

Estudo das oscilações amortecidas de um pêndulo físico com o auxílio do “Tracker”

(*Study of damped oscillations of a physical pendulum with aid of “Tracker”*)

Waldemar Bonventi Jr.¹, Norberto Aranha

Programa de Pós-Graduação em Processos Tecnológicos e Ambientais, Universidade de Sorocaba, Sorocaba, SP, Brasil

Recebido em 3/11/2014; Aceito em 4/2/2015; Publicado em 30/6/2015

A tecnologia tem permitido a obtenção de dados experimentais de forma mais rápida e fácil através da utilização de dispositivos eletrônicos que fazem parte do nosso dia a dia, tornando os experimentos físicos mais dinâmicos e até mais precisos se comparados com métodos tradicionais de medidas. Neste trabalho são apresentados os resultados e análise das medidas do momento de inércia de uma ripa. O experimento foi filmado com um *smartphone* e os dados analisados pelo *software* livre “Tracker”. A função que descreve a oscilação amortecida teve seus parâmetros ajustados pelo próprio “Tracker” e pelo *software* *Qtiplot*. Comparando-se os cálculos realizados a partir dos parâmetros medidos com os resultados obtidos dos programas, conclui-se que o “Tracker” é uma plataforma de estudo de movimentos com muitos recursos que permite um ajuste de funções mais preciso na análise dos dados.

Palavras-chave: oscilações amortecidas, “Tracker”, análise de erros, momento de inércia.

Technology has allowed obtaining experimental data faster and easier through the use of electronic devices that are part of our everyday life, which makes physical experiments more dynamical and even more accurate as compared to traditional measurement methods. This paper presents the results and the analysis of measurements of the moment of inertia of clapboard. The experiment was filmed with a smartphone and the data was analyzed by the free software Tracker. The function that describes the damped oscillation had its own parameters set by the Tracker and the Qtiplot softwares, in order to compare both of them. Comparing the calculations based on the measured parameters with the results from the programs, it is concluded that the Tracker is a platform of study with many features which allows more precise adjustment functions for the data analysis.

Keywords: damped oscillations, Tracker, error analysis, moment of inertia.

1. Introdução

Alguns métodos para a determinação do momento de inércia de um corpo, que expressa o grau de dificuldade para alterar o movimento do corpo em rotação, têm sido discutidos na literatura. Alguns autores têm apresentado montagens experimentais distintas para medir o momento de inércia de diferentes corpos rígidos [1-3]. Essas montagens envolvem basicamente a obtenção dos parâmetros experimentais através de dispositivos eletrônicos, utilizando sensores mecânicos ou ópticos. O avanço da tecnologia tem permitido, no entanto, a obtenção de dados experimentais de forma mais rápida e fácil, utilizando os mais diversos dispositivos eletrônicos disponíveis atualmente no mercado, tais como *smartphones* e *tablets* [4, 5]. Agregado a este fato, temos também hoje disponíveis na internet vários programas de captura de imagens e tratamento de dados

como, por exemplo, o “Tracker” [6-8], e o *Qtiplot* usado na análise de dados experimentais [9, 10]. O “Tracker” permite o ajuste de várias funções aos dados experimentais podendo também, caso seja necessário, ser construído o próprio modelo matemático. O programa *Qti-Plot* é outra solução multiplataforma para visualização e análise de dados experimentais. Este programa oferece uma solução alternativa a softwares proprietários extremamente caros. Apresenta várias opções de ajustes de curvas a dados experimentais, incluindo dados espectrais múltiplos e FFT. O ajuste é minimizado pelo algoritmo de Levenberg-Marquadt a partir de uma dada tolerância.

Essas facilidades em obter os dados experimentais e tratá-los matematicamente viabilizam a discussão de conceitos físicos através da realização de experimentos junto aos alunos, principalmente nas escolas públicas

¹E-mail: waldemar.bonventi@prof.uniso.br.

carentes de laboratórios de física.

A utilização de dispositivos eletrônicos que fazem parte do dia a dia do aluno torna os experimentos de física mais dinâmicos em comparação com as técnicas tradicionais utilizadas no laboratório como, por exemplo, a tomada de dados utilizando o cronômetro e a régua.

Neste trabalho foi realizada a filmagem do movimento oscilatório de uma ripa com o auxílio de um *smartphone* e os dados tratados com o auxílio dos programas “Tracker” e *Qtiplot*. O momento de inércia da ripa obtido estaticamente (a partir das medidas de suas dimensões geométricas) foi comparado com seu valor obtido de forma dinâmica, através da medida da frequência de oscilação fornecida pelo “Tracker”.

1.1. Oscilação do pêndulo físico (método dinâmico)

Corpos rígidos suspensos de modo a oscilar livremente em um plano vertical, em torno de um eixo passando pelo corpo, são denominados *pêndulos físicos*. Esta configuração representa os pêndulos reais, que apresentam sua massa distribuída por várias distâncias relativamente ao eixo de suspensão, generalizando o conceito de *pêndulo simples*. Neste, considera-se toda a sua massa concentrada em um único ponto, a uma distância constante do ponto de suspensão.

