Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 37, n. 1, 1602 (2015)
www.sbfisica.org.br
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/S1806-11173711659

Breve histórico da dinâmica newtoniana do movimento curvilíneo

(Brief overview on the Newtonian dynamics of curvilinear motion)

C.M. Porto[1]

Departamento de Física, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, Brasil
Recebido em 8/7/14; Aceito em 18/9/14; Publicado em 31/3/2015

Neste trabalho fazemos uma apresentação da dinâmica newtoniana do movimento curvilíneo. Iniciamos fazendo um pequeno retrospecto da questão, a partir da problematização imposta pela concepção cartesiana do movimento inercial, passando quase que imediatamente ao estudo das sucessivas abordagens newtonianas do tema. Apresentamos os tratamentos iniciais de Newton - ainda dominados pela idéia cartesiana de "esforço centrífugo" - nos quais, no entanto, já observamos a sutileza do raciocínio matemático apoiado nas noções de elementos infinitesimais. Destacamos, em seguida, a aparente contribuição do pensamento de Robert Hooke para a concepção newtoniana do movimento curvilíneo, concretizada sobretudo através de diálogos epistolares, ainda que escassos ou reticentes. Enfatizamos como, após esse contato, Newton abandonou a noção da atuação de uma força centrífuga a produzir um equilíbrio dinâmico no movimento, em favor de um entendimento do problema como um sistema mecânico fundamentalmente fora do equilíbrio. Passamos, por último, à concepção newtoniana definitiva do movimento, já expressa em sua essência no tratado *De Motu* e finalmente apresentada na grande obra dos *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural.* Salientamos, particularmente, a dedução efetuada por Newton das leis do movimento planetário propostas por Kepler, que constituiu uma das mais altas realizações da ciência humana.
Palavras-chave: história da mecânica, Newton, força mecânica.

In this work we make an exposition on the Newtonian dynamics of curvilinear motion. We begin by making a small retrospect on this question, starting from the moment when Descartes' conception of inertial motion rendered it problematic, and passing almost at once to the study of the different Newtonian approaches to this issue. We present Newton's initial treatments - yet governed by the Cartesian idea of "Centrifugal Endeavour" - where we nonetheless can already observe the subtlety of a mathematical reasoning based on the notions of infinitesimal calculus. Afterwards, we emphasize the seeming contribution of Robert Hooke's thought to the Newtonian conception of curvilinear motion, accomplished most of all by epistolary dialogues, yet rare or reticent. We emphasize how, after this exchange, Newton abandoned the notion of the action of a centrifugal force producing a kind of dynamical equilibrium of motion, in favor of a new understanding of the problem as a basically out-of-equilibrium mechanical system. We end with Newtonian final conception of motion, already framed in its essential aspects in the tract named *De Motu*, and finally presented in his master work *Mathematical Principles of Natural Philosophy.* We particularly point Newton's deduction of Kepler's planetary laws of motion, which has become one of the highest achievements of human science.
Keywords: history of mechanics, Newton, mechanical force.

1. Introdução

Em nossa experiência docente nos cursos universitários de física fundamental temos observado que um dos problemas de Mecânica que mais oferecem dificuldades ao entendimento dos estudantes é o da dinâmica do movimento curvilíneo. Em primeiro lugar, podemos associar essa dificuldade à persistência de um elemento de senso comum, de caráter aristotélico, que associa força a velocidade e não a aceleração. Essa incompreensão das relações entre força e as grandezas cinemáticas se manifesta nitidamente no caso dos movimentos curvilíneos, em que a direção da aceleração, e, por conseguinte, da força resultante, não coincide com a do movimento. Torna-se comum, por parte dos alunos, a interpretação de que, por exemplo, em uma trajetória circular há um cancelamento de componentes radiais de forças, já que o movimento não ocorre nessa direção.

Nossa opinião, contudo, é a de que, além desse fator anteriormente descrito e certamente atuante, relacio-

[1]E-mail: claudio@ufrrj.br.

nado à assimilação deficiente da segunda lei de Newton, há também um aspecto referente a uma dificuldade de representação do conceito de força como ação causal de origem fundamentalmente externa ao objeto. Nesse quadro, é bastante frequente a introdução na análise do problema pelo estudante de uma "força centrífuga", como a materialização de uma tendência do objeto em movimento de se afastar do centro de sua trajetória. Instado a responder sobre quem seria o agente dessa suposta força, o estudante frequentemente afirma que ela se deve ao movimento ou à velocidade do corpo, ou seja, a algo que não lhe é externo, mas sim reside nele próprio.

Essa opinião encontra reforço ao fazermos um estudo histórico do tratamento desse problema da dinâmica das trajetórias curvas. Com efeito, um dos traços mais marcantes da chamada Revolução Científica, que deu origem ao pensamento físico moderno, é o processo de exteriorização das causas do movimento [1]. A nova física, surgida dessa transformação, eliminou de seu campo de saber a idéia aristotélica de causa formal, que tão importante papel representou na concepção científica e filosófica daquele pensador. Descartes, juntamente com aqueles que poderíamos chamar de "neoatomistas", ao despojar a matéria de quaisquer outros atributos essenciais além de extensão, destruiu a base filosófica para a consideração aristotélica dos processos naturais como a concretização de tendências inerentes à natureza dos entes. De fato, no pensamento de Aristóteles, as mudanças espontâneas correspondiam a processos que cumpriam a finalidade de realizar potencialidades latentes nos objetos; atingida essa finalidade, cessavam essas mudanças. Não faziam, pois, sentido processos que continuassem indefinidamente, sem a realização de qualquer objetivo.

Entretanto, como parte dos desdobramentos do debate a respeito dos modelos planetários heliocêntrico e geocêntrico, a física elaborou o princípio da continuidade inercial dos movimentos [1]. A conciliação desse conceito com o pensamento aristotélico tornou-se impossível. Assim, ao confrontar o aristotelismo e banir de sua própria concepção científica e filosófica as noções de causas formais e finais, Descartes pavimentou o caminho para a compreensão racional de processos que, por si sós, mesmo sem a ação de causas externas, perdurariam infinitamente.

No entanto, mesmo Descartes, que aperfeiçoou a idéia galileana da continuidade inercial do movimento, dando-lhe um caráter retilíneo, ao tratar do movimento curvilíneo identificou a existência de uma tendência centrífuga como um elemento dinâmico fundamental do problema. Essa tendência, transformada na expressão "força centrífuga" por Huygens, revela ainda a imperfeição da formulação do conceito de força como agente causal externo. Vemos, então, nos diferentes usos dessa nomenclatura força por parte dos diferentes pensadores, até chegarmos à noção de força impressa, estabelecida por Newton nos seus escritos de maturidade, a transmutação gradual de um conceito, que inicialmente ainda se apresentava como um elemento interno ao objeto movente, rumo a sua cristalização como a idéia de uma causação eminentemente externa, transmutação essa que, mesmo na obra do genial físico inglês, vai se operando apenas paulatinamente.

O processo histórico parece, pois, nos revelar, mais uma vez, os obstáculos cognitivos presentes na aprendizagem do tema. Se assim ocorre, o conhecimento da realização histórica se torna extremamente valioso para a reflexão sobre a prática docente relacionada ao assunto e, talvez, onde couber, para sua reformulação. Deste modo, esse trabalho visa a contribuir para essa reflexão, somando-se aos diversos que têm sido criteriosamente apresentados nesta direção. Não se trata, por certo, de conteúdos originais em si mesmos, mas de uma tentativa de apresentação sistemática de elementos de história da mecânica já conhecidos, porém que se encontram muitas vezes dispersos pela literatura especializada, em obras memoráveis de autores como B.Cohen, R.Westfall, Whiteside e Brackenridge. Assim, o objetivo primordial do trabalho é aumentar a bibliografia em língua portuguesa, ainda escassa, para cursos de formação de professores, notadamente em disciplinas de história e evolução da física.

O texto é, então, organizado do seguinte modo: na primeira seção fazemos uma exposição bem resumida da análise do problema anterior a Newton, através das contribuições de Descartes e Huygens, para, em seguida, nas seções subsequentes, abordarmos o tratamento newtoniano do problema. Primeiramente, na seção três, apresentamos os estudos iniciais de Newton, realizados em meados da década de 1660 [2]. Em seguida, na seção quatro, apresentamos o tratamento dado no manuscrito intitulado *Do Movimento Circular* [2], onde despontam os raciocínios do cálculo infinitesimal, então recém desenvolvidos pelo próprio Newton. Na seção cinco abordamos a contribuição, aparentemente decisiva, de Robert Hooke ao entendimento de Newton a respeito do movimento curvilíneo, com a substituição do conceito, até então empregado por ele, de força centrífuga pelo de força centrípeta. Por fim, nas seções seis e sete apresentamos a análise newtoniana relativa a seus escritos da maturidade, mais especificamente da década de 1680, onde se destacam o tratado *Do Movimento* e o conjunto de lições de mesmo título, ambos preparativos para a sua obra mecânica máxima, os *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*, publicada em 1687 e com justiça citada com uma das obras científicas mais influentes da história do pensamento.

