

Ressonância em bússolas acopladas

(*Resonance in coupled compasses*)

Jalves S. Figueira¹

Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, PR, Brasil
Recebido em 5/7/2014; Aceito em 24/10/2014; Publicado em 31/3/2015

Neste trabalho analisamos as pequenas oscilações de duas bússolas acopladas. O padrão das oscilações e frequências de ressonância das agulhas é comparado com o modelo de um sistema constituído por dois osciladores massa-mola acoplados por uma mola. As medidas e análise são realizadas com base em vídeos produzidos em condições controladas e com o auxílio do *software* de análise de vídeos *Tracker*.

Palavras-chave: ressonância, oscilações harmônicas, sistema massa-mola, bússolas acopladas.

In this study, we explored the small oscillations of two coupled compasses. The pattern of oscillations and resonance frequencies of the needles is compared with the model of a system comprised by two spring-mass oscillators coupled by a spring. The measurements and analysis are performed on the basis of videos produced under controlled conditions and with the aid of Tracker video analysis software.

Keywords: resonance, harmonic oscillations, mass-spring system, coupled compasses.

1. Introdução

No campo das oscilações harmônicas, o pêndulo simples e o sistema massa-mola são os instrumentos usados nas atividades didáticas de ensino. Com o objetivo de apresentar um material adicional para o enriquecimento das aulas de física, exploramos neste trabalho as vibrações das agulhas de duas bússolas pequenas colocadas próximas uma da outra, ou seja, acopladas.

As atividades desenvolvidas exploram os conteúdos no campo das oscilações harmônicas, tais como: sistemas periódicos, oscilador massa-mola e sistemas acoplados ressonantes.

Sistemas com movimentos oscilatórios constituem um dos campos mais ricos da física. Inúmeros fenômenos no campo da mecânica, eletromagnetismo e física atômica são descritos por vibrações periódicas, com equações similares às do oscilador harmônico simples. Essas equações são chamadas de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes.

Um dos objetivos deste trabalho é ilustrar as similaridades existentes entre sistemas físicos de diferentes naturezas. Similares ao pêndulo e sistema massa-mola, as pequenas oscilações livres da agulha de uma bússola também são descritas por uma equação diferencial linear de coeficientes constantes. A partir desta análise, procuramos apresentar uma discussão comparando as oscilações e frequências de duas bússolas acopladas com

as oscilações de um sistema linear composto por um conjunto de oscilador massa-mola acoplado por uma mola

Na Ref. [1] os autores propõem um sistema similar de acoplamento utilizando um conjunto de pêndulos magnéticos. Na análise, usando as equações de Lagrange, sugerem também atividades experimentais para medida do campo magnético da terra.

Neste artigo, também sugerimos atividades experimentais para o laboratório didático usando *softwares* de vídeo-análise. Estas ferramentas estão cada vez mais presentes nas atividades de sala de aula ou como recurso nos ambientes virtuais de aprendizagem, principalmente no Ensino a Distância (EaD). Na Ref. [2] os autores descrevem as vantagens e possibilidades do uso de softwares de vídeo-análise como recurso didático.

Nas medidas dos deslocamentos angulares das agulhas e, análise das oscilações e frequências utilizamos o *software* de análise de vídeos e modelagem *Tracker*, ver Refs [3-5]. Para tal, foram produzidos vídeos de experimentos controlados e nas condições iniciais necessárias para produzir o fenômeno de batimento, determinado em função de um acoplamento fraco entre as bússolas acopladas. O material apresentado neste trabalho é destinado aos estudantes das primeiras séries dos cursos universitários de física.

A descrição dos tópicos tem a seguinte sequência: na seção 2 são discutidas as oscilações da agulha de

¹E-mail: figueira@utfpr.edu.br.

uma bússola simples baseadas no modelo do oscilador harmônico; na seção 3 é construído o modelo de um sistema composto por duas bússolas acopladas; na sequência, seções 4 e 5 respectivamente, a descrição é feita com base no modelo de um sistema de dois oscilador massa-mola acoplados, cuja análise é comparada com as medidas obtidas de um experimento controlado e com uso do *software Tracker*.

2. Bússola simples - Oscilador harmônico

Consideremos inicialmente a agulha de uma bússola simples imersa no ar. As oscilações livres da agulha imantada são determinadas por uma única coordenada, dada pelo ângulo de desvio θ em relação à posição de equilíbrio. Para tal, a agulha imantada com orientação na direção horizontal do campo magnético terrestre \mathbf{B}_T está apoiada em seu centro de gravidade por um pequeno pino vertical.

No modelo de dipolo magnético a orientação e magnitude do campo magnético da agulha são determinadas por um vetor momento de dipolo magnético $\vec{\mu}$ referente ao dipolo magnético de uma espira de corrente i e área orientada A , descrito na Ref. [6]. A Fig.1 ilustra a agulha da bússola com a orientação no plano de coordenadas xy .