A Fig. 1 ilustra um pêndulo físico genérico, onde o eixo de suspensão passa pelo ponto p . A oscilação resultante decorre da contribuição da força peso de cada elemento de massa do corpo, ou seja, cada pedaço do corpo com sua respectiva quantidade de massa estará sujeito à força gravitacional. No caso de corpos extensos com massa total m , os efeitos de rotação e translação são devidos à força peso mg aplicada ao centro de massa deste [11]. Este conceito vem das ideias de Arquimedes [12]:

...Chamamos de centro de gravidade de um corpo ao ponto de aplicação da força gravitacional. Ou seja, é o ponto neste corpo onde atua toda a gravidade, o ponto onde se localiza o peso do corpo. Ele também pode ser chamado de centro do peso deste corpo...

Durante a oscilação, o corpo gira em torno do ponto p (denominado pivô) com uma inércia rotacional I_p . Na Fig. 1 são representados o ponto p (pivô), a distância ℓ do pivô ao centro de massa (CM) do corpo, a amplitude A do movimento oscilatório na direção x e o ângulo θ entre o vetor força peso (mg) e a direção ao longo da distância ℓ . Quando esta direção não estiver alinhada com a vertical, aparecerá um *torque restaurador* τ , proporcional ao deslocamento angular θ dado por [13]

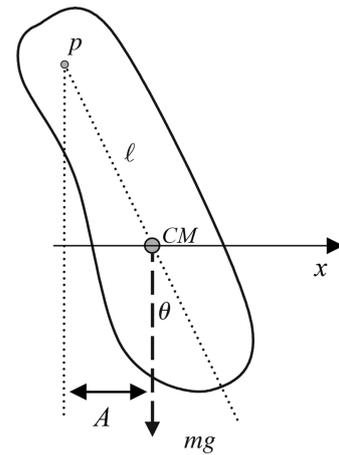


Figura 1 - Representação do pêndulo físico. Extraído da Ref. [14].

$$\tau = -mgl\text{sen}\theta, \quad (1)$$

onde o sinal negativo exprime esta característica de restauração - torque oposto ao deslocamento angular - levando o corpo a uma condição de equilíbrio estável.

Por outro lado, a dinâmica dos corpos rígidos relaciona este torque (ou *momento da força*) à aceleração angular α do corpo durante sua rotação, de forma análoga à segunda lei de Newton

$$\tau = I_p\alpha, \quad (2)$$

onde I_p representa o momento de inércia do corpo em relação ao ponto p (Fig. 1) e α sua aceleração angular.

Da cinemática rotacional tem-se que a aceleração angular α é dada pela segunda derivada temporal do deslocamento angular θ , ou seja

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}, \quad (3)$$

de modo que o movimento oscilatório deste sistema é descrito pela seguinte equação dinâmica

$$I_p\alpha = -mgl\text{sen}\theta, \quad (4)$$

que, explicitando em termos de θ , produz juntamente com a Eq. (3) a equação diferencial de segunda ordem

$$I_p \frac{d^2\theta}{dt^2} + mgl.\text{sen}\theta = 0. \quad (5)$$

Para oscilações de pequena amplitude, a aproximação $\text{sen}\theta \sim \theta$ (para θ em radianos) simplifica a Eq. (5) para a forma

$$I_p \frac{d^2\theta}{dt^2} + mgl.\theta = 0, \quad (6)$$

permitindo uma solução mais simples na seguinte forma

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \phi), \quad (7)$$

onde θ_0 é o ângulo a partir da vertical onde se iniciam as oscilações e ϕ é uma constante de fase que é nula se o movimento teve seu início cronometrado ($t = 0$) na posição angular máxima θ_0 ou, se a cronometragem iniciou em outro valor θ , ϕ é calculada em $t = 0$ como $\theta = \theta_0 \cos \phi \Rightarrow \phi = \arccos(\theta/\theta_0)$.

A condição de igualdade da Eq. (6) para qualquer instante t exige que

$$\omega = \sqrt{\frac{mg\ell}{I_p}}, \quad (8)$$

onde $\omega = 2\pi f$ é a frequência angular do sistema oscilatório, sendo f a frequência de oscilação em Hz.

A amplitude A do sistema é dada pelo deslocamento horizontal (eixo x), usando o centro de massa como referência. Uma inspeção geométrica da Fig. 1 fornece

$$A = \ell \sin\theta_0. \quad (9)$$

Utilizando-se a aproximação para pequenas oscilações ($\sin\theta \sim \theta$), a relação (9) torna-se $A = \ell\theta_0$ e, para qualquer posição arbitrária na direção horizontal, $x = \ell\theta$. Sendo assim, pode-se multiplicar a Eq. (7) por ℓ resultando em

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi). \quad (10)$$

1.1.1. Solução exata da Eq. (5)

Para o caso de ângulos maiores, onde não é aplicável a aproximação $\sin\theta \sim \theta$, Beer e cols. [15] mostram como obter a solução exata da Eq. (5) para um pêndulo simples, na forma de uma *integral elíptica K*, definida de $\theta = 0$ a $\theta = \theta_{MAX}$ ($\theta_{MAX} = \theta_0$ neste artigo). Esta solução leva a um período de oscilação dado por $T = (2K/\pi) \cdot 2\pi\sqrt{\ell/g}$, onde o termo entre parênteses fornece a correção necessária para qualquer valor do ângulo inicial θ_0 . (A dedução desta *integral elíptica K* é um tanto longa, então optamos por não apresentá-la

aqui.) A fim de estimar esta correção, a Tabela 1 extraída de Beer e cols. [15] mostra o fator $2K/\pi$ para alguns valores de θ_0 .