Segue-se, naturalmente, uma conclusão e, após, um apêndice trazendo os detalhes matemáticos da demonstração realizada por Newton de que a força central atuante em um objeto que se mova em uma trajetória elíptica, com centro de força em um dos focos dessa elipse, varia inversamente com o quadrado da distância do ponto ao foco em questão.

2. A tendência centrífuga em Descartes e Huygens

Em seu livro *Princípios de Filosofia*, de 1644, Descartes apresentou a formulação do princípio da inércia da maneira como o compreendemos hoje, incluindo o seu caráter direcional e dividindo seu conteúdo em suas duas primeiras leis básicas do movimento:

> A primeira lei da natureza: cada coisa permanece no seu estado se nada se alterar; assim, aquilo que uma vez foi posto em movimento continuará sempre a mover-se. [3]

e

> A segunda lei da natureza: todo corpo que se move tende a continuar o seu movimento em linha reta. [4]

Estabelecidos esses princípios, surgiu então uma questão premente, sobre a qual Descartes se debruçou: se a continuidade natural do movimento é retilínea, como explicar a dinâmica do movimento circular? No próprio artigo XXXIX da parte II da obra citada, em que é apresentada a segunda lei da natureza, Descartes inicia uma discussão desse movimento através do exemplo de uma funda (uma pedra segura por uma tira de pano ou corda) sendo girada por uma mão. De acordo com ele, tendo em vista o princípio da inércia, a cada instante a pedra tende a se movimentar ao longo da reta tangente à trajetória circular que descreve; não o faz porque há uma ação do pano ou corda que a prende. No mesmo artigo mencionado, Descartes então associa essa tendência inercial de se movimentar pela tangente a uma tendência do corpo em movimento circular de se afastar do centro em torno do qual se movimenta:

> O que claramente nos mostra que qualquer corpo que se move circularmente tende constantemente a se afastar do centro do círculo que descreve; até o sentimos com a mão quando giramos a pedra na funda porque a pedra estica e estende a corda para se afastar diretamente de nossa mão. [5]

Assim, nesse trecho, Descartes parece identificar uma tendência centrífuga com essa tendência inercial de continuidade retilínea do movimento pela tangente. Entretanto, mais adiante, na mesma obra (parte III, Artigo LIX), sua linguagem é mais ambígua e ele parece identificar a existência de uma tendência centrífuga, não mais tangencial e sim radial. Novamente, no exemplo da funda, Descartes fala de uma tendência da pedra se afastar radialmente do centro:

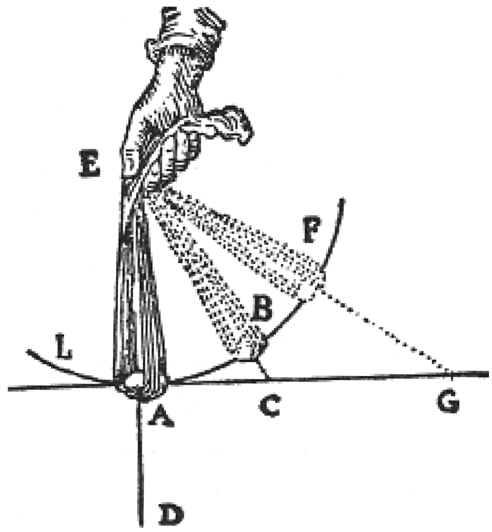

Figura 1 - Extraída do livro *Princípios de Filosofia*, de René Descartes, [6]

> Finalmente, se em vez de considerarmos toda a força de sua agitação apenas prestássemos atenção a uma de suas partes, cujo efeito é impedido pela funda e que distinguimos de outra parte cujo efeito não é impedido dessa maneira, diríamos que a pedra, estando no ponto A, tende apenas para D, ou que tende apenas a afastar-se do centro E seguindo a linha reta EAD. [6]

No entanto, apesar de esse tratamento do esforço centrifugo por Descartes ter influenciado profundamente o pensamento subsequente, sua análise do problema não foi além de uma abordagem qualitativa. O primeiro tratamento quantitativo publicado foi desenvolvido pelo holandês Christiaan Huygens.

Huygens assimilou a noção cartesiana do esforço centrífugo, chamando-o de "força centrífuga", e em sua obra intitulada *Horologium Oscillatorium*, publicada em 1673, apresentou uma expressão matemática para ela, qual seja, de que seria proporcional ao quadrado da velocidade do objeto movente e inversamente proporcional ao raio do círculo em que esse objeto se move. A demonstração de seus resultados, aliás bem apresentada na literatura, tanto aquela já clássica [7], quanto algumas mais recentes [8, 9], não constou do livro mencionado, mas sim veio a público somente em uma obra posterior, *De Vi Centrifuga*, publicada postumamente.

Entretanto, tanto na análise qualitativa de Descartes, como na quantitativa formulada por Huygens e a ela conceitualmente associada, sobressai o aspecto de que a "força ou esforço centrífugo" é ainda a expressão de uma tendência interna do objeto movente e não uma ação exterior, que determine causalmente seu movimento. É ainda na elaboração adequada do conceito de força que esbarra o desenvolvimento definitivo da dinâmica.

3. Os estudos preliminares de Newton

Newton ingressou no Trinity College da Universidade de Cambridge em 1661. Lá, à parte dos currículos institucionais e antes por uma via autodidata, tomou contato com os desenvolvimentos então recentes, tanto da matemática quanto da filosofia natural, notadamente com as obras de René Descartes e Galileu [2, 10]. O imenso talento de Newton, no entanto, permitiu que ele muito rapidamente passasse da condição de aprendiz para o desenvolvimento de suas próprias contribuições aos temas mencionados.

Nos anos que vão de 1664 a 1666 [2] Newton realizou estudos importantes sobre Matemática e física, registrados em um livro de anotações, denominado na literatura histórica inglesa *The Waste Book* [2]. Entre eles destacamos, em virtude do nosso interesse aqui, os estudos sobre mecânica, particularmente os relacionados à dinâmica do movimento circular.

O tratamento dado inicialmente por Newton à dinâmica do movimento circular foi, sem dúvida, influenciado pelo pensamento de Descartes [2, 11], influência essa manifesta inclusive em certa terminologia empregada por Newton naqueles textos e por ele modificada em abordagens posteriores. Como exemplo emblemático desse elemento cartesiano salientamos a noção de "esforço centrífugo" (*endeavour from the center*), amplamente utilizada por Newton nessa sua análise preliminar daquele tipo de movimento [12].

O tratamento newtoniano inicial do movimento circular se baseou em uma engenhosa estratégia de considerá-lo como um processo limite de um movimento poligonal. De fato, Newton abordou o problema imaginando a seguinte situação: seja uma bolinha confinada ao interior de um cilindro, com cujas paredes colide, elasticamente, alterando com isso somente a direção de seu movimento, sem alterar a magnitude da velocidade; no mais, entre duas colisões sucessivas, a bolinha se move livremente, ou seja, retilineamente, com velocidade constante, conforme a concepção de movimento inercial estabelecida por Descartes. Newton imaginou de início uma trajetória quadrada, ocasionada por quatro colisões com as paredes do cilindro, e em seguida generalizou seu raciocínio para um polígono regular qualquer.

Se o raciocínio é aplicável a qualquer polígono regular, poderíamos escolher qualquer um, a título de ilustração. Consideremos, então, uma trajetória hexagonal, inscrita na seção reta de um cilindro (Fig. 2).

Em cada colisão, a bolinha sofre a atuação de uma "força", que a desvia de sua direção de movimento original. Newton relacionou diretamente essa "força" (que nós chamamos hoje de impulso, isto é, efetivamente, a integral da força realizada, no caso pelas paredes do cilindro, sobre o tempo em que ela atua) a uma "força de movimento" (na nossa linguagem atual, momento linear) fornecida à bolinha pelo ato da colisão; esse momento linear fornecido à bolinha através da colisão com a parede seria igual à "força" (impulso) exercida sobre ela, inclusive em direção; na nossa linguagem, a força (média no tempo) seria então proporcional ao momento linear fornecido à bolinha pela colisão, que, portanto, teria inclusive a direção dessa força.

