muito baixas*, $f \leq 60$ Hz, se a placa de cobre tiver 2 mm de espessura os campos a atravessariam praticamente sem sofrer alteração. Desse modo poderíamos assumir, numa boa aproximação, uma situação *magnetostática* ($\omega \rightarrow 0$), pondo $\kappa = 0$. Assim estaria satisfeita a condição de contorno (14), ou seja, $\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_1$. Da mesma forma, se o campo magnético externo for perpendicular à placa de cobre, ele continuará sendo perpendicular à superfície da placa no interior do condutor. Uma justificativa matemática desse fato pode ser vista no Apêndice A.

3. Correntes de Foucault

Para uma descrição realística de movimentos de elétrons em condutores metálicos gerados por campos elétricos $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e magnéticos $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ externos, temos de levar em conta que nos metais há uma densidade volumétrica $n = N/V$ muito grande de “elétrons de condução” [1,2]. Eles não são exatamente “livres”; estão na verdade interagindo entre si e colidindo caoticamente com os átomos da rede. Para o caso de *bons condutores* metálicos (diamagnéticos ou paramagnéticos) tais como o *Au*, *Pt*, *Cu*, etc., que possuem $n \sim 10^{28}$ elétrons/m³, o *caminho livre médio* dos elétrons é da ordem de $\ell \sim 10^{-7}$ m, enquanto que o tempo livre médio entre duas colisões é $\tau \sim 10^{-14}$ s. Como sabemos, o campo \mathbf{E} gera no meio condutor uma corrente $\mathbf{J} = n e \mathbf{v}_d$, onde \mathbf{v}_d é a velocidade de arrastamento ou de “drift”, dada por $\mathbf{v}_d = e \mathbf{E} \tau / m$ [1,2]. O campo \mathbf{B} , por outro lado, gera uma força $|\mathbf{F}_B|$ sobre os elétrons da ordem de $|\mathbf{F}_B| = e v_d B$. Comparando o módulo desta força magnética com o da força elétrica $F_e = eE$, temos $F_B/F_e \sim (e/m)\tau B$. Para valores usuais de B , ou seja $B \leq 1$ T, e levando em conta que $(e/m) = 1,76 \times 10^{11}$ C/kg, verificamos que $F_B/F_e \sim 10^{-3}$. Ou seja, os efeitos do campo \mathbf{B} são muito pequenos comparados com os efeitos do campo \mathbf{E} . Desse modo, numa primeira aproximação, assumiremos que a corrente elétrica pode ser descrita simplesmente pela lei de Ohm $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, onde a condutividade σ pode ser estimada por $\sigma = ne^2\tau/m$ [1,2].

Vamos então investigar a formação de correntes elétricas num condutor desprezando os efeitos da força magnética. Para descrever o sistema macroscópico podemos utilizar as equações de Maxwell ou a equação de transporte de Boltzmann [8,9].

Analisemos o caso em que um campo magnético variável no tempo $\mathbf{B}(x, y, z, t)$, gerado (no vácuo) por um solenóide circular de raio R , é aplicado sobre um condutor plano metálico, conforme vemos na Fig. 2. A placa metálica condutora é “macroscópica”, ou seja, tem dimensões onde efeitos quânticos são desprezíveis, os quais surgem somente para sistemas com dimensões menores do que 10 nm [10].

Consideremos a placa estando num plano (x, y) , passando por $z = 0$ e com o eixo z coincidindo com o eixo de simetria do solenóide, apontando positivamente para o meio condutor.

Numa primeira aproximação, para variações temporais dos campos com freqüências ω relativamente elevadas, vamos considerar o metal como sendo um “condutor perfeito”. Nessas condições, conforme discutido no início, o campo magnético não penetra na placa; ele se torna nulo no interior do metal de forma a só haver um campo magnético tangente à superfície do metal. No Apêndice B mostramos como estimar a configuração do campo externo ao condutor usando o “método de imagens”, na suposição de um “condutor perfeito”. Numa

segunda aproximação, assumiremos que a placa é um “bom condutor”, ou seja, que ela tem uma condutividade muito grande, porém finita.