Para o caso de pêndulo físico a quantidade $\sqrt{\ell/g}$ deve ser substituída por $\sqrt{I_p/mg\ell}$, deste modo o período fica

$$T = \left(\frac{2K}{\pi}\right) \cdot 2\pi\sqrt{\frac{I_p}{mg\ell}}. \quad (11)$$

Consequentemente, a frequência angular ($\omega = 2\pi/T$) para o caso anarmônico não amortecido é dada por

$$\omega = \frac{\pi}{2K} \sqrt{\frac{mg\ell}{I_p}}. \quad (12)$$

1.1.2. Oscilações amortecidas

Tais sistemas, mesmo com oscilações de pequena amplitude, estão sujeitos ao atrito de rotação do pivô e à resistência do ar. Isto inclui um torque τ_R contrário ao movimento que, em primeira aproximação, é diretamente proporcional à velocidade de rotação $d\theta/dt$ em torno do pivô

$$\tau_R = -b \, d\theta/dt. \quad (13)$$

Desta forma, a oscilação é denominada *amortecida*, sendo b a constante de amortecimento, em que a amplitude de oscilação diminui com o tempo. Introduzindo este termo adicional na Eq. (6), obtém-se

$$I_p \frac{d^2\theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} + mg\ell\theta = 0. \quad (14)$$

Dividindo a Eq. (14) por I_p tem-se

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{b}{I_p} \frac{d\theta}{dt} + \frac{mg\ell}{I_p} \theta = 0. \quad (15)$$

Tabela 1 - Fator de correção do período do pêndulo em função da amplitude angular θ_0 .

θ_0	0°	10°	20°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
$2K/\pi$	1,000	1,002	1,008	1,017	1,073	1,180	1,373	1,762	∞

Extraído da Ref. [15].

A solução da Eq. (15) é análoga ao caso massa-mola amortecido [16]. Considerando a amplitude A do movimento como sendo $\ell\theta_0$ e a posição na direção x como $\ell\theta$, a solução da Eq. (15) para pequenas oscilações resulta em

$$x(t) = A e^{-bt/2I_p} \cos(\omega t + \phi), \quad (16)$$

onde x representa a amplitude horizontal de algum ponto do corpo; A a amplitude inicial para x em $t = 0$; b

a constante de amortecimento; I_p o momento de inércia do corpo; ω a frequência angular de oscilação e t o instante de observação da posição do corpo na direção x .

É importante notar que a constante b refere-se a um *amortecimento rotacional*, de dimensões $[M][L]^2/[T]$ ($\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$ no Sistema Internacional de Unidades).

A manutenção da função cosseno na solução da Eq. (16) facilita a interpretação física, pois o movimento se inicia com amplitude máxima, assim, tem-se a fase

$\phi = 0$.

Como o objetivo deste experimento é comparar valores do momento de inércia I_p de acordo com os modelos estático (usando a geometria da ripa) e dinâmico (analisando sua oscilação), deve-se considerar o deslocamento da frequência natural (ω) devido ao amortecimento. Assim, iremos diferenciar a frequência de oscilação *não amortecida* $\omega_0 = 2\pi f_0$ da frequência $\omega = 2\pi f$ devido ao amortecimento, conforme a Eq. (17)

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2I_p}\right)^2}, \quad (17)$$

sendo ω_0 equivalente ao obtido na Eq. (8). Assim, o cálculo da frequência angular para o pêndulo físico torna-se

$$\omega = \sqrt{\frac{mg\ell}{I_p} - \left(\frac{b}{2I_p}\right)^2} \quad (18)$$

1.2. Cálculo do momento de inércia (método estático)

O momento de inércia de uma placa retangular relativo a um eixo perpendicular ao plano da mesma, que passa pelo seu centro de massa [11] é dado por

$$I_{CM} = m \frac{(h^2 + w^2)}{12}, \quad (19)$$

sendo m a massa da placa, h o seu comprimento e w a sua largura.

A placa utilizada no experimento é uma ripa de geometria semelhante a um paralelepípedo. Nesta categoria, a espessura (dimensão ao longo do eixo pivô) não contribui para o valor do momento de inércia I_p .

No caso em que o corpo oscila em relação a um eixo que passa por uma de suas extremidades, aplica-se o teorema dos eixos paralelos [11] para reavaliar o momento de inércia I_p relativo ao novo eixo de oscilação

$$I_p = I_{CM} + m\ell^2, \quad (20)$$

onde ℓ é a distância entre o eixo que passa pelo centro de massa (CM) e o novo eixo paralelo a este, posicionado na extremidade da placa. Assim, o momento de inércia recalculado para este novo eixo torna-se

$$I_p = m \left[\frac{(h^2 + w^2)}{12} + \ell^2 \right]. \quad (21)$$

Substituindo a Eq. (21) na Eq. (8) resulta na seguinte expressão para a frequência natural de oscilação sem amortecimento

$$\omega_0^2 = \frac{g\ell}{\frac{h^2 + w^2}{12} + \ell^2}. \quad (22)$$

A Eq. (22) mostra claramente que a frequência natural de oscilação harmônica do pêndulo físico independe da sua massa.

