

# Determinação experimental da constante de Boltzmann a partir da curva característica corrente-voltagem de um diodo

(*Experimental determination of the Boltzmann constant from current-voltage characteristic of a diode*)

Vagner Santos da Cruz<sup>1</sup>, Vitorvani Soares

*Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil*

Recebido em 5/9/2014; Aceito em 1/11/2014; Publicado em 31/3/2015

Apresentamos neste trabalho uma atividade experimental didática com um diodo, realizada com equipamentos de fácil aquisição e que pode ser adaptada com facilidade para uma aula de graduação ou para um grupo de ensino médio. A atividade descrita estabelece a curva característica corrente  $I_D$ -voltagem  $V_D$  de um diodo, a partir das medidas da diferença de potencial  $V_D$  sobre ele e da corrente  $I_D$  que circula através dele, para três diferentes temperaturas  $T = 0\text{ }^\circ\text{C}$ ,  $23\text{ }^\circ\text{C}$  e  $100\text{ }^\circ\text{C}$ . Da análise destes resultados experimentais: (i) construímos a expressão algébrica da corrente  $I_D$  em função da voltagem  $V_D$  e da temperatura  $T$ , e (ii) determinamos o valor da constante de Boltzmann  $k_B$ , uma das constantes fundamentais da física.

**Palavras-chave:** diodo, curva característica corrente-voltagem, constante de Boltzmann.

We present in this work a didactic experimental activity with a diode, set up with affordable instruments, and that can be easily adapted for an undergraduate or a high school class. The activity described establishes the current  $I_D$ -voltage  $V_D$  characteristics of a diode from measurements of the potential difference  $V_D$  on it and the current  $I_D$  through it, for three different temperatures  $T = 0\text{ }^\circ\text{C}$ ,  $23\text{ }^\circ\text{C}$ , and  $100\text{ }^\circ\text{C}$ . From the experimental results: (i) we build up an algebraic expression for the current  $I_D$  as a function of the voltage  $V_D$ , and the temperature  $T$ , and (ii) we determine the value of the Boltzmann's constant  $k_B$ , one of the physical fundamental constants.

**Keywords:** diode, current-voltage characteristic curve, Boltzmann constant.

## 1. Introdução

No mundo de hoje é impossível imaginar a vida das pessoas sem aparelhos elétricos ou eletrônicos e a existência destes dispositivos tornou-se essencial em muitas atividades cotidianas. De fato, a partir do início do último século, a eletrônica assume grande importância no desenvolvimento industrial da nossa sociedade e os componentes eletrônicos estabelecem não somente um marco nas invenções, proporcionando um imenso avanço tecnológico, mas também transformam o nosso comportamento social.

Dentre os dispositivos eletrônicos, pode-se afirmar que o diodo é o principal responsável pelo surgimento de tantas inovações no campo da ciência e da tecnologia. Feito, em geral, com silício ou germânio, o diodo tem a propriedade de conduzir a corrente elétrica somente em um sentido. Portanto, o diodo é um componente cujas propriedades elétricas dependem da polarização da corrente e, por ter esta peculiaridade, ele é

amplamente utilizado na indústria atual como um componente eletrônico de base e se encontra presente em praticamente todos os circuitos eletroeletrônicos contemporâneos.

Por ser um dispositivo bastante simples, o diodo é um excelente ponto de partida para entender o funcionamento dos semicondutores [1, 2]. A determinação da sua curva característica corrente-voltagem é uma experiência bastante popular em laboratórios didáticos e, em geral, a literatura especializada apresenta a descrição do diodo a partir de um modelo teórico previamente estabelecido (veja, por exemplo, [3-6]). Neste trabalho, em contraste, é apresentado um procedimento alternativo para a determinação da curva característica do diodo dependente da sua temperatura de operação sem a apresentação prévia de nenhum modelo teórico para o seu comportamento.

O procedimento aqui apresentado pode ser realizado com equipamentos de fácil aquisição no mercado, o que permite aplicá-lo em locais fora de um laboratório tra-

<sup>1</sup>E-mail: [vagnerscruz@gmail.com](mailto:vagnerscruz@gmail.com).

dicional, e até mesmo em uma sala de aula. Apesar da sua aparente simplicidade, ele apresenta resultados precisos e em curto intervalo de tempo [7].