Se defletirmos a agulha, no plano horizontal de um pequeno ângulo θ em relação à posição de equilíbrio, ilustrado na Fig. 1, um torque restaurador do campo \mathbf{B}_T atua em relação ao ponto de suspensão, resultado da interação magnética entre os campos. A ação do torque produz uma diminuição de θ , usando a regra da mão direita para o produto vetorial, vemos que o resultado é uma rotação no sentido horário. Com uma simples comparação com as oscilações de um pêndulo no campo gravitacional, verifica-se que o toque restaurador tem direção do eixo z e magnitude dada por

$$(\tau)_z = -\mu B_T \text{sen}\theta. \quad (1)$$

O sinal negativo na Eq. (1) indica que o torque se opõe ao deslocamento angular da agulha medido em torno da posição de equilíbrio.

Para este caso, de acordo com a 2ª Lei de Newton para rotações temos que a ação do torque produz uma variação no tempo do momento angular $(L)_z$ em relação ao ponto de suspensão. O momento angular (L) tem intensidade proporcional à velocidade angular $L = I\omega$, cuja constante de proporcionalidade é o momento de inércia (I) da agulha. Desta forma, escreve-se a evolução no tempo do sistema pela seguinte equação diferencial

$$\mu B_T \text{sen}\theta = -I \frac{d\omega}{dt}. \quad (2)$$

Devido à presença da função seno a equação não é linear, e, portanto não tem solução simples. Similar à

análise das oscilações de um pêndulo, devemos restringir os deslocamentos a pequenos desvios da posição de equilíbrio. Para tal usamos a aproximação $\text{sen}\theta \cong \theta$, o resultado é uma equação linear

$$\ddot{\theta} + \frac{\mu B_T}{I} \theta = 0, \quad (3)$$

onde $\ddot{\theta}$ é a derivada segunda em relação ao tempo do deslocamento angular.

A Eq. (3) tem a mesma forma da equação de um pêndulo, e portanto, é similar ao sistema massa-mola, ou seja, ao movimento harmônico simples. Sendo assim, usando a aproximação $\theta \cong x/l$, podemos descrever os deslocamentos angulares θ em função dos deslocamentos lineares x para determinado ponto da extremidade da agulha distante l da origem. Aproximação válida somente quando os arcos da abertura angular são confundidos pelas cordas. O resultado é a equação do movimento harmônico simples

$$\ddot{x} + \frac{\mu B_T}{I} x = 0, \quad (4)$$

cujas solução é uma função harmônica com frequência angular $\omega_0 = \sqrt{\frac{\mu B_T}{I}}$.

O modelo descrito nos parágrafos acima não é realístico, não foram consideradas as forças de amortecimento que diminuem as amplitudes das oscilações levando a agulha ao repouso. Duas são as causas de dissipação da energia: a primeira e mais importante é a resistência que o fluido, neste caso o ar, oferece ao deslocamento da agulha. Determinada por uma função bastante complexa, entretanto para baixas velocidades e considerando a rotação em torno de um eixo fixo a resistência depende da viscosidade sendo proporcional à velocidade angular. O resultado é um torque definido por $\tau = -\gamma \frac{d\theta}{dt}$.

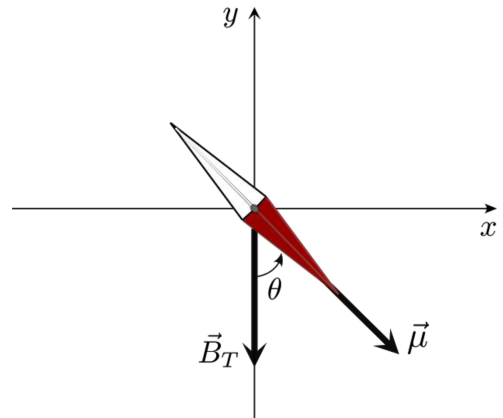


Figura 1 - Representação da agulha de uma bússola na presença do campo magnético terrestre, \mathbf{B}_T . O deslocamento angular em relação a posição de equilíbrio é $\theta > 0$.

A segunda causa é o atrito seco, resultado de torques produzidos por forças de contato entre a agulha e o pino de sustentação. Esta força resistiva é aproximadamente constante e depende da natureza dos materiais

e do grau de polimento das superfícies. O torque resultado do atrito seco é pequeno quando comparado com o torque resultado das forças fluidicas, e, portanto não o levamos em consideração. Dessa análise podemos descrever o modelo do sistema por uma equação diferencial Linear com coeficientes constantes

$$I\ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + \mu B_T \theta = 0. \quad (5)$$

Para resolver a Eq. (5), dividimos por I e introduzimos duas novas constantes, $2\lambda = \gamma/I$ e $\omega_0 = \sqrt{\frac{\mu B_T}{I}}$, ambas com dimensão de frequência, ou seja, inversas do tempo. O resultado é a equação

$$\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0. \quad (6)$$

Comparamos novamente o modelo obtido com a equação do oscilador harmônico amortecido, que tem solução geral dada por

$$\theta = A e^{-\lambda t} \text{sen}(\omega_1 t + \alpha). \quad (7)$$

Sendo $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ a frequência das oscilações modificada pela presença do atrito viscoso e λ o coeficiente de amortecimento. As constantes A e α são determinadas pelas condições iniciais. Um estudo detalhado do oscilador harmônico amortecido pode ser encontrado na Ref. [6]. Na Ref. [7] o autor propõe um conjunto de atividades experimentais com bússolas imersas em água, óleo e ar.