Para o caso amortecido, a frequência apresentada na Eq. (17) é reescrita como

$$\omega = \sqrt{\frac{g\ell}{\frac{(h^2 + w^2)}{12} + \ell^2} - \left(\frac{b}{2I_p}\right)^2}. \quad (23)$$

2. Materiais e métodos

Neste estudo foi utilizada como placa uma ripa de eucalipto de massa $m = (68,14 \pm 0,01)$ g, comprimento $h = (473,0 \pm 0,5)$ mm, largura $w = (41,0 \pm 0,5)$ mm e espessura $a = (10,0 \pm 0,5)$ mm. A massa da ripa foi aferida com balança semianalítica e suas dimensões medidas com uma régua.

Para a determinação da posição do centro de massa (CM) da ripa, foram efetuados três furos com 2 mm de diâmetro ao longo da sua extremidade. Os dois furos externos foram utilizados para a determinação do CM pelo método do prumo [12], conforme ilustra a Fig. 2. Neste método dependura-se a ripa por um dos furos externos, soltando-a do repouso. Depois que a ripa oscilou e atingiu o repouso, dependura-se no mesmo alfinete o fio de prumo junto a ripa e, novamente, coloca-se o conjunto para oscilar. Depois que o sistema “ripa + fio de prumo” atinge o equilíbrio, traça-se uma reta vertical que coincide com a direção indicada pelo fio de prumo. Faz-se o mesmo procedimento pendurando-se o sistema no furo da outra extremidade da ripa. O cruzamento das duas retas indica a posição do CM da ripa. A distância entre o furo central (eixo de oscilação) e o CM da ripa foi medida com uma régua, cujo valor foi de $\ell = (234,0 \pm 0,5)$ mm.



Figura 2 - Ripa com o fio de prumo utilizado para a determinação do CM .

Outro valor necessário para determinar o momento de inércia é o da aceleração gravitacional que, nos cálculos do dia-a-dia geralmente utiliza-se $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Segundo Lopes [17],

...É notória a dificuldade de alguns alunos, que ingressam no curso superior, em admitir que a aceleração da gravidade não seja uma grandeza física constante. Afinal, é natural que, após um longo período de tempo (pelo menos três anos) usando $9,8 \text{ m/s}^2$ (ou seu valor aproximado para 10 m/s^2) ficasse consolidado, na mente do aluno, essa grandeza física como sendo constante....

Este valor de $9,8 \text{ m/s}^2$ para g é uma aproximação, uma vez que supõe a Terra como sendo uma esfera perfeita e com densidade homogênea. Na realidade, para determinar o valor de g tem-se que levar em consideração a velocidade angular do planeta e o fato de mesmo ser um referencial não inercial. Segundo Maroja e cols. [18]:

...A fim de estimar o valor de g com maior precisão devemos nos reportar a mecânica clássica e levar em consideração que a Terra é um referencial não inercial (acelerado) devido ao movimento de rotação. Também temos de levar em conta fatores estáticos, sua forma geométrica de geóide (achatamento nos polos) bem como a altitude do local...

Devido à velocidade angular e ao achatamento do planeta, a aceleração da gravidade, a partir do nível do mar, aumenta seu valor ao percorrer-se um meridiano no sentido dos polos. Vários autores têm proposto diferentes expressões matemáticas para determinar o valor da aceleração da gravidade levando-se em conta a latitude e/ou a altitude local [18-21]. Neste trabalho usaremos a seguinte expressão, que considera tanto a latitude quanto a altitude, para determinar o valor de g na cidade de Sorocaba - SP [19].

$$g = 9,7803184[1 + 0,0053024\text{sen}^2L - 0,0000059\text{sen}^2(2L)] - 3,086 \cdot 10^{-6}H, \quad (24)$$

onde L é a latitude e H a altitude locais.

Maroja e cols. [18] comentam ainda que:

...A variação do g sobre a superfície da terra é aproximadamente 0,5%, devido à latitude, aproximadamente 0,003% a cada 100 m de altitude. A topografia local e as marés podem causar pequenos efeitos. A incerteza no valor de g obtido é geralmente menor que ± 5 partes em 10^5

A cidade de Sorocaba está situada a uma altitude de 601 m acima do nível do mar, numa latitude de $23^\circ 30' 06''$ [22]. Substituindo esses valores na relação (24), obtém-se a aceleração da gravidade na cidade de Sorocaba como sendo de $9,786679602 \text{ m/s}^2$. Para efeito de cálculo neste trabalho arredondaremos o valor de g para $9,79 \text{ m/s}^2$.

Para as medidas do momento de inércia colocou-se a ripa suspensa pelo furo central feito na sua extremidade (Fig. 2), fixada a um eixo metálico girando com atrito bem pequeno de forma a garantir um regime de oscilação subamortecido, em que ocorrem vários ciclos para melhorar a precisão do ajuste dos parâmetros da função (16), iniciando pela frequência.

O conjunto, apresentado na Fig. 3, teve suspensa por trás uma folha em branco que sustentava uma régua na sua extremidade inferior, para fins de calibração de escala.

O sistema foi posto a oscilar a partir de um ângulo de $4,8^\circ$, valor admissível para a aproximação $\text{sen}\theta \sim \theta$ realizada neste trabalho e que é discutido mais detalhadamente na seção 3.4. Para medir o ângulo inicial de inclinação θ_0 da ripa em relação à vertical foi utilizado o próprio transferidor do “Tracker”, indicado na Fig. 3.