Então, partindo das equações de Maxwell, mostraremos o mecanismo pelo qual podem aparecer campos magnéticos e elétricos dentro do condutor. As correntes elétricas $\mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E}_c$, onde \mathbf{E}_c é o campo dentro do condutor, são ilustradas em vermelho na Fig. 2. Elas são as *correntes de Foucault*.

As equações de Maxwell relevantes para a resolução deste problema são [3-5,7]

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (16)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} = \mu \sigma \mathbf{E}, \quad (17)$$

lembrando que a Eq. (17) (sem a derivada temporal do campo elétrico) será sempre uma boa aproximação nas situações em que a variação temporal dos campos for pequena comparada com o tempo livre médio dos elétrons no condutor [7].

Das Eqs. (15) e (16) obtemos então

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = -\mu \sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (18)$$

Vamos assumir que o meio seja homogêneo com condutividade σ e permeabilidade magnética μ constantes. Lembrando que $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ temos que a Eq. (16) pode ser escrita da forma $\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu \nabla \cdot \mathbf{H} = 0$. Dessa maneira, como

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H},$$

e, utilizando novamente a Eq. (16), temos

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (19)$$

onde ∇^2 corresponde ao operador laplaciano.

Muito longe do meio condutor o campo $\mathbf{B}(x, y, z, t)$ do solenóide (considerado muito longo) é dado por $\mathbf{B}(x, y, z, t) = \mathbf{B}_0(x, y, z) e^{-i\omega t}$, de forma que

$$\mathbf{B}_0(x, y, z) = \mu_0 \mathbf{H}_0(x, y, z).$$

Ao aproximarmos o solenóide da placa condutora o campo é modificado devido à interação com o material condutor onde são geradas as correntes de Foucault. Assumiremos que o campo externo alterado seja agora dado por $\mathbf{H}(x, y, z) e^{-i\omega t}$. No caso de um *bom condutor*, dia ou paramagnético, se considerarmos variações no tempo correspondentes a frequências ω *relativamente elevadas* (e levando em conta que $\mu \approx \mu_0$), vemos, de acordo com o que foi discutido anteriormente, que nas *proximidades* da superfície da placa condutora são válidas as seguintes condições de contorno: (1°) as componentes normais $H_{\perp} = H_z$ dos campos internos e externos ao condutor são nulas e (2°) $\mathbf{H}_{//} = \mathbf{H}_{//c}$, onde $\mathbf{H}_{//}$ e $\mathbf{H}_{//c}$ são os campos paralelos à superfície de separação dos meios no exterior e no interior do condutor, respectivamente.

Devido à simetria plana do problema vamos assumir que o campo $\mathbf{H}_c(x, y, z, t)$ nas vizinhanças da superfície só deve depender de z e do tempo t , ou seja, $\mathbf{H}_c = \mathbf{H}_c(z, t)$. Assim, como $\nabla \cdot \mathbf{H}_c = 0$ temos $\frac{\partial H_{cz}(z, t)}{\partial z} = 0$.

Como $H_{cz}(z = 0, t) = 0$ na superfície do condutor, a componente H_{cz} será também sempre nula em qualquer parte do condutor. Desta forma, considerando $\mathbf{H}_c(z, t) = \mathbf{H}_c(z) e^{-i\omega t}$ no condutor, temos da Eq. (19)

$$\frac{\partial^2 H_c(z)}{\partial z^2} + \kappa^2 H_c(z) = 0, \quad (20)$$

onde

$$\kappa = \sqrt{i\mu_0\sigma\omega} = (1+i) \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma\omega}}.$$