Os resultados obtidos acima são importantes para o objetivo de mostrar a analogia entre o conjunto acoplado de bússolas e o oscilador massa-mola acoplado (seções 3 e 4). No limite das pequenas oscilações da agulha de uma bússola, o modelo possui forma análoga às equações do oscilador harmônico. Portanto, conforme a argumentação feita na Eq. (4), nesse caso também é possível expressar os deslocamentos angulares por meio de deslocamentos lineares. Por fim, a ação do torque sobre o dipolo é similar ao efeito da constante de força de uma mola na direção do eixo x .

3. Bússolas acopladas

Este experimento utiliza duas bússolas idênticas (agulhas imantadas de mesmo tamanho), e sem um fluido específico de amortecimento, ou seja, imersas no ar. Estas são posicionadas a uma pequena distância uma da outra. Na posição de equilíbrio a orientação das agulhas, direção norte-sul, é na direção horizontal do campo magnético da terra \mathbf{B}_T direção da coordenada y do plano xy , $\mathbf{B}_T = B_T \hat{j}$, ilustrado nas Figs. 2 e 3. No modelo de dipolo magnético a orientação tem a direção $\boldsymbol{\mu} = \mu \hat{j}$.

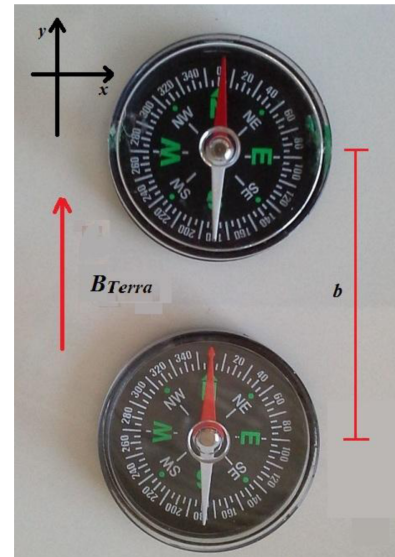


Figura 2 - Na posição de equilíbrio, as agulhas têm a orientação do campo magnético da terra, \mathbf{B}_T .

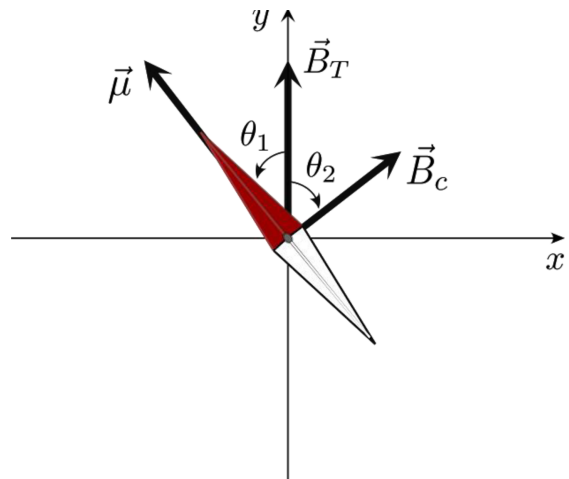


Figura 3 - O campo adicional \mathbf{B}_c corresponde ao campo da agulha 2 (dois) na posição da agulha 1 (um) representado pelo momento magnético $\boldsymbol{\mu}$. Na figura, $\theta_1 > 0$.

Além do campo magnético terrestre local \mathbf{B}_T , existe um campo magnético adicional \mathbf{B}_c , ilustrado na Fig. 3, resultado da presença da agulha de número 2 (dois). As características do campo magnético \mathbf{B}_c são determinadas pelo padrão do dipolo magnético da agulha de número 2 (dois), e da distância entre as agulhas.

Podemos verificar a direção do vetor \mathbf{B}_c com um experimento muito simples: deslocando uma das agulhas em torno da posição de equilíbrio, verificamos que a segunda agulha fica orientada em uma direção oposta ao deslocamento da primeira. O resultado é consequência direta do padrão de simetria do vetor campo em relação ao eixo do dipolo, chamado de simetria especular, para pequenos deslocamentos e posição distante da origem podemos aproximar os vetores \mathbf{B}_c e $\boldsymbol{\mu}$ como imagens especulares uma da outra.

Uma análise semelhante da simetria das linhas do campo de um dipolo determina a magnitude de \mathbf{B}_c

na direção y do plano xy , que para posições distantes da origem do dipolo, a magnitude da componente do campo \mathbf{B}_c na direção do eixo de simetria se mantém aproximadamente uma constante independente das pequenas vibrações de uma das agulhas. O que não é verdadeiro para posições próximas do dipolo magnético. Em outras palavras, podemos aproximar a magnitude do campo \mathbf{B}_c de uma das agulhas na posição da outra por uma constante. Esta é uma discussão importante para a descrição de nosso modelo. A intensidade e direção do campo \mathbf{B}_c determinam as características das oscilações do sistema. Sendo que, conforme será discutida nas próximas seções, a magnitude do campo \mathbf{B}_c é o fator determinante para o tipo de acoplamento, enquanto a direção do vetor determina as intensidades e frequências dos modos normais de vibração.