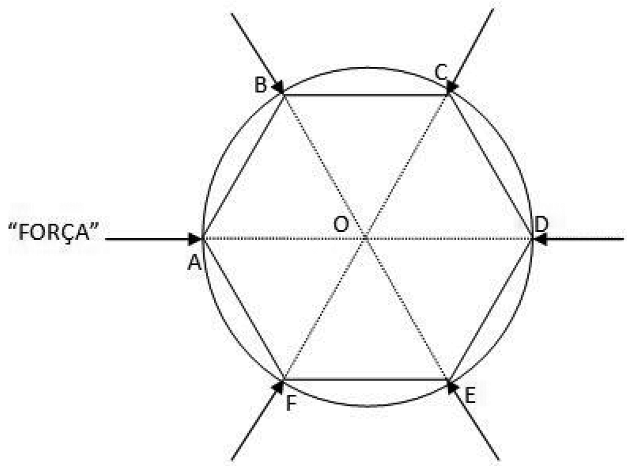

Figura 2 - Movimento hexagonal inscrito em um círculo

O passo seguinte dado por Newton foi considerar o movimento retilíneo, reorientado após a colisão, como a composição de dois movimentos virtuais: o movimento retilíneo anterior, representado por uma "força de movimento" (momento linear) original, como expressão da continuidade inercial que ocorreria caso não tivesse havido a ação da parede, e o movimento adquirido na direção da força impulsiva da parede, expressa também em termos de um momento linear produzido nessa direção. Implicitamente no raciocínio newtoniano está presente a idéia de que a composição desses movimentos virtuais se dá por uma regra do paralelogramo, em que os lados da figura geométrica correspondem aos deslocamentos virtuais, na direção original e na direção da força, enquanto o deslocamento real, como se tornou habitual para nós, é representado pela diagonal do paralelogramo (Fig. 3).

Admitir que a força média da parede, F, seja proporcional ao momento linear acrescentado ao original pela colisão significa admitir que o será também à velocidade desse movimento virtual. Como essa velocidade (virtual), assim como a original (agora também virtual), seria constante, a distância percorrida virtualmente pelo objeto, ao final de certo intervalo de tempo, na direção do impulso aplicado, seria também proporcional a esta força média, de tal modo que essa distância seria uma expressão da medida da força.

Em verdade, a partir desse raciocínio Newton obteve resultados quantitativos. Com efeito, tomemos agora o exemplo de uma trajetória octogonal, representada pela Fig. 4.

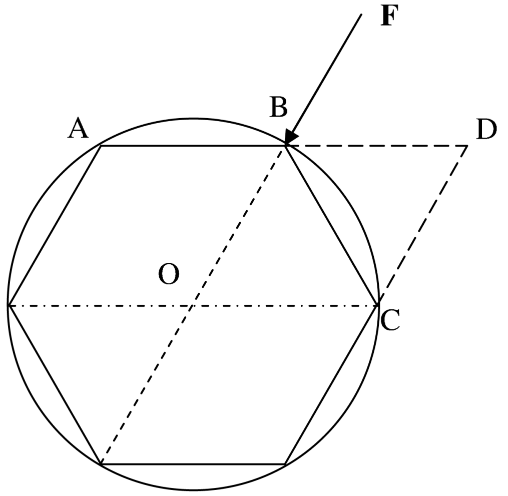

Figura 3 - Deslocamento real como composição de deslocamentos virtuais

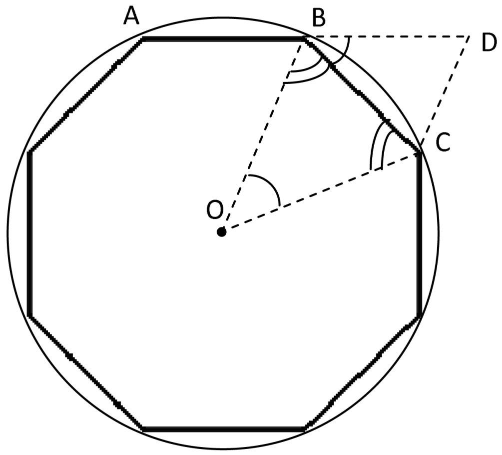

Figura 4 - Trajetória octogonal inscrita em um círculo

Chamemos de I o impulso aplicado ao objeto em uma colisão. Ele será, segundo vimos, igual à “força de movimento” ou momento linear, Q, fornecida ao objeto na direção da força e, nessa condição, seria proporcional à distância DC, virtualmente percorrida por ele naquela direção, durante o intervalo de tempo até a colisão seguinte

$$I \sim DC. \tag{1}$$

Newton, então, comparou esse impulso com o momento linear original do objeto, antes da colisão. Esse momento linear, sendo proporcional à velocidade (constante) da bolinha entre duas colisões, é diretamente proporcional à distância percorrida nesse intervalo de tempo, ou seja, ao lado do polígono, AB(= BC). Desta forma, Newton pôde escrever:

$$\frac{I}{Q} = \frac{DC}{BC}. \tag{2}$$

Por sua vez, essa distância DC pode ser avaliada a partir da geometria. De fato, consideremos os triângulos OBC e BCD: os lados BD e BC têm a mesma medida, já que correspondem, respectivamente, à distância que, naquele mesmo tempo, o objeto percorreria caso não tivesse havido o impacto em B e à distância que ele percorre, com a mesma velocidade em magnitude (a colisão é elástica), apenas em outra direção, em virtude daquele impacto. Sendo assim, o triângulo BCD é isósceles, do mesmo modo que OBC. Além disso, os ângulos que a velocidade, antes e depois do impacto em B, faz com o raio são iguais. Deste modo, o ângulo do vértice B do triângulo BCD (o que falta para se atingir 180^o) é igual ao ângulo do vértice O de OBC e os dois triângulos são semelhantes.

Da semelhança dos dois triângulos, extraímos a relação

$$\frac{DC}{BC} = \frac{BC}{r}\,, \tag{3}$$

onde r é o raio do círculo, ou seja,

$$\frac{I}{Q} = \frac{BC}{r}\,. \tag{4}$$

A partir desse resultado, Newton procedeu à soma dos (hoje diríamos módulos dos) impulsos nas diversas colisões ao longo de uma volta e escreveu

$$\frac{\Sigma I}{Q} = \frac{p}{r}, \tag{5}$$

onde p é o perímetro do polígono.

Em nenhum momento deste desenvolvimento utilizamos propriedades geométricas específicas do octógono. Por conseguinte, o que foi obtido seria válido para qualquer linha poligonal regular. Newton, então, imaginou o círculo como o limite da linha poligonal quando o número de lados tende a infinito e a força impulsiva, exercida pela parede a cada impacto, se torna uma força continuamente exercida sobre o objeto. Assim sendo, os resultados obtidos, em especial os da Eq. (4), serão válidos no movimento circular.

Esses resultados quantitativos que, nesses primeiros rascunhos, datados dos anos de 1664 e 1665, Newton extrai são menos importantes do que a concepção do método em si, que ele aplicará mais tarde na dedução da lei das áreas (segunda Lei de Kepler) para movimentos governados por forças centrais. Apesar disso, na obra *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*, publicada em 1687 e de que falaremos mais adiante(no escólio do Teorema IV, do livro I), Newton retorna a esse método da construção poligonal e, especificamente, ao resultado (5) para, a partir dele, propor uma demonstração adicional da expressão da força centrípeta atuante sobre um objeto em movimento circular.

Com efeito, em nossa linguagem moderna, a descrição dada por Newton na referida seção de seu livro *Principia*, seria que, na Eq. (5), quando aplicada à circunferência como limite da poligonal, a soma das magnitudes dos impulsos, em um intervalo de tempo T correspondendo a uma volta completa, será igual à magnitude (constante) da força (constante) da parede sobre a bolinha multiplicada por T. Por outro lado, o momento linear no denominador será igual à massa m da bolinha vezes a velocidade

$$\frac{FT}{mv} = \frac{p}{r} \tag{6}$$

$$= 2\pi. \tag{7}$$

Assim sendo, temos

$$F = 2\pi\,\frac{mv}{T} \tag{8}$$

$$= \frac{mv^2}{r}, \tag{9}$$

já que $\dfrac{2\pi r}{T} = v$.