Como um dos objetivos do experimento é utilizar configurações e equipamentos acessíveis, utilizou-se para a filmagem do movimento um *smartphone*, com câmera de resolução 5 MP, tomada a uma distância aproximada de 20 cm do conjunto. A duração da filmagem foi de aproximadamente 45 s, gerando 520 quadros com dados de tempo e posições nas direções x e y . A oscilação inicia no quadro n° 32 ($t = 2,56 \text{ s}$), quando a ripa foi liberada, e termina no quadro 552 ($t = 44,07 \text{ s}$).

2.1. Medidas com o “Tracker”

O “Tracker” é um software livre que trabalha com a linguagem Java para análise e modelagem de movimentos gravados em vídeo [6, 7, 8]. Ele tem sido proposto como alternativa para a coleta e análise de dados experimentais.

A tomada das posições do pêndulo durante sua oscilação foi realizada inicialmente através do posicionamento do eixo de referência e da escala (em lilás e azul, respectivamente na Fig. 3), calibrados com auxílio da imagem da régua. Em seguida, foram marcadas as posições de um ponto da ripa em cada *frame* do vídeo. Estas marcações consistem em “clicks” na imagem sobre o ponto escolhido que percorre sua trajetória durante a oscilação. Foram tomadas as posições na direção horizontal (x), usando como origem das coordenadas aquelas definidas pelos eixos de cor lilás da Fig. 3.

No caso da ripa, este ponto rastreado não precisa necessariamente estar em sua extremidade, pois todos os pontos da mesma seguirão trajetórias conforme a função (16).

3. Resultados e discussão

De posse dos dados experimentais efetuou-se a análise dos resultados fornecidos pelo “Tracker” e pelo programa *Qtiplot*.

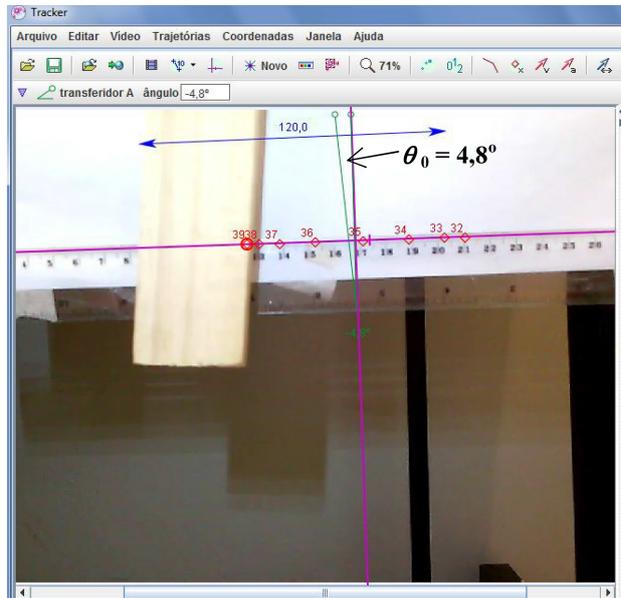


Figura 3 - Visualização da tela do “Tracker”.

3.1. Ajuste dos parâmetros

Para o ajuste da função (16) foi utilizado o próprio “Tracker” e feita uma busca de programas livres que também ajustassem esse tipo de função. Para esse processo utiliza-se a janela “Data Tool” do “Tracker”. Com a opção “autofit” habilitada, informa-se a margem de erro admissível para cada parâmetro (10, 1 ou 0,1%) para a otimização automática dos mesmos. Frequentemente é necessário informar os valores dos parâmetros iniciais para que o programa inicie o processo de ajuste de modo a possibilitar sua convergência. Entre os programas testados, o único que possibilitou um ajuste similar ao do “Tracker” foi o programa *Qtiplot* [9, 10]. No caso do ajuste utilizando o “Tracker”, basta “clique” diretamente no gráfico com o botão direito do mouse e, no menu flutuante, selecionar a opção “Analisar”. A função ajustada segue o modelo de oscilação harmônica amortecida mostrada na Eq. (16), porém, a constante de fase ϕ foi transformada em um deslocamento no tempo ($\phi = -\omega t_0$) e $\omega = 2\pi f$ escrito explicitamente para fins de ajuste experimental, segundo a função (25)

$$x(t) = A e^{-B(t-t_0)} \cos[2\pi \cdot f(t-t_0)] + C, \quad (25)$$

A incerteza no valor do momento de inércia I_p , obtido a partir da Eq. (21), é calculada pela expressão de propagação de erro dada pela relação (26) [23]

$$\delta I_p = \sqrt{\left(\frac{\partial I_p}{\partial h} \delta h\right)^2 + \left(\frac{\partial I_p}{\partial w} \delta w\right)^2 + \left(\frac{\partial I_p}{\partial m} \delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial I_p}{\partial \ell} \delta \ell\right)^2}. \quad (26)$$

em que t_0 assinala o início do movimento em relação a filmagem, o parâmetro C é a posição da linha de base dos pontos e $B = b/2I_p$ o parâmetro de amortecimento baseado na Eq. (16).