Assim, ao perturbar uma das agulhas, com uma simples agitação de uma das bússolas, os movimentos de uma agulha alteram a direção do campo magnético \mathbf{B}_c sobre a outra e vice-versa, de tal forma que os movimentos de uma influenciam os movimentos da outra. Para pequenos deslocamentos angulares, a Fig. 3 está fora de escala, a magnitude do campo magnético \mathbf{B}_c é uma constante que depende da separação entre as bússolas, indicada na Fig. 2 por $y = b$.

Pelo princípio da superposição o campo resultante, plano (x, y) , é dado por $\mathbf{B}_{res} = \mathbf{B}_T + \mathbf{B}_c$. A ação do campo magnético \mathbf{B}_{res} sobre o momento de dipolo magnético $\boldsymbol{\mu}$ produz um torque restaurador em relação ao ponto de suspensão. A direção do vetor torque é do eixo z , e o sentido é determinado pela posição angular das agulhas em relação à posição de equilíbrio,

$$(\tau)_z = -\{\mu B_T \sin \theta_1 + \mu B_C \sin(\theta_1 - \theta_2)\}. \quad (8)$$

Usando a 2ª lei de Newton para rotações e considerando pequenos desvios da posição de equilíbrio, com a aproximação $\sin \theta \approx \theta$ e ainda, $L = I\theta$, onde I corresponde ao momento de inércia da agulha, podemos escrever a evolução no tempo por uma equação diferencial linear com coeficientes constantes

$$I\ddot{\theta}_1 + \mu B_T \theta_1 + \mu B_C (\theta_1 - \theta_2) + \gamma \dot{\theta}_1 = 0, \quad (9)$$

onde $\ddot{\theta}_1$ representa a derivada segunda do deslocamento angular da primeira agulha em relação à posição de equilíbrio, e $\gamma \dot{\theta}_1$ corresponde a um torque dissipativo resultado principalmente do atrito da agulha com o fluido.

Os mesmos argumentos acima podem ser utilizados para equacionar as oscilações da agulha 2 (dois) que interage com o campo produzido pela agulha 1 (um). O resultado é expresso pela Eq. (10)

$$I\ddot{\theta}_2 + \mu B_T \theta_2 + \mu B_C (\theta_2 - \theta_1) + \gamma \dot{\theta}_2 = 0. \quad (10)$$

A presença da variável θ_2 na expressão que determina as oscilações da primeira agulha, Eq. (9) e da

variável θ_1 na equação para a segunda agulha, Eq. (10), mostra uma dependência entre estas variáveis e, portanto um acoplamento entre os sistemas.

Nas seções seguintes, vamos propor uma discussão do modelo com base em um sistema linear constituído por um conjunto de oscilador massa-mola acoplado por uma mola.

4. Descrição do modelo

No modelo proposto, as oscilações das agulhas imantadas são determinadas por um torque $\mu B_C (\theta_1 - \theta_2)$ sobre a agulha 1 (um), e um torque igual e contrário $\mu B_C (\theta_1 - \theta_2)$ sobre a agulha 2 (dois); além dos torques, resultados da ação do campo magnético terrestre e do fluido sobre a agulha.

Considerando também as similaridades encontradas com as equações do oscilador harmônico simples, conforme discussão na seção 2, portanto, podemos inferir que as leis que descrevem as oscilações do conjunto de bússolas acopladas são as mesmas para um sistema linear de acoplamento mecânico. De modo que a interação dos campos sobre o dipolo é similar a uma ação mecânica de uma mola na direção do eixo x . Uma análise do sistema acoplado massa-mola é descrito na Ref. [8].

A partir deste ponto, podemos verificar nosso modelo com as mesmas discussões feitas para sistemas lineares acoplados. Observa-se desta forma, que as oscilações das agulhas são superposições dos modos normais de vibração do sistema.

Duas são as maneiras que um sistema composto de duas agulhas podem vibrar: o primeiro modo normal, modo 1(um), é determinado com as agulhas oscilando em oposição de fase; equivalente a vibração em fase para o sistema massa-mola. Para este modo, segundo a análise da seção anterior referente a simetria especular dos campos, não há um torque de uma agulha sobre a outra. Nesta configuração os vetores \mathbf{B}_c e $\boldsymbol{\mu}$ permanecem alinhados. Entretanto, o campo de um dos dipolos \mathbf{B}_c continua presente, independentes dos movimentos das agulhas o torque restaurador sobre o dipolo é resultado da ação do campo resultante \mathbf{B}_{res} , determinado no modelo linear pela constante de força $k_0 = \mu B_{res}$. O segundo modo normal de oscilação, modo 2(dois), é determinado com as agulhas vibrando em fase. Neste modo, além do torque restaurador existe a ação de uma agulha sobre a outra.

Das discussões acima, consideremos as constantes de forças associadas $k_1 = k_2 = k_0$ e constante de acoplamento k_c , com valores μB_{res} e μB_C .