Devemos ainda fazer uma importante observação a respeito do tratamento dado por Newton a esse problema do movimento circular: mais uma vez aparentemente influenciado por Descartes, Newton considera a existência de um "esforço centrífugo" como elemento essencial da dinâmica que conduz à trajetória circular. De fato, no exemplo considerado, a parede da seção cilíndrica atua sobre a bolinha, atribuindo-lhe um momento linear, por meio de uma "pressão" (que nós chamaríamos de força de contato), que somente se exerce porque a bolinha a pressiona em sentido inverso, devido a seu esforço centrífugo radial.

Nas palavras do próprio Newton:

> De onde parece que todos os corpos movidos circularmente apresentam um esforço a partir do centro [centrífugo: N.A.] em torno do qual se movem, pois de outra forma o corpo 'oc' [a bola] não pressionaria continuamente 'edf' [o cilindro]" [13].

Segundo John Herivel [2], é inegável que, nesta etapa de seu pensamento, Newton considerava esse "esforço centrífugo" como uma espécie de força, na maioria das vezes incapaz de produzir um deslocamento efetivo, devido à atuação contrária de algum agente responsável pela concretização da trajetória circular. Realmente, Newton escreve nas definições cinco e seis de um manuscrito composto provavelmente na segunda metade da década de 1660 [2]:

> Força é o princípio causal de movimento ou repouso, e é ou algo externo que, impresso em certo corpo, gera ou destrói seu movimento, ou no mínimo em alguma medida altera-o; ou é o princípio interno pelo qual o movimento ou o repouso impresso no corpo é conservado, e pelo qual todo ente tende a perseverar em seu estado atual e opõe-se a qualquer impedimento. [14]

e a partir disso

> 'Conatus' é uma força obstruída, ou uma força na medida em que se lhe resiste. [14]

A frase constante da penúltima citação é de extrema importância para a análise do problema, já que revela, explicitamente, que a concepção de força como uma ação de origem fundamentalmente externa ao corpo analisado ainda não estava plenamente consolidada. A nosso juízo, seria preciso antes que se consolidasse para que a idéia de uma força centrífuga fosse substituída pela atuação unicamente de uma força centrípeta e a dinâmica newtoniana do movimento curvilíneo chegasse ao seu desenvolvimento final.

4. O tratado *Do Movimento Circular*

Alguns anos após, por volta de 1669, Newton compôs um tratado mecânico intitulado *Do movimento circular*, em que a análise se faz bem mais elaborada. Essa mudança no tratamento do problema se deveu, sobretudo, aos desenvolvimentos do raciocínio infinitesimal realizados por Newton entre o período do livro de anotações e o do novo tratado.

Com efeito, em lugar de um processo limite de um movimento poligonal, Newton analisou o movimento circular diretamente, comparando-o com o movimento inercial, retilíneo, tangente à circunferência, que seria realizado pelo objeto movente caso não houvesse uma força impelindo-o para a realização da trajetoria circular real. Newton considerou o arco AB que o objeto, partindo de A, com velocidade v, de magnitude constante, descreveria em um certo intervalo de tempo, bem como a distância AC, ao longo da tangente ao círculo em A, tangente essa que o mesmo objeto percorreria, caso não houvesse sido desviado pela força que o impele para a trajetória circular (Fig. 5). Para Newton, o desvio radial BC entre o movimento circular e o movimento tangencial seria uma medida da "força centrífuga" que age sobre o objeto e que deve ser compensada por uma força contrária.

O elemento genial introduzido por Newton em sua análise dinâmico-geométrica do problema foi a consideração de deslocamentos infinitesimais ao longo da circunferência. Ao longo desses deslocamentos, pequenos o bastante, a força pode ser considerada aproximadamente constante. Isso permitiu que Newton empregasse o resultado obtido por Galileu [2,11,12] para a queda de um corpo, a partir do repouso, sob a ação da gravidade (constante), qual seja, de que a distância percorrida por este corpo em um certo intervalo de tempo seria proporcional à gravidade e ao quadrado do intervalo de tempo considerado. Newton generalizou esse resultado para a ação de qualquer força constante e não apenas a ação da gravidade. Assim sendo, o desvio radial BC, associado ao arco infinitesimal AB, seria proporcional à magnitude da força centrífuga e ao quadrado do intervalo de tempo considerado, ou, dito de outra forma, a força centrífuga seria proporcional ao desvio BC e inversamente proporcional ao quadrado do intervalo de tempo correspondente.

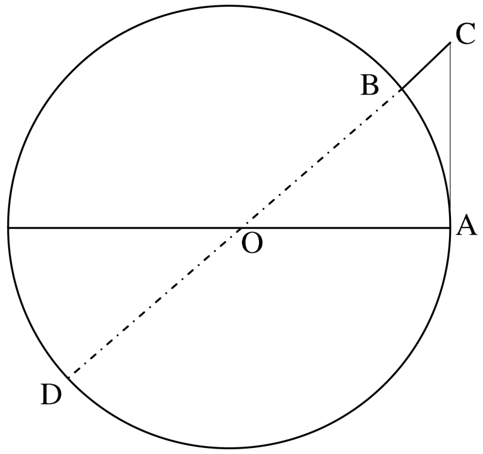

Figura 5 - Diagrama da análise do movimento circular de 1669

O passo seguinte dado por Newton foi estabelecer uma relação entre o desvio BC, ocorrido em um intervalo de tempo t, e parâmetros relevantes associados ao movimento circular, notadamente seu raio R e seu período T. Para tanto, Newton considerou a distância X que o objeto percorreria em linha reta, ao longo de um intervalo de tempo T, sob a ação de uma força de mesma magnitude daquela da força centrífuga que agiria sobre ele no movimento real. Pela relação de Galileu, X e BC seriam proporcionais ao quadrado de T e t, respectivamente. Assim sendo, temos

$$\frac{X}{BC} = \frac{T^2}{t^2}. \tag{10}$$

Por outro lado, como o objeto se move uniformemente sobre o círculo, a razão entre os intervalos de tempo equivale à razão entre os arcos descritos, ou seja

$$\frac{X}{BC} = \frac{(2\pi r)^2}{AB^2}. \tag{11}$$

A medida do desvio radial BC é relacionada ao deslocamento tangencial virtual AC através de uma propriedade geométrica chamada "potência de um ponto em relação a um círculo", que Newton encontrou em seu estudo da obra de Euclides. No caso, temos

$$AC^2 = BC \cdot CD, \tag{12}$$

onde D é diametralmente oposto a B. Como se trata de um deslocamento infinitesimal, podemos utilizar na Eq. (12) a aproximação $CD \approx BD = 2r$, onde r é o raio da circunferência descrita, obtendo

$$BC = \frac{AC^2}{2r}. \tag{13}$$

Substituindo na Eq. (11) temos

$$X = \frac{AC^2}{2r}\,\frac{(2\pi r)^2}{AB^2}. \tag{14}$$

Para um deslocamento infinitesimal podemos tomar a aproximação $AC \approx AB$, de forma que a Eq. (14) fica igual a

$$\begin{aligned} X &= \frac{AB^2}{2r}\,\frac{(2\pi r)^2}{AB^2}. \\ &= 2\pi^2 r \end{aligned} \tag{15}$$

Como dissemos, a magnitude da força centrífuga é proporcional à distância X, que seria percorrida no período T, e inversamente proporcional a T^2. Assim, de acordo com a Eq. (15), temos

$$F_c \sim \frac{r}{T^2}, \tag{16}$$

isto é, a magnitude da força centrífuga é proporcional ao raio e inversamente proporcional ao quadrado do período.

Multiplicando e dividindo a expressão anterior por r e lembrando que o comprimento da circunferência ABDA é proporcional a esse raio, temos

$$\begin{aligned} F_c &\sim \frac{ABDA^2}{r\,T^2}, \\ &\sim \frac{v^2}{r}. \end{aligned} \tag{17}$$

Assim, Newton chegou à expressão matemática da força centrífuga atuante sobre um objeto que descreve um movimento circular de raio r com velocidade constante v, já apresentada por Huygens, sem demonstração, em sua obra *Horologium Oscillatorium.*

5. A contribuição de Hooke ao problema das trajetórias curvilíneas

Não houve registros de avanços significativos de Newton na mecânica durante os anos que se seguiram ao tratado *Do Movimento Circular.*

No início da década de 1670, Newton e Robert Hooke se envolveram em uma polêmica associada às contribuições newtonianas à óptica, mais precisamente relacionadas a sua concepção da natureza heterogênea da luz. Entretanto, em 1679, apesar do embate em tons relativamente ácidos havido anos antes, na condição de secretário da Royal Society e, portanto, responsável pela manutenção de um intercâmbio intelectual entre os membros da sociedade e cientistas e filósofos destacados, Hooke reiniciou uma breve correspondência com Newton [10]. Em especial, solicitou a Newton uma opinião sobre sua hipótese de que os movimentos planetários poderiam ser analisados em termos de uma composição de um movimento inercial tangencial com um movimento produzido por uma força dirigida a um corpo atrator central.