## 2. Esquema experimental

O aparato experimental para as medidas elétricas está representado na Fig. 1. O circuito mostrado na figura é composto por uma fonte de alimentação contínua,  $V_F$ , de 15 V, um resistor variável,  $R_1$ , de 200 k $\Omega$ , em série com um resistor fixo,  $R_2$ , de 1 k $\Omega$  ( $\pm 1\%$ ), e um diodo de silício do tipo junção pn (diodo 1N4001 ou equivalente), encontrado facilmente em qualquer loja de material eletrônico. Utilizamos também uma placa de montagem (*protoboard*) para interligar os componentes e dois multímetros digitais para realizar as medidas das grandezas elétricas envolvidas.

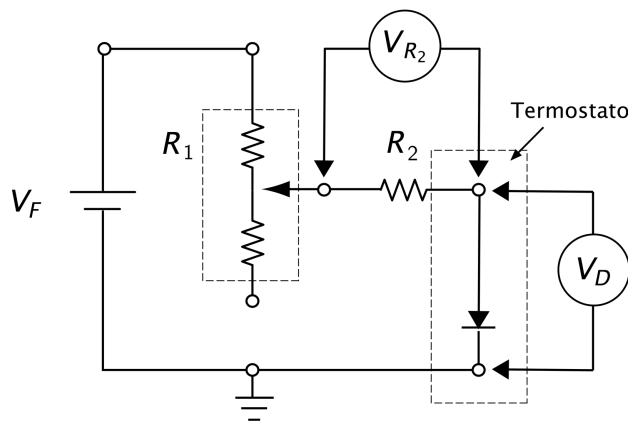


Figura 1 - Representação esquemática do circuito para a determinação da curva característica corrente  $I_D$  -voltage  $V_D$  do diodo. A corrente  $I_D$  é determinada pela razão  $I_D = V_{R_2}/R_2$  e as diferentes voltagens  $V_{R_2}$  e  $V_D$  são obtidas alterando-se o valor do resistor variável  $R_1$ .

A curva característica do diodo, para diferentes temperaturas de operação, é obtida a partir das medidas da diferença de potencial  $V_{R_2}$  no resistor  $R_2$ , que estabelecem a corrente elétrica  $I_D$  no diodo, e das medidas da diferença de potencial  $V_D$  sobre o diodo. A corrente  $I_D$  é determinada pela razão  $I_D = V_{R_2}/R_2$  e as diferentes voltagens  $V_{R_2}$  e  $V_D$  são obtidas alterando-se o valor do resistor variável  $R_1$ . O valor do resistor  $R_2$  foi escolhido de forma a evitar possíveis queimas dos componentes do circuito e assegurar que o experimento transcorra sem maiores problemas.

Empregamos um recipiente de cerca de dois litros para funcionar como um reservatório térmico: um contendo água com gelo ( $0^\circ\text{C}$ ) (em nosso caso, uma garrafa PET), e outro com água fervente ( $100^\circ\text{C}$ ) (em nosso caso, um Becker), que estabelecem os pontos de fusão e ebulição da água. Isto possibilita maior estabilidade na temperatura durante as medições, já que envolve duas transições de fase de primeira ordem da água. Para as medidas de temperatura usamos um termopar.

## 3. Procedimento experimental

Para estabelecer os diferentes valores de temperatura de operação do diodo, ele foi colocado em um pequeno recipiente plástico com tampa (no nosso caso, uma pequena embalagem de filme fotográfico), junto com os fios condutores e o termopar (ver a Fig. 2). Este conjunto é inserido no recipiente contendo água com gelo ( $0^\circ\text{C}$ ) ou água fervente ( $100^\circ\text{C}$ ). Escolhemos uma temperatura de operação do diodo e realizamos a montagem final do circuito.



Figura 2 - Fotografia do material empregado no experimento. A partir do canto superior esquerdo, no sentido dos ponteiros do relógio, temos: a fonte de alimentação, um recipiente de dois litros para servir de reservatório térmico, o recipiente térmico para o diodo, a placa de montagem do circuito, o diodo, os resistores, o termopar e os multímetros utilizados.