O resultado do modelo é equacionado por

$$I\ddot{\theta}_1 = -k_0 \theta_1 - k_c (\theta_2 - \theta_1) - \gamma \dot{\theta}_1, \quad (11)$$

$$I\ddot{\theta}_2 = -k_0 \theta_2 - k_c (\theta_1 - \theta_2) - \gamma \dot{\theta}_2. \quad (12)$$

As Eqs. (11) e (12) constituem um sistema de equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes constantes. A primeira equação depende da posição angular da segunda agulha, e a segunda equação depende da posição angular da primeira, ou seja, as oscilações de uma agulha alteram as oscilações da outra e vice-versa.

O sistema descrito pelas Eqs. (11) e (12) pode ser reescrito com uma nova coordenada $\varphi_1 = \theta_1 + \theta_2$ e $\varphi_2 = \theta_2 - \theta_1$ ou seja, um sistema desacoplado

$$I \ddot{\varphi}_1 = -k_0 \varphi_1 - \gamma \dot{\varphi}_1, \quad (13)$$

$$I \ddot{\varphi}_2 = -\varphi_2(2k_1 + k_0) - \gamma \dot{\varphi}_2. \quad (14)$$

As novas coordenadas normais φ_1 e φ_2 descrevem oscilações harmônicas amortecidas independentes com soluções dadas por

$$\varphi_1 = A_1 e^{-\lambda t} \text{sen}(\omega_1 t + \alpha_1), \quad (15)$$

$$\varphi_2 = A_2 e^{-\lambda t} \text{sen}(\omega_2 t + \alpha_2), \quad (16)$$

onde A_1, A_2 e α_1, α_2 são constantes determinadas pelas condições iniciais, e a constante $\lambda = \gamma/2I$ o coeficiente de amortecimento. As frequências angulares são determinadas por

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_0}{I} - \lambda^2}$$

e

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2k_C + k_0}{I} - \lambda^2},$$

que correspondem aos modos normais de vibração do sistema.

Nas próximas seções, aplicaremos o modelo acima e, a partir de vídeos produzidos com duas bússolas pequenas, serão sugeridas algumas atividades didáticas experimentais.

5. Análise

A intensidade do campo \mathbf{B}_c foi estimada com o seguinte procedimento: ao aproximar uma bússola orientada na direção norte-sul, direção y dos eixos, de uma agulha imantada fixa, esta mantida com a orientação do momento magnético, $\boldsymbol{\mu}$, sentido crescente do eixo x (ver Fig. 4(a)). Verifica-se que, para determinada aproximação, $b \cong 5,0$ cm, o desvio da agulha imantada, medido em relação ao campo \mathbf{B}_T , é de 45° . Usando a relação trigonométrica,

$$\tan(\theta) = \frac{B_C}{B_T}, \quad (17)$$

ilustrada no diagrama vetorial da Fig. 4(b), vemos que o campo \mathbf{B}_c produzido pelo dipolo magnético possui a mesma intensidade que o campo magnético da terra no local \mathbf{B}_T . Na Ref. [9], os autores propõem uma atividade similar para determinar o campo magnético de um pequeno imã

A medida de afastamento entre as bússolas obtida no experimento anterior, Fig. 2 e Fig. 3, representa um dado significativo para testar nosso modelo. Para tal, retomemos ao modelo de acoplamento com configuração inicial, bússolas alinhadas com a direção do campo terrestre. Nesta configuração, conhecendo a separação $b \cong 5,0$ cm, medida de centro a centro das agulhas, temos que as constantes de força possuem os seguintes valores aproximados: $k_0 \cong 2\mu B_T$ e $k_C \cong \frac{k_0}{2} \cong \mu B_T$, ou seja, um acoplamento fraco. Um caso particular e interessante é dado pelas condições iniciais, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \alpha_2$, $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0$ que corresponde à situação física de batimento, com frequências normais dadas por

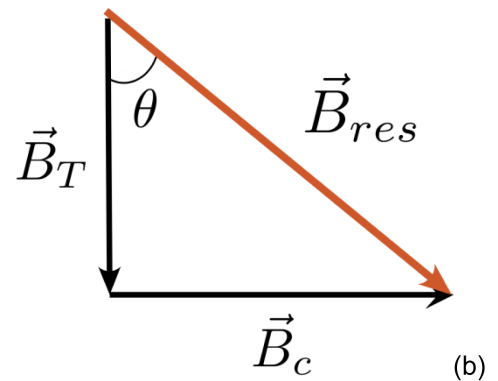
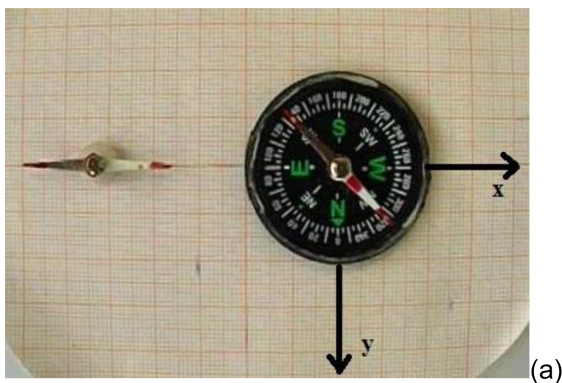


Figura 4 - (a) A intensidade do campo magnético \mathbf{B}_c é determinada em função do desvio da agulha. (b) O diagrama vetorial determina o campo resultante \mathbf{B}_{res} .