> (...) De minha parte considerarei como um grande favor se o Sr. me der o prazer de comunicar por carta suas objeções contra qualquer hipótese ou opinião minha; e especialmente se me der a conhecer seus pensamentos sobre essa de compor os movimentos celestiais dos planetas de um movimento direto pela tangente e de um movimento de atração em direção a um corpo central, ou que objeções o Sr. tem contra minha hipótese das leis ou causas da elasticidade. [15][2]

Hooke já havia apresentado essa concepção em uma reunião da Royal Society, realizada em 23 de maio de 1666 [16]:

> Eu tenho frequentemente pensado por que os planetas deveriam mover-se em torno do Sol de acordo com a suposição de Copernico, não estando incluídos em qualquer esfera sólida (as quais os antigos, possivelmente por essa razão, adotaram) nem ligados a ele , como a seus centros, por quaisquer fios visíveis; e nem se afastar dele além de certa medida, nem tampouco mover-se ao longo de uma linha reta, como todos os corpos, que tenham um único impulso, devem fazer. [17]

Prosseguindo em sua apresentação, Hooke rejeitou uma explicação desse movimento em termos de diferenças de densidade do éter circundante ao corpo celeste, devida em parte a Borelli. De acordo com o seu pensamento

> A segunda maneira [diferente da de Borelli (N.A.)] "de infletir um movimento retilíneo para uma curva pode ser a partir de um corpo atrativo localizado no centro; que continuamente tenta atrair ou puxar para si". [16].

Tornou a apresentar essa concepção em sua obra *Attempts to prove the motion of the earth by observation*, publicada em 1674 e republicada em 1679.

> Um sistema de mundo diferindo em muitos particulares de qualquer outro até então conhecido(...). Esse sistema depende de três suposições.
>
> Primeiramente, que todos os corpos celestes quaisquer que sejam possuem uma atração ou um poder gravitacional em direção a seus centros, pelo qual atraem não apenas suas próprias partes, e evitam que escapem deles, como observam a Terra fazer, como também atraem todos os outros corpos celestiais que estão dentro de sua esfera de atividade;(...)
>
> A segunda suposição é essa, que todos os corpos, quaisquer que sejam, colocados em um movimento direto e simples continuarão a se mover para frente em uma linha reta, até que, por alguns outros poderes eficazes, sejam defletidos e curvados em um movimento descrevendo um círculo, elipse ou qualquer outra linha curva.
>
> A terceira suposição é a de que esses poderes atrativos são tão intensos em operação tanto mais próximo o corpo afetado esteja de seus centros. [18]

Alguns anos depois, em carta a Edmund Halley, Newton fez menção ao fato de já ter conhecimento dessas idéias de Hooke através da referida obra [15] , embora tenha negado ao próprio Hooke que houvesse tomado ciência delas, em sua resposta à carta anteriormente transcrita [10].

Na resposta a essa carta Newton não se pronunciou sobre o tema solicitado, mas iniciou com Hooke um debate sobre trajetórias de corpos em queda devido à atuação da gravitação terrestre, incluindo em sua análise o movimento do próprio planeta. Na realidade, a solução inicial do problema proposta por Newton continha erros, que foram apontados por Hooke. Daí seguiu-se uma disputa intelectual, que prosseguiu através de mais algumas poucas cartas, até que Newton finalmente silenciasse sobre o caso e deixasse Hooke sem resposta.

A extensão da contribuição de Hooke para a mecânica de Newton em geral, e para o entendimento e a enunciação da Lei da Gravitação Universal em particular, é objeto de amplo debate acadêmico ainda hoje [19], debate aliás iniciado pelo próprio Hooke com sua reclamação de prioridade na descoberta da referida Lei. Esse debate é tão amplo que uma exposição mais aprofundada mereceria uma abordagem à parte, que foge aos objetivos deste trabalho. Seja como for, os estudiosos atribuem a essa correspondência entre Hooke e Newton uma motivação decisiva para os desenvolvimentos da mecânica que este último realizou nos anos seguintes [10, 20]. Mais ainda, dividem os estudos newtonianos sobre o tema em duas fases, pré-1679 e pós-1679 [10, 11], tamanha, em sua opinião, teria

[2]No original: *For my part I shall take it as great favour if you shall please to communicate by letter your objections against any hypothesis or opinion of mine, and particularly if you let me know your thoughts of that of compounding the celestiall motions of the planetts of a direct motions by the tangent and an attractive motion towards the centrall body, or what objections you have against my hypothesis of the lawes or causes of springynesse.*

sido a importância do debate com Hooke a respeito da dinâmica do movimento curvilíneo, mais precisamente, a concepção deste último em relação à atuação da força direcionada ao centro atrator. Na verdade, a decomposição do movimento curvilíneo, segundo a concepção proposta por Hooke, em um movimento tangencial inercial combinado com um movimento radial, este último direcionado a um centro atrator, eliminando-se a idéia de forças ou ímpetos centrífugos, foi a mola mestra da análise newtoniana posterior a 1679.

6. O tratado *De Motu*

Quando Newton retornou ao tema da dinâmica do movimento curvilíneo, prioritariamente inspirado pela questão dos movimentos celestes, o tratamento que lhe deu foi conceitualmente bem distinto de suas abordagens anteriores.

Em 1684, Halley visitou-o em Cambridge, trazendo-lhe a seguinte questão: qual a forma geométrica da trajetória de um planeta submetido a uma força inversamente proporcional ao quadrado da distância entre ele e o pólo atrator? Newton lhe respondeu imediatamente: uma elipse. A demonstração deste resultado Newton prometeu enviar a Halley muito em breve [10].

De fato, Newton enviou bem mais do que simplesmente a demonstração prometida; enviou um tratado completo a respeito da dinâmica do movimento curvilíneo, com especial ênfase na questão relacionada à trajetória de corpos celestes sob a ação da força proposta. Este tratado foi intitulado *De Motu* (*Do Movimento*) [2] e consiste, juntamente com uma série de aulas de mesmo título (depositadas na biblioteca da Universidade de Cambridge a título de cumprimento de uma exigência que a Instituição fazia a um docente como Newton), em um primeira versão do que seria posteriormente o conteúdo do primeiro dos três livros em que se divide sua obra máxima, os *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*.

Nesse tratado, divulgado por Halley na Royal Society [10], não se fala mais em forças centrífugas como antes. Agora, Newton trata o problema em concordância com a concepção sugerida por Hooke de movimentos tangenciais e radiais combinados. Ele mantém, todavia, um elemento decisivo, já anteriormente introduzido na análise do movimento circular, de 1669: a consideração de deslocamentos infinitesimais. Com efeito, ao analisar situações limites de deslocamentos de medida tendendo a zero Newton pôde dar às forças atuantes um caráter aproximadamente constante e, desta forma, aplicar a elas a regra estabelecida por Galileu para os movimentos governados pela gravidade nas proximidades da superfície terrestre: as distâncias percorridas são proporcionais à força (constante) atuante e ao quadrado do intervalo de tempo decorrido [2, 11]. Para quantificar esse intervalo de tempo decorrido em uma trajetória curvilínea não circular, Newton se valeu de um outro resultado, conhecido como a segunda Lei de Kepler dos movimentos planetários.

De fato, antes de proceder a essa análise dinâmica do movimento curvilíneo, decomponível em dois movimentos combinados, Newton efetuou a demonstração de que, no movimento de um objeto sob a ação de uma força sempre dirigida a um mesmo centro, o segmento de reta que une este centro à posição do objeto (chamemos de raio vetor) sempre descreverá áreas iguais em tempos iguais (Segunda Lei de Kepler). De forma mais didática, a área limitada pelos segmentos de reta mencionados correspondendo a duas posições determinadas e pela própria curva que representa a trajetória do objeto movente é proporcional ao intervalo de tempo decorrido para que o objeto se desloque de uma posição considerada à outra.