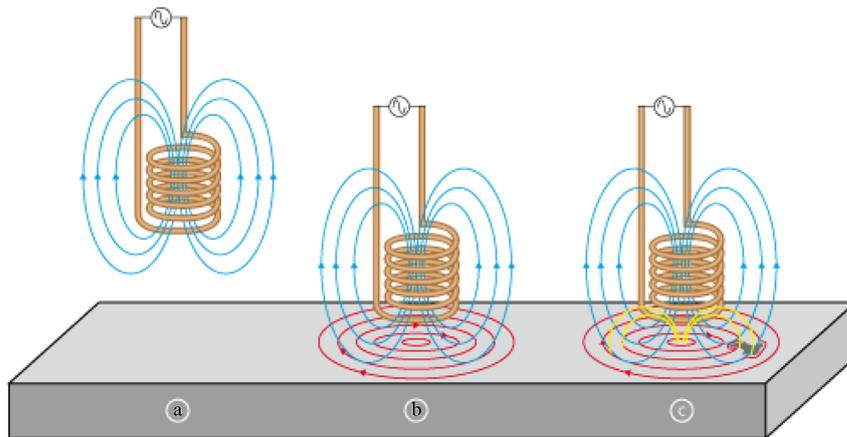


Figura 2 - Ilustração mostrando a formação das correntes concêntricas de Foucault à medida que aproximamos o solenóide do condutor plano (vide a e b) [11]. São também mostradas as linhas de campo magnético geradas pelas correntes de Foucault em oposição (vide c) ao campo externo aplicado, de acordo com a lei de Lenz.

Levando em conta que em $z = 0$ temos $\mathbf{H}_c(z = 0) = \mathbf{H}_{//}$, então obtemos, integrando a Eq. (20)

$$\mathbf{H}_c(z, t) = \mathbf{H}_{//} e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\frac{z}{\delta} - \omega t)}, \quad (21)$$

onde a distância

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$$

corresponde à “profundidade de penetração” (*skindepth* ou *penetration depth*) do campo magnético externo dentro do condutor [3-5,7].

Levando em conta a Eq. (17) temos ainda

$$\mathbf{E}_c \approx \frac{\nabla \times \mathbf{H}_c}{\sigma}. \quad (22)$$

Considerando \hat{n} como sendo o versor normal à superfície externa do condutor, e lembrando que o operador rotacional pode, neste caso, ser escrito como $\nabla \times = -\hat{n} \frac{\partial}{\partial z}$, a Eq. (22) fica sendo

$$\mathbf{E}_c = -\hat{n} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \mathbf{H}_c}{\partial z}. \quad (23)$$

Como $\mathbf{H}_c = \mathbf{H}_{//} e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\frac{z}{\delta} - \omega t)}$, a expressão acima fica então sendo dada por

$$\mathbf{E}_c \approx \frac{1}{\delta \sigma} (1 - i) (\hat{n} \times \mathbf{H}_{//}) e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\frac{z}{\delta} - \omega t)}. \quad (24)$$

Pegando a parte real desta Eq. (24) e levando em conta que $\hat{n} \times \mathbf{H}_{//} = H_{//} \hat{\varphi}$, onde $\hat{\varphi}$ é o versor tangente definido no sistema de coordenadas polares [5], temos

$$\mathbf{E}_c \approx \frac{1}{\delta \sigma} H_{//} e^{-\frac{z}{\delta}} \sin(\omega t) \hat{\varphi}. \quad (25)$$

Na Fig. 2 o versor $\hat{\varphi}$ é tangente às circunferências desenhadas no plano paralelo à superfície do condutor.

Assim, as densidades de corrente de Foucault \mathbf{J}_c no plano condutor são dadas, usando a Eq. (25), por

$$\mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E}_c = \frac{1}{\delta} H_{//} e^{-\frac{z}{\delta}} \sin(\omega t) \hat{\varphi}, \quad (26)$$

de onde constata-se que as *correntes de Foucault* são induzidas no interior do condutor em uma camada metálica de espessura $\sim \delta$, e que elas circulam em torno do eixo de simetria do solenóide em circunferências concêntricas com raios ρ (vide Fig. 2).