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \approx \omega_0,$$

e

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2k_C + k_0}{I} - \lambda^2} \approx \omega_0\sqrt{2}.$$

Com o objetivo de verificar o comportamento das oscilações e dos valores dados nas condições acima, o experimento foi realizado tomando alguns cuidados. As bússolas foram colocadas distantes de objetos metálicos, e de tal forma que as agulhas iniciassem o movimento simultaneamente. Uma de certo ângulo θ_2 , e a outra da posição de equilíbrio $\theta_1 = 0$. Para a aquisição dos dados, foi utilizada uma câmera digital convencional. Com base no filme gerado, a análise de imagens foi feita usando o *software Tracker*. O software possibilita explorar o filme quadro a quadro, e com um sistema de eixos coordenados é marcada a posição angular da agulha, $P = (\theta, t)$. O programa fornece uma tabela com a posição angular θ_i da agulha no intervalo de tempo atribuídos a um determinado quadro (i).

A Fig. 5(b) ilustra o gráfico obtido para os deslocamentos angulares de uma das agulhas, nesta ilustração podemos observar as flutuações de energia do sistema oscilante.

O padrão das oscilações obtido foi comparado com o modelo de um acoplamento linear apresentado na seção 3. Para tal, com a ferramenta de análise de Fourier que acompanha o *software Tracker*, foram determinadas as frequências harmônicas do sistema, ilustrado na Fig. 6(a). Estas representam as frequências dos modos normais de oscilação. Também foi determinado, a partir da atividade sugerida na Ref. [6], o coeficiente de amortecimento para uma bússola simples. A

partir desses dados, e considerando que os modos normais possuem uma diferença de fase de π radianos, foram construídos os gráficos das funções φ_1 e φ_2 e a superposições destes. A Fig. 5(a) ilustra o padrão obtido, que comparado com as medidas das oscilações, Fig. 5(b), apresenta o mesmo padrão de oscilação, característico de sistemas ressonantes que apresentam o fenômeno de batimento.

Ilustramos na Fig. 6(a) o espectro de frequências obtido a partir da análise de Fourier para o sistema acoplado, e na Fig. 6(b) de uma bússola simples. Podemos observar que as relações entre as frequências conferem com nossa análise para os modos normais de oscilação, $f_2 \cong f_0\sqrt{2}$. Também é possível verificar, diferentemente de um sistema de acoplamento mecânico, que o primeiro modo de oscilação não corresponde a frequência de uma oscilação livre, ilustrado na Fig. 6(b) como $f = 0,6$ Hz.

O experimento com bússolas acopladas pode ser explorado nas atividades didáticas juntamente com as simulações computacionais construídas em Java, conhecidos como Applets. Como sugestão de atividade, Refs. [10,11], o professor pode explorar as similaridades do acoplamento magnético com um sistema de acoplamento mecânico, constituído por dois osciladores massa-mola acoplado por uma mola. Neste exemplo foi utilizada uma simulação disponibilizada na rede. Para tal, no painel da simulação, foram definidas as seguintes variáveis: condições iniciais; posição inicial das massas, constante elástica das molas k e constante do acoplamento k_c . Esta última definida em função de um acoplamento fraco, ou seja, $k_c = k/2$. O resultado está representado no gráfico da Fig. 7.

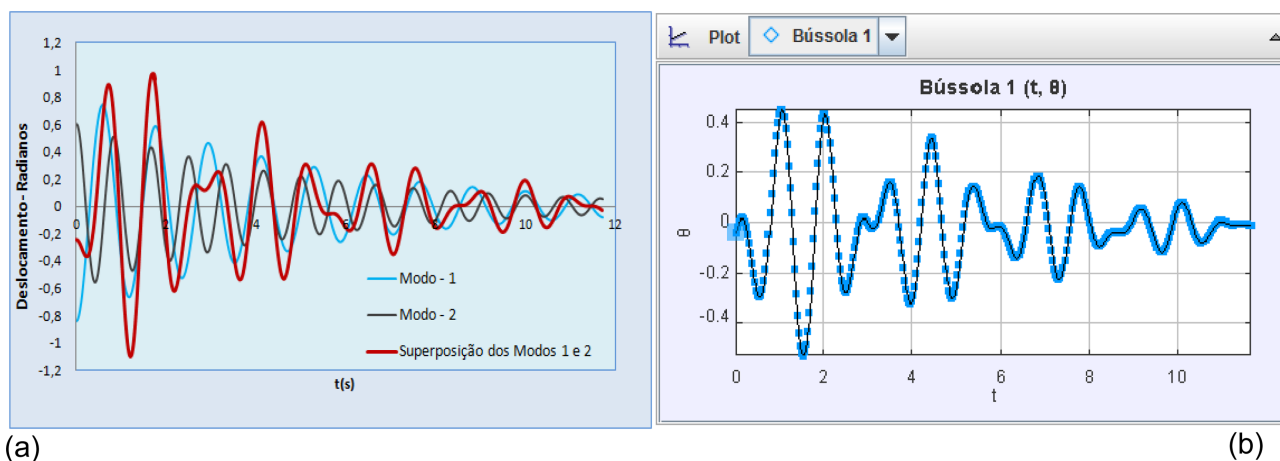


Figura 5 - (a) Está representada em cor azul a função $\varphi_1(t)$ e em cor preta $\varphi_2(t)$. A superposição dos modos normais na cor em vermelho (b) Medidas do deslocamento angular $\theta_1(t)$ da agulha 1 (um) produzidas a partir de vídeos e com *software* de vídeo-análise *Tracker*.