Inserindo a função de ajuste e valores iniciais para os parâmetros, a expressão fornecida pelo “Tracker” após a convergência dos valores foi

$$x(t) = 44,0 e^{-0,049t} \cos[2\pi \cdot 0,89(t-2,58)] - 1,49,$$

com desvio médio quadrático de 3,05 (Tabela 2).

O gráfico apresentado na Fig. 4 mostra os pontos experimentais e o ajuste da função (16), ambos obtidos pelo “Tracker”.

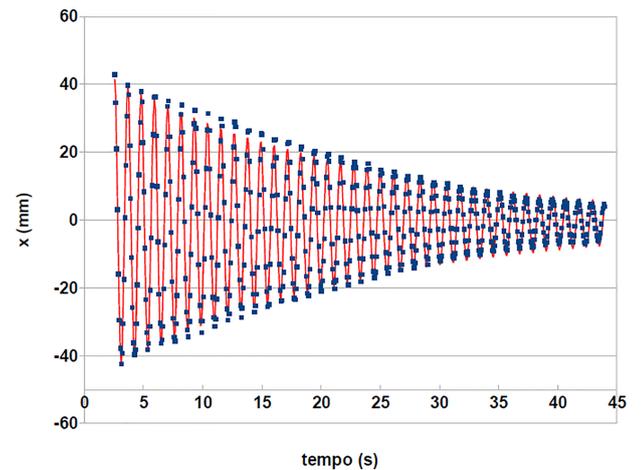


Figura 4 - Pontos experimentais (em azul) e curva da função $x(t)$ ajustada pelo “Tracker” (linha contínua em vermelho).

O mesmo ajuste realizado com o programa *Qtiplot*, resultou na seguinte expressão

$$x(t) = 42,44 e^{-0,045t} \cos[2\pi \cdot 0,89(t-2,56)] - 1,0,$$

com desvio médio quadrático de 4,78.

Devido ao menor desvio médio quadrático, adotou-se o ajuste realizado pelo “Tracker”. Os valores desses parâmetros estão sumarizados na Tabela 2.

3.2. Momentos de inércia

O momento de inércia calculado para o modelo estático a partir da relação (21) fornece o seguinte valor

$$I_p = 0,005011026 \text{ kg.m}^2.$$

Derivando a expressão (21) e substituindo na Eq. (26), obtemos um valor para a incerteza no cálculo do momento de inércia de $0,000016187 \text{ kg.m}^2$. Portanto, considerando as regras de arredondamento e de algarismos significativos [23] o valor calculado para I_p , a partir dos parâmetros medidos inicialmente (h , w e m), é expresso na seguinte forma

$$I_p = (0,00501 \pm 0,00002) \text{ kg.m}^2. \quad (27)$$

Para obter o I_p dinâmico utilizam-se os valores dos parâmetros fornecidos pelo “Tracker” (apresentados na Tabela 2) e a relação (17), reescrita abaixo substituindo $(b/2I_p)^2$ por B^2

$$\omega^2 = \omega_0^2 - B^2. \quad (28)$$

O ajuste realizado pelo “Tracker” fornece um valor para $B = 0,049 \text{ s}^{-1}$, o que resulta em $B^2 = 0,0024 \text{ s}^{-2}$, $f = 0,89 \text{ Hz}$ e $\omega^2 = (2\pi f)^2 = 31,2391 \text{ (rd/s)}^2$. Substituindo esses valores na Eq. (28) tem-se $\omega_0^2 = 31,2415 \text{ (rd/s)}^2$. O erro relativo entre os valores de ω^2 e ω_0^2 é $0,008\%$. Observando a relação (28), tem-se que o fato de B ser pequeno ($B \ll \omega_0$) implica em $\omega \approx \omega_0$. Este resultado é consistente com o decaimento visualizado na Fig. 4, visto que a amplitude do movimento oscilatório dada pelo termo Ae^{-Bt} da relação (16) deve diminuir gradualmente com o tempo.

O valor de I_p dinâmico é então calculado pela seguinte relação

$$I_p = \frac{mg\ell}{\omega_0^2} = \frac{0,06814 \times 9,79 \times 0,234}{31,2415}, \quad (29)$$

$$I_p = 0,0049965 \text{ kg.m}^2.$$

Tabela 2 - Valores dos parâmetros ajustados pelo “Tracker”.

Ângulo inicial	t_0 (s)	t (s)	A (mm)	B (s^{-1})	f (Hz)	C (mm)	Desvio médio quadrático
$4,8^\circ$	$2,58 \pm 1\%$	2,56 a 43,99	$44,00 \pm 1\%$	$0,049 \pm 1\%$	$0,89 \pm 1\%$	$-1,49 \pm 1\%$	3,05

3.3. Constante de amortecimento

Obtido o valor do momento de inércia dinâmico, torna-se possível calcular a constante de amortecimento rotacional deste movimento como

$$b = B2I_p = (0,049) \times 2 \times (0,00499),$$

$$b = 0,000489 \text{ kg.m}^2/\text{s}.$$

A incerteza desta constante é dada por

A incerteza do momento de inércia obtido da Eq. (29) é calculada utilizando propagação de erro [23] a partir das relações a seguir

$$\delta\omega_0^2 = 2 \cdot \omega_0 \cdot \delta\omega_0, \quad (30)$$

$$\delta I_p = \sqrt{\left(\frac{\partial I_p}{\partial m} \delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial I_p}{\partial \ell} \delta \ell\right)^2 + \left(\frac{\partial I_p}{\partial \omega_0^2} \delta \omega_0^2\right)^2}. \quad (31)$$