4. Força do plano condutor sobre um solenóide

Supondo agora que a base do solenóide (vide Fig. 2) esteja a uma altura h da superfície metálica, o campo $\mathbf{H}_{//}$ gerado pela corrente que circula por ele, num ponto ρ distante do eixo z de simetria do solenoide, será representado por $\mathbf{H}_{//}(h, \rho)$. Assim, a Eq. (26) fica escrita como

$$\mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E}_c = \frac{1}{\delta} H_{//}(h, \rho) e^{-\frac{z}{\delta}} \sin(\omega t) \hat{\varphi}. \quad (27)$$

Como o cálculo exato de $\mathbf{H}_{//}(h, \rho)$ é extremamente complicado, no *Apêndice C* estimamos $\mathbf{H}_{//}(h, \rho)$ supondo que ele seja criado por uma espira muito distante de um *condutor perfeito*. Da Eq. (26) verifica-se que as *correntes de Foucault* são induzidas no interior do condutor, em uma camada metálica de espessura da ordem de δ ; e que elas circulam em torno do eixo de simetria do solenóide em circunferências concêntricas com raios ρ (vide Fig. 2). As correntes $I(t)$ no solenóide e no condutor circulam em sentidos opostos, segundo a lei de indução de Faraday, gerando uma força de repulsão F_z entre o solenóide e a placa condutora.

Da Eq. (26) constata-se que as correntes de Foucault diminuem exponencialmente de intensidade à medida que os campos penetram no condutor, de acordo com o termo $\exp(-z/\delta)$. Isto é ilustrado na Fig. 3 [11].

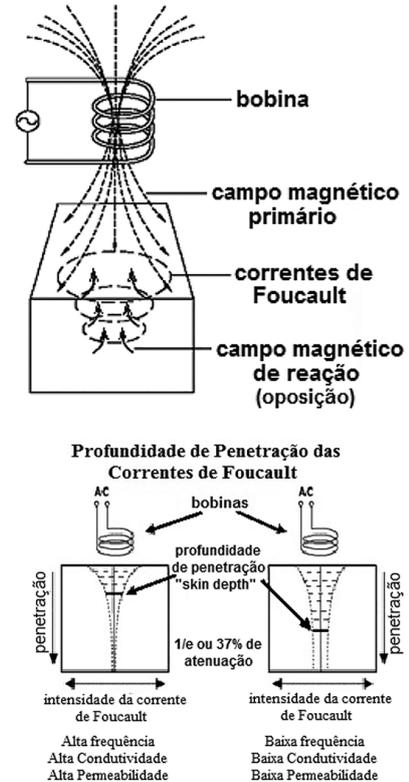


Figura 3 - Esquemas [11] mostrando a diminuição exponencial $\exp(-z/\delta)$ da intensidade da corrente de Foucault ou *eddy currents* à medida que a profundidade z cresce. A distância $\delta = (2/\mu\sigma\omega)^{1/2}$ é chamada de *depth penetration*, ou simplesmente *skin depth* [3].

A densidade de corrente \mathbf{J}_c está confinada numa região delgada de espessura δ sob a superfície do condutor, que é equivalente a uma corrente superficial eficaz κ_{ef}

$$\kappa_{ef} = \int_0^{\infty} J_c dz = \hat{n} \times \mathbf{H}_{//}. \quad (28)$$

Vemos então que um bom condutor, para frequências altas, se comporta praticamente como um condutor perfeito, com a densidade superficial de corrente κ substituída por uma corrente superficial equivalente que está, na realidade, distribuída em uma camada muito delgada, mas finita, sob a superfície [12, 13].

As correntes de Foucault causam dissipação de energia do campo eletromagnético, em forma de calor, pelo efeito Joule. O valor médio da potência Joule dissipada é dada por

$$P = \int \langle \mathbf{J}_c \cdot \mathbf{E}_c \rangle dV = \int \sigma \langle \mathbf{E}_c^2 \rangle dV = \frac{1}{2\delta\sigma} |\kappa_{ef}|^2 \quad (29)$$

onde os símbolos lógicos $\langle \dots \rangle$ indicam uma média no tempo. A Eq. (29) mostra que a grandeza $1/\delta\sigma$ tem o papel de uma resistência superficial do meio condutor. A força F_z entre a placa e o solenóide pode ser estimada por [4, 14]

$$F_z = \frac{1}{2\mu} \int_{(S)} B_{//}^2(h, \rho) dS, \quad (30)$$

onde $B_{//}(h, \rho) = \mu H_{//}(h, \rho)$ e a integral é sobre uma superfície (S) da placa; lembrando ainda que a força por unidade de área é igual à densidade de energia magnética.