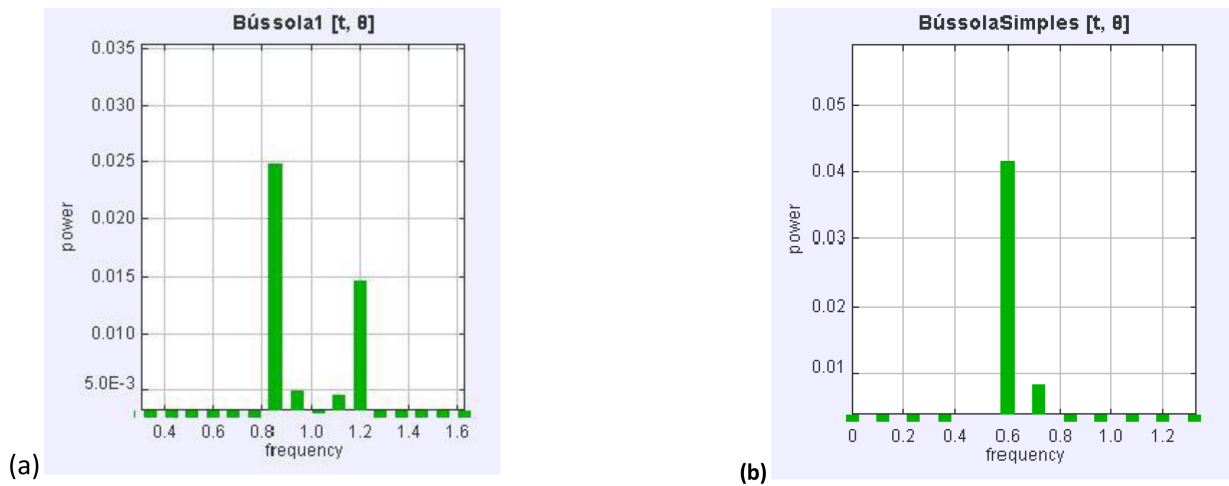


Figura 6 - (a) Espectro de oscilações para a bússola 1. Os picos dos gráficos da análise de Fourier representam os harmônicos $f_0 = 0,85$ Hz e $f_2 = 1,2$ Hz. (b) Espectro das oscilações de uma bússola simples $f = 0,6$ Hz.

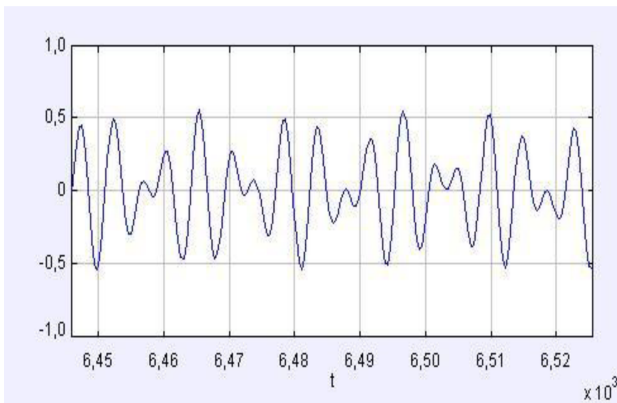


Figura 7 - Oscilações de um sistema massa-mola fracamente acoplado obtidos de uma simulação em JAVA.

As Fig. 7 e Fig. 5(b) apresentam o mesmo padrão de oscilação, que é característico de sistemas ressonantes, caracterizado pelas flutuações de energia entre os sistemas. Devido a uma limitação do modelo construído em Java, Fig. 7, a energia total do sistema é conservada e as frequências de batimento não são as mesmas que os valores correspondentes às medidas obtidas com as bússolas.

Uma análise interessante que foge dos propósitos deste trabalho é o comportamento das oscilações quando a aproximação entre as bússolas atinge certo limite, determinado no texto pela distância, $b \cong 5,0$ cm. Neste limite, a intensidade do campo $\mathbf{B}_c > \mathbf{B}_T$ e, portanto, o torque da interação entre as agulhas assume valores maiores do que o torque do campo magnético terrestre local \mathbf{B}_T . O comportamento é similar ao pêndulo amortecido forçado, com resultado bastante complexo, e uma das possíveis consequências é o comportamento caótico das agulhas.

Na Fig. 8 ilustramos a análise de Fourier para as oscilações de um sistema com aproximação máxima, ou seja, determinada pelo diâmetro das bússolas. Ob-

servamos no espectro das frequências que os picos dos harmônicos possuem uma intensidade muito pequena. Está é uma das consequências da não linearidade do sistema, ou seja, não satisfazem o princípio da superposição. Portanto outras ferramentas de análise são necessárias para estudar o comportamento de um sistema não linear.