Para sua demonstração, Newton se baseou novamente na idéia da aproximação da trajetória curvilínea por uma linha poligonal e de uma força continuamente atuante por uma série de impulsos discretos imprimidos sobre o objeto movente a intervalos de tempo regulares. Tomando por base essa concepção, consideremos a Fig. 6. Nela consideremos que o objeto parta do ponto A e se desloque com velocidade constante até B, onde recebe um impulso relacionado à força **F**, de tal maneira que passa a se movimentar na direção BC, até que, novamente, em C, após intervalo de tempo igual ao correspondente ao deslocamento AB, receba um outro impulso e altere a direção do movimento para CD.

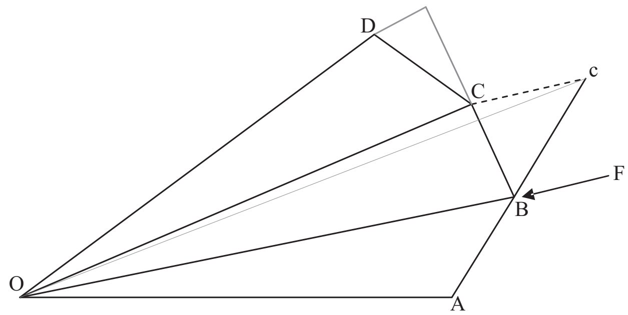

Figura 6 - Diagrama para a demonstração da Segunda Lei de Kepler.

Caso não tivesse recebido o impulso da força F em B, o objeto, ao final de um intervalo de tempo igual ao decorrido entre A e B, teria se deslocado, com a mesma velocidade original, em magnitude e direção, até o ponto c. Newton então considerou o deslocamento real, ocorrido entre B e C, como a composição de um deslocamento inercial virtual Bc e um outro deslocamento, cC, na direção da força F em B e a ela devido. Por conseguinte, temos imediatamente que o segmento cC é paralelo ao segmento OB.

Tracemos então um segmento ligando O a c, formando, portanto, o triângulo OcB. Podemos notar que a área de OcB será igual à área do triângulo OCB, já que o lado OB é comum aos dois e ambos possuem a mesma altura em relação a esse lado, tendo em vista que cC é paralelo a OB. Por outro lado, a área de OcB é igual à área do triângulo OAB, uma vez que os segmentos AB e BC são de mesma medida (percorridos em tempos iguais com velocidades iguais) e que a altura relativa a ambos é a mesma (é a medida do segmento perpendicular à reta ABc partindo de O e terminando na própria reta). Sendo assim, concluímos que as áreas dos triângulos OAB e OCB são iguais. O limite de intervalos de tempo infinitesimais que devemos tomar para que a linha poligonal coincida com a trajetória real não altera essa característica e podemos concluir finalmente que o segmento de reta que vai de O à trajetória descreve, de fato, áreas iguais em intervalos de tempo iguais.

Estabelecido este resultado, o intervalo de tempo associado a um determinado deslocamento poderia ser expresso através da área descrita pelo raio vetor.

Newton pôde então desenvolver um método sistemático para responder à seguinte questão: qual o tipo de dependência de uma força central em relação à distância ao centro-de-forças para que a trajetória do movimento governado por essa força possua determinada forma geométrica? Em seu tratado *De Motu*, aplicou seu método para a solução de alguns problemas dessa espécie: qual a dependência da força central em relação ao centro de força para que a trajetória seja 1) uma circunferência com um de seus pontos como centro de força; 2) uma elipse, com o centro de força posicionado em seu centro; 3) uma elipse, com o centro de força em um dos focos. Evidentemente, o terceiro dentre os problemas listados apresenta um especial interesse em virtude da questão da forma elíptica das trajetórias dos planetas em torno do Sol, enunciada por Kepler.

Para solucionar este problema, Newton retornou à abordagem de deslocamentos infinitesimais efetuados sob a ação de uma força central continuamente atuante, que, embora de forma geral variável, poderia ser aproximada como constante durante o pequeno intervalo de tempo considerado, conforme já havia empregado na discussão do movimento circular em seu pequeno escrito de mesmo título, de 1669. Novamente, Newton considerou o movimento curvilíneo como a combinação de um deslocamento inercial tangencial com um deslocamento radial sujeito à lei estabelecida por Galileu para os movimentos sob a ação da gravidade.

Especificamente no caso da trajetória elíptica com o centro atrator posicionado em um dos focos (Fig. 7) a análise se faz através dos seguintes passos:

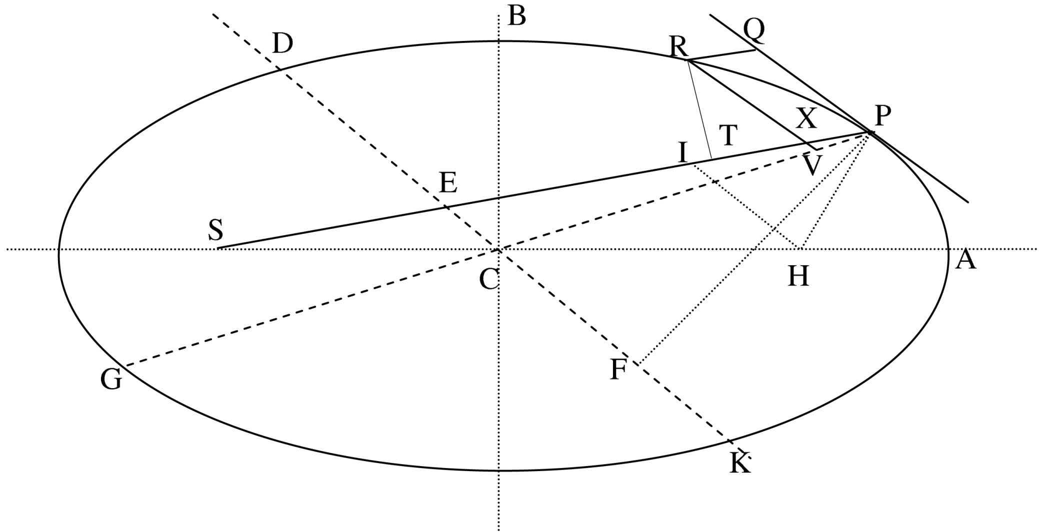

Figura 7 - Movimento em uma trajetória elíptica

Considera-se, primeiramente, um ponto P qualquer da elipse e traça-se uma tangente a ela passando por esse ponto; essa tangente representaria a direção em que o objeto se moveria, inercialmente, caso não sofresse a atuação de uma força dirigida ao centro atrator. Seja, então, um deslocamento real ao longo da elipse, levando ao ponto R assinalado. Se, durante esse mesmo intervalo de tempo o objeto houvesse se movimentado inercialmente, então teria atingido o ponto Q, também assinalado. Portanto, o deslocamento PR pode ser compreendido, sob o ponto de vista empregado agora por Newton, como uma combinação de um deslocamento PQ inercial com um deslocamento QR, decorrente da atuação da força central em questão.

Segundo o método newtoniano, considera-se um deslocamento ocorrido em um intervalo de tempo muito pequeno, durante o qual podemos tomar a força como aproximadamente constante (inclusive em direção) e, no caso, dirigida de P para o foco S, onde se situa o centro atrator. Por conseguinte, o deslocamento virtual QR, decorrente de sua atuação, também está na direção PS da força. Deste modo, temos que $QR//PS$.

Mais uma vez, tendo em vista a aproximação de força constante, Newton aplicou a "regra de Galileu", isto é, de que a magnitude da força central atuante ao longo desse pequeno deslocamento considerado é proporcional à distância virtual QR e inversamente proporcional ao quadrado do intervalo de tempo correspondente:

$$F \sim \frac{QR}{(\Delta t)^2}. \tag{18}$$

Já o intervalo de tempo Δt, de acordo com a Segunda Lei de Kepler, é proporcional à área da figura SPR. No limite de deslocamentos muito pequenos, essa figura pode ser aproximada como um triângulo de vértices SPQ, cuja área é dada por $SP \cdot RT/2$, onde T é a base da perpendicular a SP, traçada a partir de Q.

Deste modo, temos

$$F \quad \sim \quad \frac{QR}{(SP \cdot RT)^2}. \tag{19}$$

A partir daí, por considerações geométricas, Newton avaliou a relação entre as grandezas envolvidas na Eq. (19) e demonstrou[3] que a quantidade QR/RT^2 é igual ao inverso de um parâmetro característico da elipse, denominado *Latus rectum* (L), que corresponde, na realidade, à razão entre duas vezes o quadrado do semieixo menor e o semieixo maior

$$\frac{QR}{RT^2} = \frac{AC}{2\,BC^2}\,. \tag{20}$$

Desta forma, para uma dada elipse, podemos escrever simplesmente

$$F \sim \frac{1}{SP^2}, \tag{21}$$

ou seja, a força é inversamente proporcional ao quadrado da distância ao foco, onde se localiza o centro atrator.