Mais detalhes sobre *eddy currents* e *skindepth* para condutores bons e pobres (não metais) podem ser vistos nas Refs. [14] e [15], além de aplicações práticas tais como, por exemplo, levitação magnética [15], frenagem e detecção de metais [11-14].

Apêndice A - Aproximação magnetostática

Supondo $\mu \approx \mu_0$, tem-se que no caso geral $\mathbf{H}(\vec{r}, t)$ obedece à Eq. (19)

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = i\mu_0 \sigma \omega \mathbf{H} = \frac{2i\mathbf{H}}{\delta^2}, \quad (31)$$

onde ∇^2 é o operador laplaciano. De acordo com o que foi discutido, o campo magnético $\mathbf{H}_c(z, t)$ dentro da placa condutora é dado por

$$\mathbf{H}_c(z, t) = \mathbf{H}_S e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\frac{z}{\delta} - \omega t)}, \quad (32)$$

onde $\mathbf{H}_S = \mathbf{H}_S(z=0)$ é o campo na superfície da placa. De acordo com esta Eq. (32), quando a espessura da placa d for tal que $\delta \gg d$, o módulo do campo no interior da placa permanece praticamente constante. Isto ocorre, por exemplo, para campos estáticos quando $\omega \rightarrow 0$, pois $\delta = (2/\mu\sigma\omega)^{1/2} \rightarrow \infty$. Nessas condições, o efeito da movimentação de cargas livres no condutor pode ser desprezado. Assim, *ab initio*, poderíamos assumir que $\kappa = 0$, que seria semelhante (pelo menos para

as condições de contorno) a um caso magnetostático (como já discutido).

Landau & Lifschitz chegam a essas mesmas conclusões colocando $\delta \rightarrow \infty$ na Eq. (31) e resolvendo a equação $\nabla^2 \mathbf{H} = 0$ [6].

Essa aproximação magnetostática é levada em conta em artigos onde correntes de Foucault são criadas em películas de metal líquido de *Ga In Sn* [16,17].

Apêndice B - Campo magnético gerado pelas correntes de Foucault

As correntes de Foucault se distribuem sobre a placa condutora de acordo com a Eq. (24), ou seja

$$\mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E}_c = \frac{1}{\delta} H_{//}(h, \rho) e^{-\frac{z}{\delta}} \sin(\omega t) \hat{\varphi}. \quad (33)$$

Como elas estão contidas numa profundidade δ e distribuídas em anéis infinitesimais concêntricos com raio ρ , os elementos de corrente $dI(\rho, t)$ nesses anéis (espiras de raio ρ) são dadas por (omitindo a parte temporal)

$$dI(h, \rho) \approx \mathbf{J}_c \delta d\rho = H_{//}(h, \rho) d\rho. \quad (34)$$

Esses elementos de correntes dI geram uma contribuição dH para o campo magnético no centro da espira externa, que está a uma altura h da placa, dado por [18]

$$dH(h, \rho) = \frac{1}{2\pi} dI(h, \rho) \frac{\rho^2}{(h^2 + \rho^2)^{3/2}}. \quad (35)$$

Assim, levando em conta esta Eq. (35), no centro da espira externa há um campo $H(h)$ gerado pelas correntes de Foucault

$$H(h) = \int dH(h, \rho) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\rho^2}{(h^2 + \rho^2)^{3/2}} dI(h, \rho) = \int H_{//}(h, \rho) \frac{\rho^2}{(h^2 + \rho^2)^{3/2}} d\rho. \quad (36)$$

Agora, levando em conta o resultado obtido no Apêndice C

$$H_{//}(h, \rho) = \frac{\mu_0 m}{2\pi} \frac{h \rho}{(h^2 + \rho^2)^{5/2}},$$

teremos, usando a Eq. (36)

$$H(h) = \frac{\mu_0 m}{(2\pi)^2} h \int_0^\infty \rho^3 \frac{d\rho}{(h^2 + \rho^2)^4} = \frac{\mu_0 m}{(2\pi)^2} 24\pi h^3. \quad (37)$$