Concluída a montagem, o circuito é submetido a uma diferença de potencial (ddp)  $V_F$ . Conforme alteramos o valor do resistor variável, os valores do potencial aplicado nos terminais dos componentes do circuito também são alterados. Podemos, assim, construir uma tabela de dados que relaciona as diferentes ddps no diodo,  $V_D$ , em função da corrente que o percorre,  $I_D = V_{R_2}/R_2$ , determinada a partir da ddp,  $V_{R_2}$ , nos terminais do resistor ôhmico  $R_2$ , como indicado na Fig. 1. Podemos também utilizar um amperímetro, dependendo da disponibilidade. Entretanto, o emprego do voltímetro com uma resistência calibrada permite maior precisão para os valores da corrente  $I_D$ .

## 4. Análise dos dados

Determinamos, inicialmente, a curva  $I_D - V_D$  do comportamento característico do diodo à temperatura ambiente (no nosso caso,  $23^\circ\text{C}$ ), como indicado na Fig. 3.

Esta figura mostra a formação de uma curva com característica não-ôhmica e este comportamento já indica algumas propriedades de um diodo simples: somente a partir de um valor aproximado de  $V_D \sim 0,6\text{ V}$ , surge uma corrente  $I_D$  significativa ( $> 10^{-2}\text{ mA}$ ) e, a partir deste valor, conforme aumentamos o valor da voltagem

$V_D$  sobre o diodo, a corrente  $I_D$  também aumenta significativamente, mesmo para uma pequena variação da voltagem sobre o dispositivo.

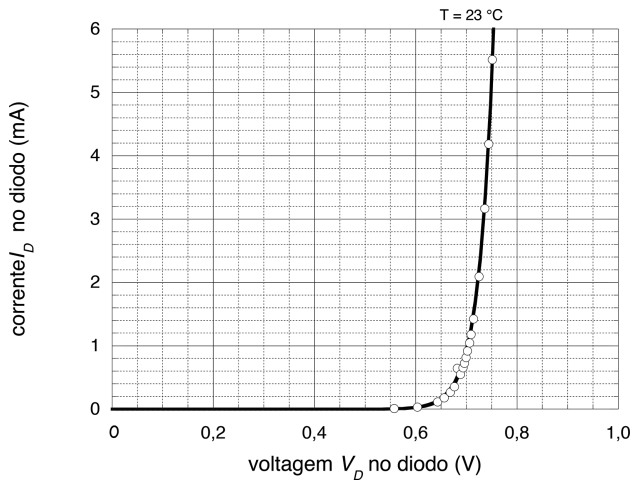


Figura 3 - Curva característica  $I_D-V_D$  do diodo na temperatura ambiente.

Para a determinação da forma algébrica desta curva característica do diodo, realizamos diferentes gráficos a partir dos dados obtidos e, dentre eles, o gráfico monolog da Fig. 4 é bastante útil.

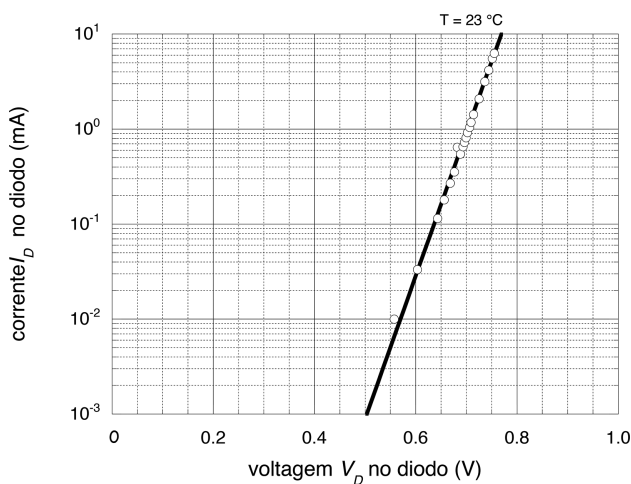


Figura 4 - Curva característica  $I_D-V_D$  do diodo, à temperatura ambiente, em escala monolog.