7. A etapa final: os *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*

O livro *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*, publicado em 1687, constitui o coroamento do desenvolvimento newtoniano da Mecânica. Nessa obra, Newton consolida e aprofunda a elaboração conceitual e técnica desenvolvidas em seus trabalhos da década de 80.

Newton inicia sua obra com a exposição dos conceitos fundamentais relacionados ao movimento, que foram sendo delineados e amadurecidos ao longo de mais de duas décadas de reflexão sobre o tema. Apresenta as definições básicas da mecânica, entre as quais as de "quantidade de matéria" (que chamamos de massa), "quantidade de movimento" (momento linear) e as das três categorias de força que ele identifica: "força inata", "força impressa" e "força centrípeta". O primeiro termo, na verdade, expressa corretamente o conceito de inércia, somente carregando ainda uma terminologia de força, talvez inconvenientemente ambígua, herança provavelmente da associação antiga entre tendência e força; a segunda categoria representa aquilo que nós hoje propriamente chamamos forças (ações externas sobre o objeto, alterando-lhe seu estado), distinguidas por Newton (na nossa terminologia) em forças de contato e forças exercidas sem contato, porém dirigidas sempre a um ponto fixo, que ele nomeia como "centrípetas".

Em seguida, Newton passa a apresentar as leis fundamentais do movimento e alguns corolários, para, então, já no livro I, aplicar esses fundamentos a alguns problemas específicos de atuação de forças dirigidas a um centro, relacionados tanto à determinação da natureza dessas forças, uma vez conhecidas as características geométricas das trajetórias, quanto à situação inversa, de determinação das trajetórias possíveis, dadas as diferentes forças centrais atuantes.

Na primeira categoria, além dos exemplos já tratados no tratado *De Motu*, Newton acrescentou alguns outros, como o da obtenção da força central responsável por uma trajetória em espiral cujo centro coincida com o centro de força. Mais ainda, além do caso das trajetórias elípticas, já analisado no tratado mencionado, Newton também demonstrou a dependência com o inverso do quadrado da distância ao centro de força no caso de uma força central responsável por trajetórias parabólicas e hiperbólicas, cujos focos coincidam com esse centro. Finalmente, acrescentemos que, nos *Principia*, Newton solucionou definitivamente o problema inverso ao anterior, qual seja, dada uma força central inversamente proporcional ao quadrado da distância ao centro de força, demonstrou que a trajetória resultante é uma figura cônica: elipse, hipérbole ou parábola.

Concluída a obra dos *Principia*, os estudos posteriores de Newton se dedicaram aos trabalhos de revisão e ampliação do texto, com vistas às duas edições subsequentes, publicadas em 1717 e 1726. Nestes acréscimos ressaltam sobretudo revisões nas aplicações do sistema newtoniano às questões de mecânica celeste e a apresentação de um terceiro método de solução de problemas dinâmicos, alternativo ao chamado "método parabólico", descrito na seção anterior, e fundamentado em uma aproximação, de validade apenas local, das trajetórias curvilíneas por trajetórias circulares [11], de mais fácil tratamento técnico.

O sistema newtoniano, finalmente expresso nos *Principia*, venceu então as objeções, muitas vezes de caráter filosófico, que contra ele foram levantadas. Construiu-se um arcabouço teórico capaz de fornecer

[3]Ver Apêndice.

uma descrição detalhada dos processos físicos associados ao movimento e à organização do Universo. Podemos dizer que, com ele, atingiu-se um ápice no processo de desenvolvimento da ciência moderna, desencadeado pela Revolução copernicana.

8. Conclusão

Estabelecido o caráter retilíneo do movimento inercial, tal como enunciado por René Descartes, a análise do movimento circular, em primeiro lugar, e curvilíneo, de forma geral, impôs-se como um imperativo científico. O próprio Descartes se debruçou sobre a questão e abordou-a em termos de uma tendência centrífuga por parte do objeto movente. Contudo, o tratamento cartesiano limitou-se aos aspectos qualitativos da análise e a quantificação dessa tendência centrífuga, já então denominada de "força centrífuga", coube a Christiaan Huygens.

No entanto, tanto no tratamento cartesiano, quanto no de Huygens, esse "esforço", ou "força centrífuga", foi associado a uma tendência interna do objeto móvel. Mesmo Isaac Newton, nas etapas iniciais de seu pensamento, adotou essa concepção de uma ação interna centrífuga, a ser neutralizada por outras ações, externas, voltadas para o centro e a ela contrapostas. Percebe-se, portanto, ao longo do processo histórico de construção da ciência, o surgimento de um elemento cuja persistência, em nossa opinião, baseada amplamente em nossa experiência docente, constitui o verdadeiro obstáculo cognitivo ao entendimento do problema: a identificação de tendência como força, ou seja, a incompletude do processo de cristalização do conceito de força como uma ação causal de origem essencialmente externa ao objeto.

Na realidade, o processo de exteriorização das causas do movimento, que podemos caracterizar como um dos aspectos mais essenciais, se não o principal, da formação do pensamento físico moderno, proscreveu dessa ciência os conceitos aristotélicos de causa formal e final, através dos quais a natureza dos objetos desempenhava seu papel na determinação dos processos físicos, e delegou essa determinação apenas à ação externa de causas eficientes. Todavia, esse não foi um processo imediato; pelo contrário, transcorreu ao longo de praticamente todo o Século XVII e somente chegou a termo com a maturidade do pensamento de Isaac Newton, do qual a obra *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural* é a expressão máxima.

Vimos esse processo se desenrolar perante a humanidade no estudo newtoniano do movimento curvilíneo, observando como somente na década de 1680, após o debate epistolar que manteve com Robert Hooke, a dinâmica de Newton chegou a sua forma final. Em um debate ainda hoje inconclusivo, alguns autores defendem que Hooke desempenhou nessa evolução um papel decisivo, fornecendo a Newton uma nova visão da dinâmica das trajetórias planetárias e fazendo com que ele se desvencilhasse da realidade de qualquer ação centrífuga e da concepção dos movimentos curvilíneos como um equilíbrio entre tendências internas e ações externas de caráter centrípeto.

Por último, salientemos que o entendimento do conceito de inércia por Newton e seus predecessores não foi suficiente para o desenvolvimento pleno da dinâmica, finalmente sintetizada nas leis fundamentais do movimento, enunciadas nos *Principia*, quase vinte anos após os primeiros estudos newtonianos sobre a mecânica, efetuados sob a influência do cartesianismo.

Apêndice

Apresentaremos aqui a demonstração da dependência no inverso do quadrado da distância ao foco no movimento central elíptico, realizada por Newton.

Para tanto consideremos novamente a Fig. (7).

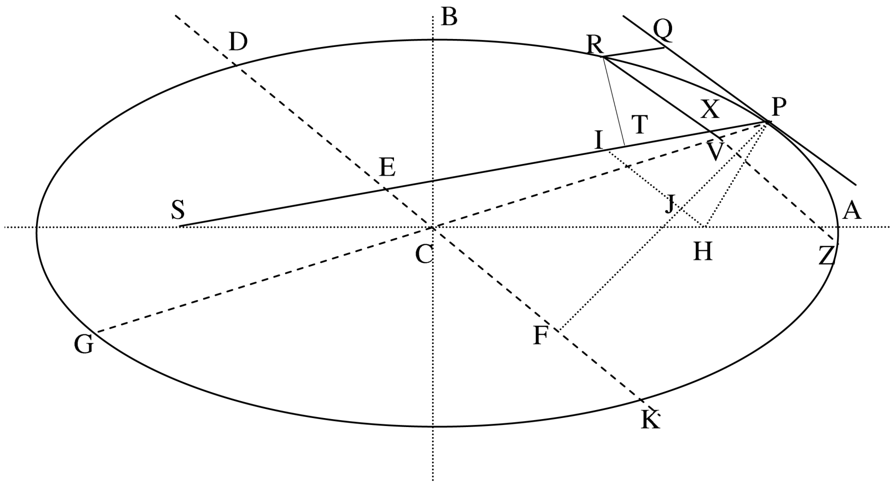

Figura 8 - Movimento em uma trajetória elíptica

Tracemos, em primeiro lugar, um diâmetro da elipse, DK, paralelo à direção da tangente à curva no ponto P e, a partir de P, uma perpendicular PF a esse diâmetro, além de um segmento RV, paralelo a PQ, de R até o eixo PG.