Finalmente, como o campo $H(R)$ no centro da espira externa que tem raio R é dado por $H(R) =$

$(\mu_0 m / 2\pi R^3)$ [19], vemos que a razão $H(h)/H(R)$ resultará

$$\frac{H(h)}{H(R)} = \frac{R^3}{24\pi h^3} = \frac{1}{24\pi} \left(\frac{R}{h}\right)^3. \quad (38)$$

De acordo com este último resultado, quando $h > R$ o campo devido às correntes de Foucault será muito pequeno comparado com o campo da bobina externa. Assim, o campo irá provocar na bobina apenas uma pequena alteração de sua corrente $I(t)$.

Apêndice C - Campo $H_{//}(h, \rho)$ criado por uma espira próxima de um condutor perfeito plano

Consideremos uma espira isolada com N fios percorridos por uma corrente I . Se a área de sua seção reta é $\mathbf{A} = A \hat{\mathbf{k}}$, o seu momento de dipolo magnético será $\mathbf{m} = NIA$ [1-6]. O campo magnético gerado por essa espira num ponto P muito longe do seu centro é dado, numa “aproximação dipolar”, por [3-5]

$$H_r(r, \theta) = \frac{\mu_0 m \cos \theta}{2\pi r^3}, \quad (39)$$

$$H_\theta(r, \theta) = \frac{\mu_0 m \sin \theta}{4\pi r^3}.$$

Os campos são calculados em um sistema de coordenadas com origem do centro O da seção reta da espira, sendo \mathbf{r} a distância de P ao centro O . O momento de dipolo magnético \mathbf{m} está orientado ao longo do eixo z perpendicular ao plano da espira e o ângulo θ é formado entre \mathbf{r} e o eixo z . As Eqs. (39) valem somente para distâncias muito maiores que o diâmetro da espira.

Supondo que essa espira esteja próxima de um “condutor perfeito” plano, estimaremos, numa primeira aproximação, o campo $H_{//}(h, \rho)$ usando o “método de imagens”. No caso geral, sendo I a corrente elétrica real no vácuo, a corrente I_{im} imagem criada num meio com permeabilidade magnética μ , pode ser expressa por [15, 20]

$$I_{im} = \frac{\mu - 1}{\mu + 1} I. \quad (40)$$

Assumindo que um “condutor perfeito” se assemelha a um material diamagnético perfeito, como um supercondutor [15], podemos fazer $\mu \rightarrow 0$ na Eq. (40) resultando $I_{im} = -I$. Obtemos assim o dipolo magnético imagem $\mathbf{m}_{im} = -\mathbf{m}$. Na Fig. 4 vemos a configuração dos campos magnéticos dos dipolos \mathbf{m} e \mathbf{m}_{im} .

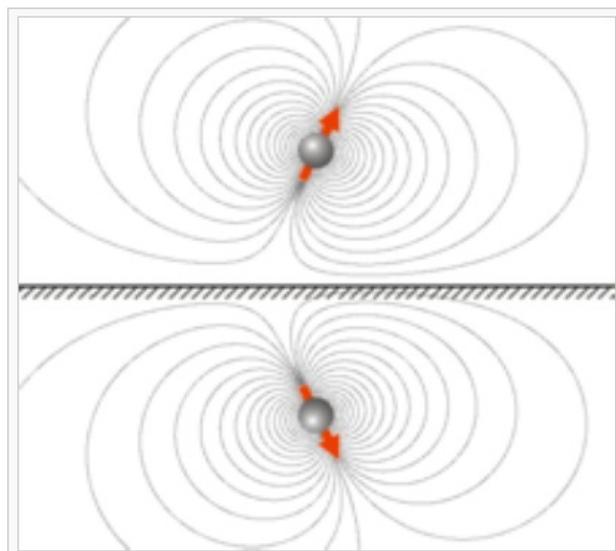


Figura 4 - Campos resultantes no interior e no exterior do “condutor perfeito” devido à superposição dos campos magnéticos dipolares criados pelos dipolos \mathbf{m} e \mathbf{m}_{im} [18].