A análise das medidas em uma escala semilogarítmica revela que os resultados neste gráfico se comportam como uma reta de maneira bastante satisfatória. Isto sugere que a relação entre a corrente no diodo e a voltagem a qual ele está submetido pode ser representada por uma função exponencial

$$I_D = i_0 e^{bV_D}, \quad (1)$$

onde  $i_0$  e  $b$  são constantes de ajuste.

Em seguida, para se investigar alguma possível influência da temperatura sobre a condutividade do diodo, repetimos a experiência com o dispositivo nas diferentes temperaturas  $T = 0 \text{ }^\circ\text{C}$  e  $100 \text{ }^\circ\text{C}$ , como expli-

cado no início desta seção, e os resultados obtidos estão representados na Fig. 5. Esta figura mostra que a forma qualitativa da curva característica  $I_D - V_D$  do diodo é independente da temperatura de operação do sistema. Entretanto, os parâmetros das curvas obtidas não parecem ser independentes da temperatura de trabalho do dispositivo.

Representamos novamente os dados obtidos em um gráfico monolog, como indicado na Fig. 6, e analisamos o comportamento linear das medidas. Determinamos os parâmetros  $b$  e  $i_0$  para cada uma das retas da figura, e os resultados obtidos estão organizados na Tabela 1. Para uma sala de aula é suficiente calcular a inclinação das retas da forma usual por inspeção da inclinação. Para a temperatura de  $0 \text{ }^\circ\text{C}$ , por exemplo, temos

$$b = \frac{\log(10^1) - \log(10^{-3})}{(\log e)(0,80 - 0,55)} \approx \frac{4,0}{(0,43)(0,25)} \approx 37 \quad (2)$$

Os valores de  $i_0$  também podem ser obtidos por inspeção do gráfico da Fig. 6, prolongando-se as retas para as diferentes temperaturas até  $V_D = 0$ . Evidentemente, resultados obtidos pelo método dos mínimos quadrados são mais precisos, como pode ser observado na Tabela 1.

Observamos desta tabela que tanto o coeficiente  $i_0$  quanto o coeficiente  $b$  variam com a temperatura de operação do diodo: enquanto  $i_0$  aumenta com o aumento da temperatura, o parâmetro  $b$ , por sua vez, diminui. Evidentemente, uma análise rigorosa dos dados vai além do tempo disponível que o professor tem para as aulas do Ensino Médio, mas uma análise semiquantitativa pode ser feita a partir de dados obtidos previamente.

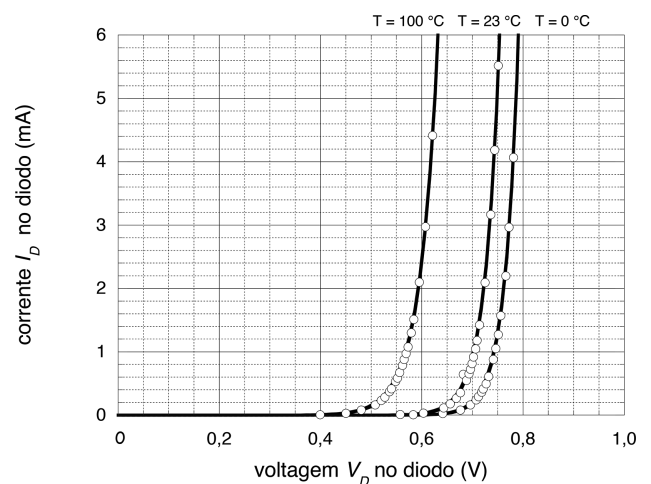


Figura 5 - Curva característica  $I_D-V_D$  do diodo para as temperaturas de  $0 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $23 \text{ }^\circ\text{C}$  e  $100 \text{ }^\circ\text{C}$ , da direita para a esquerda.