Primeiramente, observemos que os triângulos PXV e PEC, obtidos dessa construção, são semelhantes. Deste modo, temos

$$\frac{PX}{PE} = \frac{PV}{PC}, \tag{22}$$

o que, dado que PX = RQ, nos fornece

$$RQ = PE\,\frac{PV}{PC}\,. \tag{23}$$

Em seguida, Newton demonstrou que o segmento PE é igual ao semieixo maior da elipse, AC.

Para tanto, consideremos o outro foco, H, da elipse e um segmento traçado a partir de H, paralelamente à tangente PQ, até o ponto I, em que ele intercepta a linha PS. Como o centro está igualmente distante dos dois focos, temos CH = CS e, dado que os triângulos HIS e CES são semelhantes, temos também IE = ES. Além disso, PS = PE+ES = PI+IS. Como IS = 2ES, obtemos que

$$PE = \frac{PS + PI}{2}. \tag{24}$$

Nesse ponto, Newton utilizou uma propriedade das elipses encontrada no livro sobre cônicas do matemático grego Apolonius, qual seja, a de que os ângulos entre a tangente à curva em um ponto qualquer, no caso P, e as linhas focais, no caso, PS e PH, são iguais. Assim, também serão iguais os ângulos entre essas linhas e o segmento PF, perpendicular a essa tangente. Considerando-se então os triângulos PHJ e PIJ, onde J é a interseção de PF com IH, vemos que, se o ângulo no vértice P é igual nos dois triângulos e um dos lados adjacentes a esse vértice, PJ, é comum às duas figuras, então PH = PI.

Por outro lado, pela propriedade clássica das elipses, a soma das distâncias de qualquer ponto aos focos é igual ao eixo maior. Então temos

$$\begin{aligned} 2CA &= PH + PS \\ &= PI + PS \\ &= 2\,PE, \end{aligned} \tag{25}$$

onde usamos a Eq. (24). Desta forma, temos PE = AC. Substituindo então esse resultado na Eq. (23), obtemos

$$RQ = AC\,\frac{PV}{PC}\,, \tag{26}$$

Em seguida, consideremos uma outra propriedade das elipses, também extraída por Newton do livro de Apolonius: toda corda paralela a um dado diâmetro é dividida ao meio pelo diâmetro conjugado ao primeiro. Além disso, o produto dos segmentos resultantes da bissecção da corda é igual ao produto das porções em que o diâmetro conjugado é dividido por essa corda.

Na figura, essa propriedade se aplica à corda RVZ e ao diâmetro GP que a intercepta. A partir dela, podemos escrever RV = VZ e também RV·VZ = PV· VG, ou seja, temos

$$RV^2 = PV \cdot VG\,. \tag{27}$$

Da mesma forma, a referida propriedade se aplica ao diâmetro DK, visto como uma corda, e novamente ao diâmetro PG, que o intercepta em duas partes iguais. Temos, pois PC· CG = DC· CK. Como PC = CG e DC = CK, então PC = DC.

Desse último resultado e da Eq. (27) podemos escrever

$$\frac{VG \cdot PV}{RV^2} = \frac{PC^2}{DC^2}\,. \tag{28}$$

Consideremos agora a semelhança dos triângulos PEF e RXT. A partir dela podemos escrever

$$\frac{RX}{RT} = \frac{PE}{PF} = \frac{AC}{PF}\,, \tag{29}$$

já que PE = AC.

Em seguida Newton utilizou uma outra propriedade das elipses: a área de todo paralelogramo em que uma dada elipse esteja inscrita é a mesma. Assim sendo, observando a Fig. 9, temos

$$2AC \cdot 2BC = 2CD \cdot 2PF. \tag{30}$$

Substituindo esse resultado na Eq. (29), obtemos

$$\frac{RX}{RT} = \frac{CD}{BC}\,. \tag{31}$$

Combinando então as Eqs. (23), (28) e (31), obtemos

$$\frac{QR}{RT^2} = \frac{AC \cdot PC \cdot RV^2}{VG \cdot BC^2 \cdot RX^2} \tag{32}$$

$$= \frac{2\,PC \cdot RV^2}{L \cdot VG \cdot RX^2}, \tag{33}$$

onde utilizamos a definição de *Latus Rectum*, L, da elipse

$$L = \frac{2\,BC^2}{AC}\,. \tag{34}$$

A partir desse ponto, Newton passa a considerar o limite de deslocamentos infinitesimais, ou seja, em que $Q \to P$. Nessa condição $RV \to RX$ e $VG \to PG = 2\,PC$. Deste modo, a partir da Eq. (33) temos

$$\frac{QR}{RT^2} \to \frac{1}{L}. \tag{35}$$

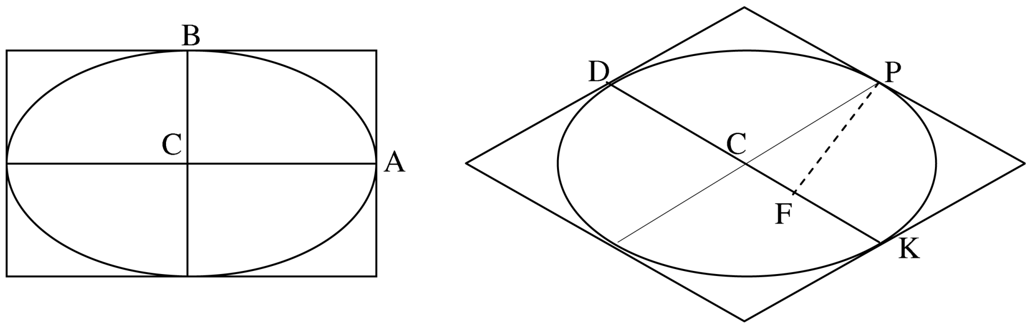

Figura 9 - Elipse inscrita em dois retângulos de áreas iguais

que corresponde à Eq. (20), portanto, concluindo a demonstração.

Agradecimentos

Agradeço ao Professor Jorge Carvalho de Mello, colega da UFRRJ, pelas várias discussões sobre o tema.

Referências

[1] A. Koyré, *Estudos Galilaicos* (Publicações Dom Quixote, Lisboa, 1992).

[2] J. Herivel, *Background to Newton's Principia* (Oxford University Press, London, 1965).

[3] R. Descartes, *Princípios de Filosofia* (Rideel, São Paulo, 2007), p. 77.

[4] R. Descartes, *Princípios de Filosofia* (Rideel, São Paulo, 2007), p. 78.

[5] R. Descartes, *Princípios de Filosofia* (Rideel, São Paulo, 2007), p. 79.

[6] R. Descartes, *Princípios de Filosofia* (Rideel, São Paulo, 2007), p. 118.

[7] C. Huygens, *Horologium Oscillatorium*, in *Oeuvres Complètes de Christiaan Huygens*(Société Hollandaise des Sciences, 22 vols., 1885-1950), v. XVIII.

[8] P.M.C. Dias, Revista Brasileira de Ensino de Física **28**, 205 (2006).

[9] P.M.C. Dias, Revista Brasileira de Ensino de Física **35**, 1602 (2013).

[10] R. Westfall, *Never at Rest* (Cambridge University Press, New York, 1980).

[11] J.B. Brackenridge, *The Key to Newton's Dynamics* (University of California Press, Berkeley, 2005).

[12] J.B. Brackenridge and M. Nauenberg, *Curvature in Newton's Dynamics*, in *The Cambridge Companion to Newton*, editado por I.B. Cohen e G.E. Smith (Cambridge University Press, Cambridge, 2002).

[13] I. Newton, *The Waste Book*, in: J. Herivel (ed) *The Background to Newton's Principia* (Oxford University Press, London, 1965), p. 147. 2002).

[14] I. Newton, *Manuscrito VI*, in J. Herivel (ed), *The Background to Newton's Principia* (Oxford University Press, London, 1965), p. 231.

[15] A. Koyré, Isis **43**, 312 (1952).

[16] M. Nauenberg, American Journal of Physics **62**, 331 (1994).

[17] M. Nauenberg, American Journal of Physics **62**, 335 (1994).

[18] R. Hooke, *An Attempt to prove the motion of the Earth by Observations*, apud M. Nauenberg, American Journal of Physics **62**, 331 (1994).

[19] M. Nauenberg, Physics in Perspective **7**, 3 (2005).

[20] I.B. Cohen, *The Newtonian Revolution* (Cambridge University Press, New York, 1980)