Note na Fig. 4 o campo magnético normal à superfície $\mathbf{H}_\perp = 0$, na interface entre os dois meios. Levando em conta que no nosso caso \mathbf{m} está apontado perpendicularmente para baixo e o \mathbf{m}_{im} perpendicularmente para cima, o campo tangencial $H_{//}$ é dado, usando a Eq. (39), por

$$H_{//}(r, \theta) = 2H_\theta(r, \theta) \cos \theta = \frac{\mu_0 m \cos \theta \sin \theta}{2\pi r^3}. \quad (41)$$

Suponhamos agora que a base do solenóide esteja a uma altura h da superfície metálica. Nesta situação, campo $H_{//}$ gerado por ele num ponto com coordenadas (h, ρ) na superfície do metal, onde ρ é a distância do ponto ao eixo de simetria do solenóide, é dado por

$$H_{//}(h, \rho) = \frac{\mu_0 m}{2\pi} \frac{h \rho}{(h^2 + \rho^2)^{5/2}}, \quad (42)$$

tendo-se considerado na Eq. (41) que $r = (h^2 + \rho^2)^{1/2}$, $\sin \theta = \rho/r$ e $\cos \theta = h/r$.

Agradecimento

Os autores agradecem a bibliotecária Virginia de Paiva por sua valiosa ajuda na obtenção de textos que foram utilizados como referência neste artigo.

Nota

Nos livros, checar as cidades das editoras. Enviar as cidades que faltam.

Referências

[1] D. Halliday e R. Resnick, *Física 3* (Livros Técnicos e Científicos, 1978).

- [2] R.A. Serway, *Física 3* (Livros Técnicos e Científicos, 1992).
- [3] J.R. Reitz, F.J. Milfordand, R. W. Christy, *Fundamentos da Teoria Eletromagnética* (Campus, 1982).
- [4] J.A. Stratton, *Electromagnetic Theory* (McGraw-Hill, 1941).
- [5] J.D. Jackson, *Eletrodinâmica Clássica* (Guanabara Dois, 1983).
- [6] L.D. Landau and E.M. Lifchitz, *Théorie du Champ* (Éditions de La Paix, 1963).
- [7] L.D. Landau, E.M. Lifchitz and L.P. Pitaevskii, *Electrodynamics of Continuous Media* (Elsevier, 1984).
- [8] K. Huang, *Statistical Mechanics* (John Wiley & Sons, 1963).
- [9] M. Cattani, <http://publica-sbi.if.usp.br/PDFs/pd1671.pdf>, *Boltzmann Transport Equation and the Electrical and Thermal Conductivities of Metallic Bulks* (2012).
- [10] M. Cattani, <http://publica-sbi.if.usp.br/PDFs/pd1672.pdf>, *Electrical Conductivity of Very Thin Metallic Films* (2012).
- [11] Google, *Eddy currents*: see images.
- [12] http://en.wikipedia.org/wiki/Skin_effect#CITEREFHayt1981
- [13] http://en.wikipedia.org/wiki/Eddy_current
- [14] B. Novak and S. Pekarek, *Rev. Sci. Instrum.* **41**, 369 (1970).
- [15] M.D. Simon, L.O. Heflinger and A.K. Geim, *Am. J. Phys.* **69**, 702 (2001).
- [16] P. Hammond, *The Institution of Electrical Engineers* (Monograph No. 379, May 1960).
- [17] http://en.wikipedia.org/wiki/Method_of_images
- [18] F.W. Sears, *Física* (Livro Técnico e Científico, 1956), *Tomo II*.
- [19] J. Burguette and A.M. Miranda, *Magnetohydrodynamics* **48**, 69 (2012).
- [20] Y. Fautrelle and A.D. Sneyd, *Eur. J. Mech. B Fluids* **24**, 91 (2005).