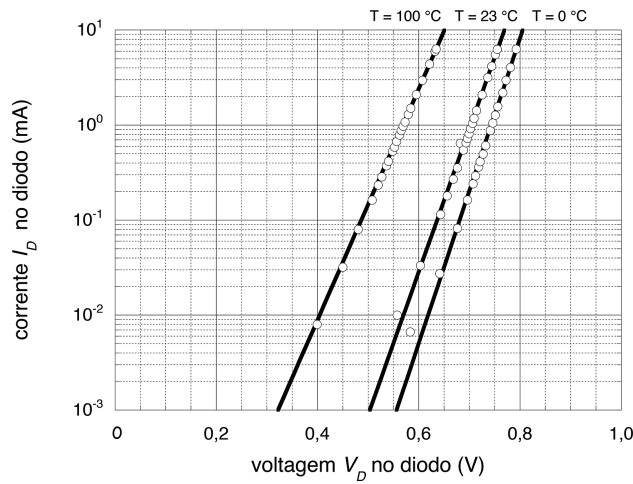


Figura 6 - Curva característica  $I_D$ - $V_D$  do diodo para as temperaturas de 0 °C, 23 °C e 100 °C, em escala monolog.

Tabela 1 - Dados do ajuste da curva característica do diodo para diferentes temperaturas.

$T$ (°)	$i_0$ (mA)	$b$ ( $V^{-1}$ )
0	$(1,2 \pm 0,8) \cdot 10^{-12}$	$36,9 \pm 0,5$
23	$(3,0 \pm 0,4) \cdot 10^{-11}$	$34,6 \pm 0,5$
100	$(3 \pm 1) \cdot 10^{-7}$	$28,0 \pm 0,2$

Da Fig. 7, podemos observar que, ao mantermos constante o valor da corrente  $I_D$  através do diodo, existem diferentes tensões  $V_D$  sobre ele, dependendo em qual temperatura  $T$  o diodo esteja operando. Estas medidas estão organizadas na Tabela 2.

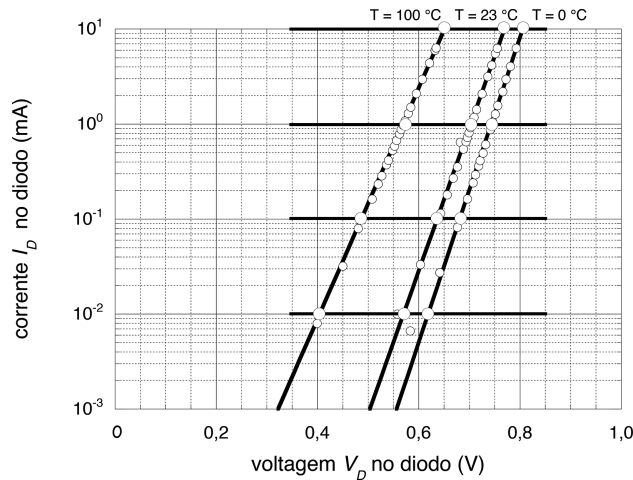


Figura 7 - Curva característica  $I_D$ - $V_D$  do diodo para as temperaturas de 0 °C, 23 °C e 100 °C. As linhas cheias horizontais indicam a tensão no diodo para diferentes temperaturas, para uma dada corrente  $I_D$  através do diodo.

Tabela 2 - Dados para o ajuste das curvas da tensão  $V_D$  no diodo para diferentes temperaturas  $T$ , em regime de corrente  $I_D$  constante ( a incerteza dos potenciais medidos é de 0,05 V, conforme a precisão do equipamento).

$I_D$	$10^{-2}$ mA	$10^{-1}$ mA	$10^0$ mA	$10^1$ mA
$T$ (K)	$V_D$ (V)	$V_D$ (V)	$V_D$ (V)	$V_D$ (V)
273	0,62	0,68	0,74	0,81
296	0,57	0,63	0,71	0,77
373	0,41	0,49	0,57	0,65

Este comportamento entre os parâmetros  $V_D$  e  $T$  sugere a construção de um novo gráfico, representado na Fig. 8.

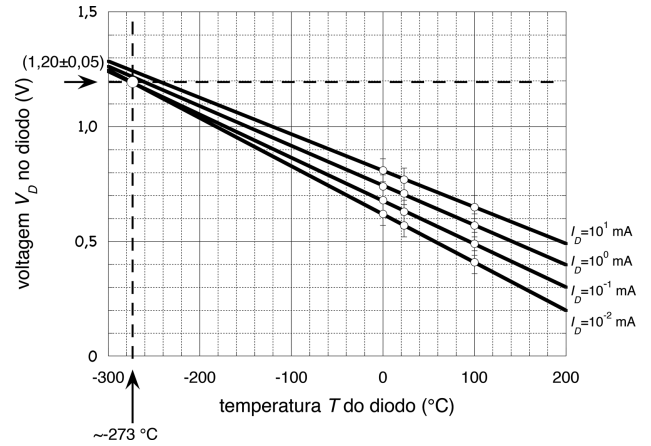


Figura 8 - Tensão no diodo  $V_D$  em função da sua temperatura  $T$ , em graus Celsius, para diferentes correntes  $I_D$ . De baixo para cima, temos os seguintes valores de corrente no diodo:  $I_D = 10^{-2}$  mA,  $10^{-1}$  mA,  $10^0$  mA e  $10^1$  mA.