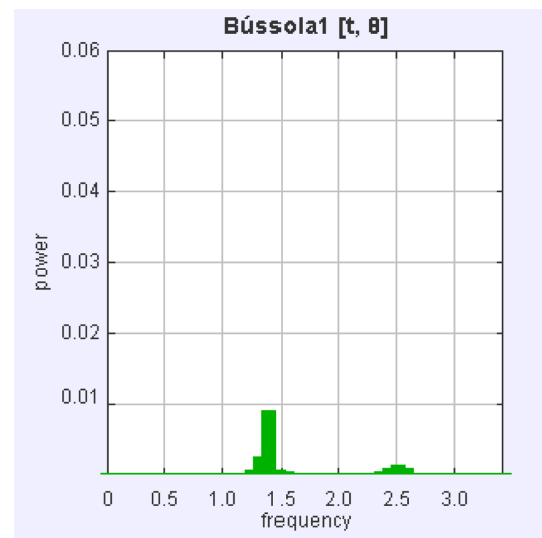


Figura 8 - Espectro de frequências dos deslocamentos de uma agulha com oscilações amortecidas e forçadas.

6. Considerações finais

Esse trabalho procura explorar as vibrações periódicas das agulhas de duas bússolas acopladas na situação que apresentam o fenômeno de batimento, característico de sistemas ressonantes. Um estudo similar usando pêndulos magnéticos é encontrado na Ref. [1], diferente do referido trabalho procuramos apresentar uma discussão comparando com um sistema linear constituído pelo pêndulo simples e oscilador massa-mola.

Na descrição teórica comparamos dois sistemas físicos aparentemente descritos por diferentes leis e com forças de interação de diferentes naturezas. Compara-se um sistema mecânico, constituído por dois osciladores massa-mola acoplados mecanicamente por meio de uma mola, com um sistema formado por duas bússolas cujas interações são resultado de forças de origens magnéticas. Também comparamos os dados obtidos a partir da análise de vídeos com uma simulação de um sistema massa-mola construída na linguagem Java e disponibilizada na rede.

Uma das características desse experimento é a facilidade com que as medidas são obtidas, usando o *software Tracker*, bússolas pequenas e uma câmera comum, o material pode facilmente ser reproduzido. Portanto, professores dos cursos universitários podem utilizar este material nas atividades práticas, a partir de filmes produzidos pelos próprios alunos, sobre oscilações periódicas ou sistemas acoplados. Ou, ainda, como exemplo nas aulas de oscilações, relacionando os diferentes modelos físicos na descrição de sistemas lineares.

Em resumo, nesse trabalho enfatiza-se a grande ferramenta didática que é a analogia entre sistemas físicos distintos, uma vez que o aprendizado de algo novo pelo estudante é facilitado quando construído sobre algum conhecimento prévio já estabelecido. Além disso, essa aprendizagem pode ser mais eficaz com o uso de softwares e simulações como ferramentas complementares no ensino de física.

O experimento com bússolas acopladas pode ser encontrado como uma proposta para atividade experimental na Ref. [11] O material foi compactado com a ferramenta Tracker.Zip que acompanha o *software*. No arquivo zip estão os vídeos, os arquivos Tracker e as instruções html para o desenvolvimento das atividades

Agradecimentos

O autor agradece ao professor Adriano Doff e, em especial, ao colega e professor Angel Akio Tateishi pela elaboração das figuras e leitura crítica deste trabalho

Referências

- [1] M.J. Moloney, *American Journal Physics* **76**, 1258 (2008).
- [2] LI. Leitão, D. Teixeira, P. Fernando e F.S. da Rocha, *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias* **6**, n. 1, jul. (2011).
- [3] Laboratório Didático de Física. Disponível em <http://www.if.ufrgs.br/cref/uab/lab/tracker.html>. Acesso em 27 maio 2014.
- [4] Douglas Brown, *Tracker*. Disponível em <https://www.cabrillo.edu/~dbrown/tracker/>. Acesso em 27 maio 2014.
- [5] OSP. Open Source Physics. Disponível em <http://www.opensourcephysics.org/>. Acesso em 27 maio 2014.
- [6] H.M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica* (Edgard Blücher, São Paulo, 1998).
- [7] OSP, *Damping of a Compass Video Analysis Activity*. Disponível em <http://www.compadre.org/osp/items/detail.cfm?ID=13252>. Acesso em 27 maio 2014.
- [8] J.A. Monsoriu, M.H. Gimenez, J. Riera e A. Vidaurre, *Eur. J. Phys.* **26**, 1149 (2005).
- [9] B. Lunk e R. Beichner, *Physics Teacher* **49**, 45, (2011).
- [10] Open Source Physics, *Coupled Oscillators and Normal Modes Model*. Disponível em <http://www.opensourcephysics.org/items/detail.cfm?ID=8176>. Acesso em 27 de maio 2014.
- [11] Open Source Physics, *Coupled Compass Oscillations*, Disponível em <http://www.compadre.org/osp/items/detail.cfm?ID=13293>. Acesso em 27 de maio de 2014.