Substituindo os valores obtidos nas duas relações acima, resulta num erro total para o momento de inércia I_p de $\delta I_p = 0,0001375 \text{ kg.m}^2$. Portanto, o resultado final para o momento de inércia dinâmico levando-se em conta os ajustes realizados pelo “Tracker” fica na seguinte forma

$$I_p = (0,00499 \pm 0,00013) \text{ kg.m}^2. \quad (32)$$

Comparando os resultados da Eq. (27) e da Eq. (32) observa-se um erro relativo de $0,4\%$. Este erro é menor se comparado com os resultados da literatura. Pintão e cols. [2] utilizaram uma montagem com sensor óptico para o estudo do movimento de um disco rígido. Neste trabalho o momento de inércia foi obtido indiretamente através da corrente elétrica do sistema de detecção eletrônico, resultando num erro menor que 5% entre o momento de inércia teórico e o experimental. No trabalho de Bonagamba e cols. [24], que também utilizou um sistema de detecção óptico com sensor e receptor infravermelhos, no estudo de oscilação de corpos rígidos, obteve erros relativos que variaram de $1,4\%$ a $3,4\%$. Eadkhong e cols. [3] utilizou o “Tracker” no estudo do momento de inércia de um cilindro, obtendo erros na faixa de $0,4\%$ a $3,3\%$.

$$\delta b = \sqrt{\left(\frac{\partial b}{\partial B} \cdot \delta B\right)^2 + \left(\frac{\partial b}{\partial I_p} \cdot \delta I_p\right)^2},$$

resultando em $\delta b = 0,0000137 \text{ kg.m}^2/\text{s}$, de modo que

$$b = (0,000489 \pm 0,00001) \text{ kg.m}^2/\text{s}.$$

A constante de amortecimento é muito pequena, mas diferente de zero, o que faz com que as frequências

angulares harmônica não amortecida ($\omega_0 = 5,5819$ rd/s, Eq. (32)) e anarmônica amortecida ($\omega = 5,5817$ rd/s, Eq. (28)) sejam praticamente iguais. A amplitude da Eq. (16), que é o termo $Ae^{-bt/2I_p}$, diminui gradualmente com o tempo e corresponde a envoltória da curva da Fig. 4 como discutido no item 3.2.

3.4. Desvio do regime harmônico

O ângulo inicial de $4,8^\circ$ para este experimento é aproximadamente igual a $0,08$ radianos. Segundo a literatura [16] o ângulo θ mostrado na Fig. 1 pode ser considerado pequeno quando $\sin\theta \sim \theta$ (com θ em radianos), o que permitiu simplificar a Eq. (5) e utilizar as relações (6) e (7). No caso de $\theta = 0,08$ rd, tem-se $\sin\theta = 0,0799$, o que resulta num erro menor que $0,1\%$. Este argumento permitiu considerar este ângulo de $4,8^\circ$ como sendo bem pequeno de modo a empregar a função (16) na condição de oscilação harmônica amortecida. Esta é a justificativa que geralmente se encontra nos livros texto.

Uma argumentação mais completa para esse tipo de aproximação é a apresentada na seção 1.1 (Solução exata da Eq. (5)). De acordo com a Tabela 1, o termo de correção $2K/\pi$ pode ser estimado em $1,001$ por uma interpolação linear no intervalo de 0° a 10° (Fig. 5).

Utilizando os valores dos parâmetros estáticos tem-se o valor para a frequência angular harmônica não amortecida ω_0 - lembrando que ω_0 é equivalente ao obtido na Eq. (8) - dada por

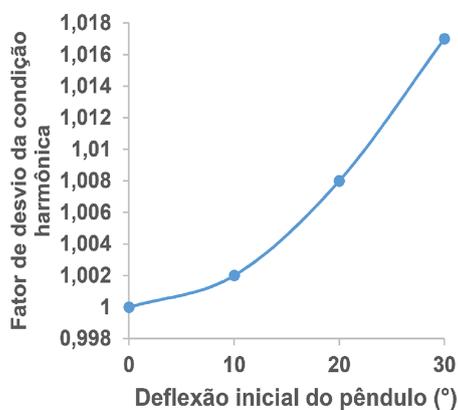


Figura 5 - Gráfico obtido com os dados da Tabela 1.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I_p}} = \sqrt{\frac{0,06814 \times 9,790,234}{0,00501}} = 5,5819 \text{ rd / s.} \quad (33)$$

Aplicando-se a correção para o caso anarmônico, discutido na seção 1.1 (solução exata da Eq. (5)), e a interpolação linear já discutida acima, tem-se a frequência angular anarmônica não amortecida dada pela Eq. (12)

$$\omega_0 = \frac{1}{1,001} \times 5,5819 = 5,5763 \text{ rd/s} \quad (34)$$

A diferença percentual entre os valores de ω_0 obtidos nas Eqs. (32) e (33) é de $0,1\%$, que é uma ordem de grandeza inferior ao desvio experimental de 1% na frequência angular. Portanto, considera-se que o sistema pode ser aproximado ao regime de oscilação harmônica amortecida.