O gráfico da Fig. 8 apresenta uma relação linear entre a tensão no diodo,  $V_D$ , e a temperatura  $T$ , para uma dada corrente  $I_D$  no dispositivo. Mais ainda, uma inspeção detalhada, como indicado na mesma figura, revela que também podemos realizar uma mudança de escala na temperatura, de grau Celsius para kelvin, conforme indicado na Tabela 2 e na Fig. 9.

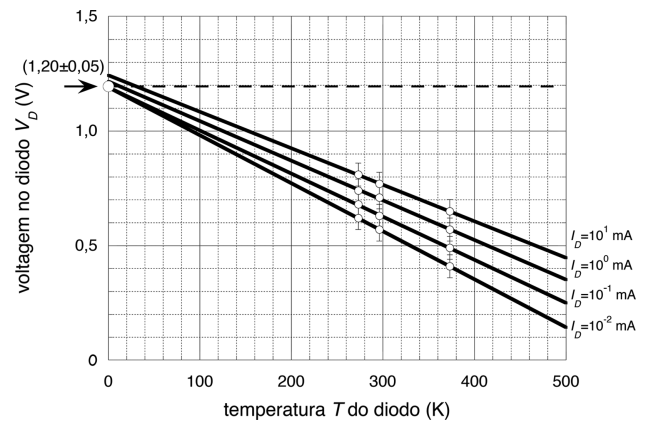


Figura 9 - Comportamento da tensão no diodo,  $V_D$ , em função da temperatura  $T$ , em kelvins, a qual ele está submetido, para diferentes correntes  $I_D$ .

Observamos, da Fig. 9, que há um limite superior de tensão no diodo, que denominamos  $V_0$ , de aproximadamente  $(1,20 \pm 0,05)$  V, para a temperatura de 0 K. Da mesma figura, conclui-se também que

$$V_D = V_0 - \beta T, \tag{3}$$

onde os parâmetros  $\beta$  e  $V_0$  estão indicados na Tabela 3. Observamos também que o coeficiente linear  $V_0$  é independente da corrente que flui através do diodo.

Tabela 3 - Ajustes das curvas da voltagem no diodo  $V_D$  para diferentes temperaturas  $T$ , em regime de corrente  $I_D$  constante.

$I_D$ (mA)	$\beta$ (mVK $^{-1}$ )	$V_0$ (V)
$10^{-2}$	$-2,20 \pm 0,05$	$1,20 \pm 0,05$
$10^{-1}$	$-2,00 \pm 0,05$	$1,20 \pm 0,05$
$10^0$	$-1,80 \pm 0,05$	$1,20 \pm 0,05$
$10^1$	$-1,60 \pm 0,05$	$1,20 \pm 0,05$

O comportamento da corrente  $I_D$  com o coeficiente angular  $\beta$  é analisado com o auxílio das Figs. 10 e 11, onde também notamos que uma relação exponencial entre estes dois parâmetros pode ser estabelecida

$$I_D = I_2 \exp(\alpha\beta), \quad (4)$$

onde as duas constantes de ajuste

$$I_2 = 10^{-9} \text{mA} \quad (5)$$

e

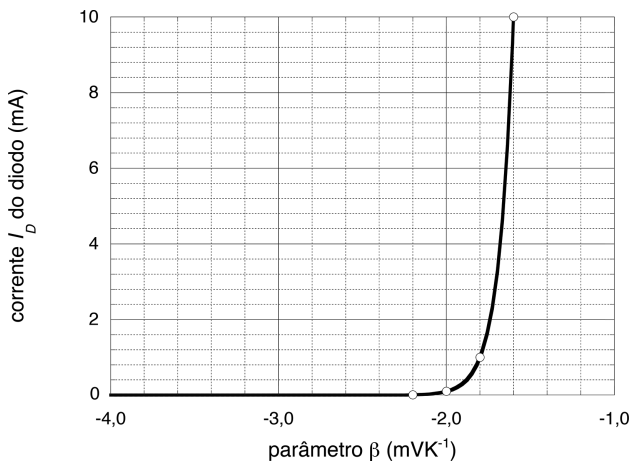
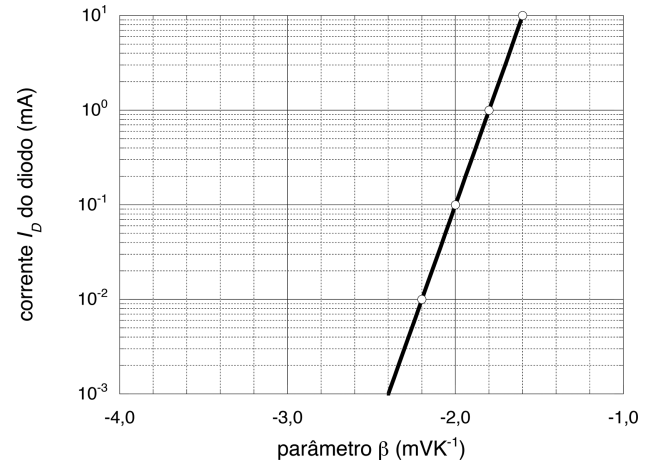
$$a = (1,2 \pm 0,2) \times 10^4 \text{V}^{-1}\text{K}, \quad (6)$$

foram determinadas a partir do gráfico da Fig. 11 da maneira usual. Combinamos agora as expressões (3) e (4) e obtemos a corrente  $I_D$  no diodo em função da voltagem  $V_D$  a qual ele está submetido e da sua temperatura  $T$  de operação

$$I_D = I_2 \exp\left(-\frac{aV_0}{T}\right) \exp\left(\frac{aV_D}{T}\right) \quad (7)$$

onde a voltagem no diodo,  $V_D$ , é expressa em volts e a temperatura  $T$  em kelvins. Da presente análise, as constantes  $I_2$ ,  $V_0$  e  $a$  são características intrínsecas do diodo e não dependem das condições de operação dele.

Lembramos, ainda, que a corrente que circula no diodo é devida às cargas em movimento e, deste modo, é natural que na expressão da corrente apareça a carga eletrônica  $e$ . Assim, podemos reescrever a Eq. (7) na forma


 Figura 10 - Comportamento da corrente no diodo,  $I_D$ , em função do coeficiente angular  $\beta$  da relação entre voltagem  $V_D$  e temperatura no diodo  $T$  a qual ele está submetido.

 Figura 11 - Comportamento exponencial da corrente com o coeficiente angular  $\beta$ .

$$I_D = I_2 \exp\left(-\frac{eV_0}{k_B T}\right) \exp\left(\frac{eV_D}{k_B T}\right) \quad (8)$$

onde a nova constante  $k_B$  é igual a

$$k_B = \frac{e}{a} = \frac{1,602 \times 10^{-19}}{(1,2 \pm 0,2) \times 10^4} = (1,3 \pm 0,3) \times 10^{-23} \text{JK}^{-1}. \quad (9)$$

Esta é a constante de Boltzmann [8,9], uma das constantes fundamentais da física. Podemos comparar este valor de  $k_B$  com o seu valor tabelado de  $1,380 \times 10^{-23} \text{J K}^{-1}$  e obtemos uma discrepância de apenas 6%.