4. Conclusões

O uso do programa “Tracker” facilitou a tomada e a análise dos dados experimentais, e seus resultados apresentaram grande concordância com os cálculos do momento de inércia obtido a partir das dimensões da ripa.

A disseminação de aparelhos portáteis tais como *tablets* e *smartphones*, com capacidade de filmagem, bem como a disponibilidade de computadores atualmente nas escolas e a gratuidade deste programa, permitem uma maior facilidade no aprendizado dos alunos no estudo de fenômenos físicos.

Os resultados mostraram que o ajuste realizado com o programa “Tracker” é mais preciso do que o obtido através do programa *Qtiplot*, para obtenção dos parâmetros do movimento oscilatório. Além disso, o “Tracker” é um ambiente em que integra o vídeo, a coleta de dados e os cálculos necessários para o problema em estudo, facilitando as análises dos parâmetros experimentais de movimentos.

Esta forma de análise experimental também permitiu a comparação com os modelos teóricos harmônico e anarmônico, além de estimar o fator de amortecimento com precisão de 1% , o que, didaticamente, permite a comparação de um sistema real diante de um modelo de movimento e a estimativa dos desvios ocorridos.

Agradecimentos

Os autores agradecem à FAPESP (processo n° 2014/21122-00) pelo apoio financeiro.

Referências

- [1] C.A.F. Pintão, M.P. Souza Filho e W.F. Usida, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **27**, 237 (2005).
- [2] C.A.F. Pintão, M.P. Souza Filho, C.R. Grandini and R. Hessel, *European Journal of Physics* **25**, 409 (2004).
- [3] T. Eadkhong, R. Rajsadorn, P. Jannual and S. Danworaphong, *European Journal of Physics* **33**, 615 (2012).
- [4] A. Kazachkov, A.S. Castellanos and V. Kostyukov, *Lat. Am. J. Phys. Educ.* **6**, Suppl. I, 168 (2012).
- [5] L.P. Vieira e V.O.M. Lara, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **35**, 3503 (2013).
- [6] A.G. Bezerra Jr., L.P. de Oliveira, J.A. Lenz e N. Saavedra, *Cad. Bras. Ens. Fís.* **29**, 469 (2012).

- [7] J.S. Figueira, Revista Brasileira de Ensino de Física, **33**, 4403 (2011).
- [8] D. Brown, *Tracker: Video Analysis and Modeling Tool*. Disponível em <https://www.cabrillo.edu/dbrown/tracker>, acesso em 20/10/2014.
- [9] 42 of the Best Free Linux Scientific Software. Linuxlinks, The Linux Portal. 2009. Disponível em <http://www.linuxlinks.com/article/20080803104017665/Scientific.html>, acesso em 20/10/2014.
- [10] K. Müller and A. Seubert, *Isotopes in Environmental and Health Studies* **50**, 88 (2014).
- [11] D. Halliday, R. Resnick e J. Walker, *Fundamentos de Física* (LTC, Rio de Janeiro, 2012), v. 1, 9^a ed.
- [12] A.K.T. Assis, *Arquimedes, o Centro de Gravidade e a Lei da Alavanca* (C. Roy Keys Inc., Montreal, 2008).
- [13] D.H. Young e R.A. Freedman, *Física I* (Pearson Education do Brasil, São Paulo, 2008), 12^a. ed.
- [14] G.L. Baker and J.A. Blackburn, *The Pendulum: A Case Study in Physics* (Oxford University Press, Oxford, 2005).
- [15] F.P. Beer, E.R. Johnston e P.J. Cornwell *Mecânica Vetorial Para Engenheiros: Dinâmica* (AMGH, Porto Alegre, 2012), v. 2.
- [16] D. Halliday, R. Resnick e J. Walker, *Fundamentos de Física* (LTC, Rio de Janeiro, 2012), v. 2, 9^a ed.
- [17] W. Lopes, Cad. Bras. Ens. Fís. **25**, 561 (2008).
- [18] A.M. Maroja, M.F.C. Viturino e J. de Sousa Pereira, *Proc. XVI Simpósio Nacional de Ensino de Física*. Disponível em <http://www.sbf1.sbfisica.org.br/eventos/snef/xvi/cd/resumos/T0297-1.pdf>. Acesso em 12/01/2015.
- [19] L.G. Mezzalira, G. Moscati e J.M. Saffar. In: *ENQUALAB-2006 - Congresso e Feira da Qualidade em Metrologia* (REMESP, São Paulo, 2006), p. 1.
- [20] *Levantamentos Gravimétricos*, Disponível em http://w3.ualg.pt/~jluis/files/folhas_cap1.pdf, acesso em 12/01/2015.
- [21] Disponível em http://www.sismetra.cta.br/Apresentacao_VI_Semetra/0s_Efeitos_da_Gravidade_na_Calibracao_de_Balancas.pdf, acesso em 12/01/2015.
- [22] Disponível em <http://www.geografos.com.br/cidades-s~ao-paulo/Sorocaba.php>, acesso em 20/10/2014.
- [23] J.R. Taylor, *Introdução à Análise de Erros*, (Bookman, Porto Alegre, 2012).
- [24] T.J. Bonagamba, E. Santoni, P.R.O. Lasso, C.B. Bretas, A. Gentil, Revista Brasileira de Ensino de Física **17**, 133 (1995).