Este é um bom momento para chamar a atenção sobre os limites de aplicabilidade de um modelo matemático. Segundo o modelo desenvolvido, todo o procedimento se sustenta na representação da curva característica corrente  $I_D$ -voltagem  $V_D$ , como indicada na Eq. (1) (ou na Eq. (8)), e entre a voltagem do diodo  $V_D$  e a sua temperatura  $T$ , dada pela Eq (3). Entretanto, observamos que, para voltagem nula, o diodo deve apresentar uma corrente nula. As Eqs. (1) e (8) não dão conta deste fato. Desta forma, acrescentamos um novo termo  $I_1$  à Eq. (1)

$$I_D = i_0 e^{bV_D} - I_1. \quad (10)$$

Para que em  $V_D = 0$  a corrente seja nula, devemos impor que  $I_1 = i_0$  e, deste modo, a corrente no diodo pode ser representada na forma

$$I_D = i_0 (e^{bV_D} - 1). \quad (11)$$

Se empregarmos a Eq. (8), temos

$$I_D = I_2 \exp\left(-\frac{eV_0}{k_B T}\right) \left[ \exp\left(\frac{eV_D}{k_B T}\right) - 1 \right]. \quad (12)$$

Como  $I_2$  é da ordem de picoamperes, a expressão (8) é uma boa aproximação para a região de operação do diodo considerada neste trabalho.

## 5. Considerações finais

Os resultados obtidos mostram que na faixa adotada para a operação do diodo,  $V_D > 0,5$  V, a curva exponencial (8) representa de forma bastante satisfatória o seu comportamento em um circuito, para temperaturas entre 0 °C e 100 °C. Apesar de ser observado que esta relação indica uma correlação inconsistente entre voltagem e corrente no componente para um valor de voltagem nula, a expressão (8) é bastante eficiente no regime de voltagens considerado e, para propósitos práticos, ela pode ser empregada desde que se respeite os seus limites de validade.

Outro fator importante está relacionado com o parâmetro  $b$  da Eq. (1). Como pode ser observado, este fator influencia na condutividade do diodo e está relacionado com a temperatura que o diodo está submetido no momento do experimento. É interessante notar que nos condutores usuais ôhmicos, à uma dada temperatura, a condutividade é constante e, para uma dada voltagem, a condutividade diminui com o aumento da temperatura. Para o diodo, submetido a uma dada voltagem, observamos que o aumento da temperatura aumenta a sua condutividade.

Um olhar atento para a Eq (3) mostra que o diodo usado em regime de corrente constante pode ser empregado como um termômetro. Com a ajuda desta equação, a ddp que ele apresenta pode ser transformada em uma escala de temperaturas.

A atividade sugerida neste trabalho emprega somente materiais de baixo custo para a sua realização e não exige um laboratório especializado. Se considerarmos a habilidade do professor em reduzir a um mínimo o tempo gasto com a coleta de dados, o experimento aqui apresentado pode ser adaptado com facilidade para

uma aula regular de graduação ou até mesmo para um grupo de Ensino Médio.

Esperamos que a atividade apresentada ofereça uma estratégia para professores que pretendam atrair a atenção dos seus alunos para o conhecimento da natureza através de uma atividade didática experimental, de uma forma agradável e harmoniosa. Esperamos também que ela permita ao estudante a sua familiarização com o processo científico, oferecendo à ele condições de desenvolver as suas habilidades e competências em relação à observação e à análise dos fenômenos físicos.

## Referências

- [1] P. Horowitz and W. Hill, *The Art of Electronics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1989), 2<sup>a</sup> ed.
- [2] R.J. Smith, *Electronics: Circuits and Devices*, (Wiley, New York, 1987), 3<sup>a</sup> ed.
- [3] L. Kirkup and S. Wallace, *Eur. J. Phys.* **8**, 93 (1987).
- [4] L. Kirkup and M. Nicolson, *Eur. J. Phys.* **7**, 49 (1986).
- [5] A. Sconza and G. Torzo, *Eur. J. Phys.* **10**, 123 (1989).
- [6] H.M. Campbell, B.M. Boardman, T.C. DeVore and D.K. Havey, *Am. J. Phys.* **80**, 1045 (2012).
- [7] V. Cruz, *O Diodo e Suas Características: Uma Aula Introdutória Sobre Semicondutores*. Trabalho de Final de Curso de Licenciatura em Física, Instituto de Física, UFRJ, 2009.
- [8] Encyclopædia Britannica Online, disponível em <http://www.britannica.com/EBchecked/topic/72417/Boltzmann-constant>, acesso em 19/10/2014.
- [9] C. Cercignani, *Ludwig Boltzmann: The Man who Trusted Atoms* (Oxford University Press, Oxford, 2006).