

# Um problema didático: como determinar ângulos de paralaxe trigonométrica

A didactic problem: how to determine trigonometric parallax angles

Francisco Catelli\*<sup>1</sup>, Odilon Giovannini<sup>1</sup>, Paula Hoffmann<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade de Caxias do Sul, Caxias do Sul, RS, Brasil

<sup>2</sup>Escola Estadual de Ensino Médio Alexandre Zattera, Caxias do Sul, RS, Brasil

Recebido em 20 de Abril, 2017. Revisado em 19 de Junho, 2017. Aceito em 26 de Junho, 2017.

Nos textos de ensino e divulgação de astronomia que abordam a determinação de distâncias estelares, encontra-se que o ângulo de paralaxe é o menor ângulo do triângulo retângulo formado pelo raio da órbita da Terra e as semirretas que vão de suas extremidades até uma estrela próxima, da qual se quer medir a distância. O problema didático do qual trata esse texto é então o que segue: apesar da recorrente informação sobre a “mudança de posição” da estrela próxima em relação às estrelas de fundo, na medida em que a Terra se move em volta do Sol, não há nos textos de divulgação consultados, indicações claras de como esse ângulo é medido. Sugerem-se então duas abordagens para tratar desse problema: a primeira é uma atividade essencialmente geométrica, a ser desenvolvida pelos estudantes no ambiente de sala de aula. A segunda diz respeito a uma atividade de campo envolvendo fotografias, na qual a distância a objetos terrestres é determinada por paralaxe. Nas considerações finais, os autores argumentam que se trata de um problema didático, e que portanto deve ser tratado nesse âmbito. **Palavras-chave:** ensino de astronomia, paralaxe trigonométrica, distância às estrelas.

In the school texts of astronomy, we find that the angle of parallax is the smallest angle of the right-angled triangle formed by the Earth's orbit radius and the lines that go from its ends to a nearby star, from which one wants to measure distance. The didactic problem addressed by this text is as follows: despite the recurrent information about the "shifting" of the near star relative to the background stars, as the Earth moves around the Sun, there is no clear indication of how this angle is measured in the sources consulted. Two approaches are suggested to address this problem: the first is an essentially geometric activity, to be developed by the students in the classroom environment. The second concerns a field photographic activity, in which the distance to terrestrial objects is determined by parallax. In the final considerations, the authors argue that this is a didactic problem, and that it must therefore be dealt with in this context.

**Keywords:** astronomy teaching, trigonometric parallax, distance to stars.

## 1. Introdução

Não é exagero dizer que a compreensão das técnicas de medição de distâncias astronômicas atualmente em curso envolveriam o domínio de todo o conhecimento em astrofísica disponível. Com o único objetivo de situar o tema desse artigo – a paralaxe trigonométrica – nesse universo vasto e complexo das distâncias astronômicas, mencionaremos a seguir os principais processos de medição, com base no artigo de Gossan e Ott [1]. Segundo esses autores, as distâncias astronômicas são determinadas a partir de calibradores primários, secundários e terciários. Os calibradores primários empregam radar e laser, técnicas essas que permitem acesso a distâncias da ordem das do sistema solar. A paralaxe trigonométrica, objeto desse texto, alcança distâncias de 100 parsec (pc), por meio de medições com o satélite Hipparchos. Mais adiante, na seção 2, o pc, que equivale a 3,26 anos-luz, será definido

com maior detalhe. Já o satélite Gaia [2] permite atualmente a multiplicação por 400 dessa distância máxima de medição. Segundo os redatores do texto de divulgação da ESA (European Space Agency), mencionado acima, “Para todos os objetos de magnitude 15 ou mais brilhante, [...] Gaia pode medir suas posições com uma acurácia de 24 microssegundos de arco. Isso é comparável a medir o diâmetro de um fio de cabelo humano a uma distância de 1000 km.” Ainda dentro da categoria de calibradores primários, cabe mencionar a paralaxe estatística, que leva em conta o movimento do Sol no espaço, e permite medições de até 500 pc, mas apenas para algumas categorias de objetos celestes. Nesse artigo, trataremos de esclarecer vários aspectos ligados a esse calibrador primário de medição de distâncias estelares, a paralaxe trigonométrica.

Na categoria dos calibradores secundários, Gossan e Ott [1] nomeiam a paralaxe espectroscópica e uma de suas variantes (“ajuste na sequência principal”), que pro-

\*Endereço de correspondência: fcatelli@ucs.br.

piciam a determinação de distâncias de corpos celestes a partir de seus espectros, sua magnitude aparente e sua magnitude absoluta, essa última determinada a partir de um diagrama HR, o que leva a medições de distâncias estelares de até algumas dezenas de pc. Corpos celestes de brilho variável são empregados como “velas padrão”, e permitem medições cujo alcance chega a 1 Mpc, com estrelas variáveis RR Lirae, e 30 - 40 Mpc, com estrelas variáveis Cefeidas, que correspondem a distância de galáxias próximas da Via-Láctea (veja, por exemplo, o endereço [3] que fornece a distância de 1210 galáxias e os métodos utilizados para determinação da distância).

Completando esse vasto cenário, os calibradores terciários envolvem galáxias espirais e suas velocidades de rotação (“Relação de Tully-Fisher”), Galáxias elípticas (“Relações de Faber Jackson e  $Dn\sigma$ ”), métodos de fotosfera expandida, Supernovas do tipo I-a e sirenes padrão, essas últimas envolvendo a detecção de ondas gravitacionais. Ou seja, estamos aqui na fronteira do conhecimento humano em astrofísica.

Voltemos agora a atenção ao objeto desse artigo, a paralaxe trigonométrica, a partir de uma perspectiva didática. Textos didáticos no campo da astronomia dão conta que a distância de objetos celestes próximos da Terra, tais como corpos do sistema solar (planetas, satélites naturais, asteroides, cometas, etc.) e estrelas da vizinhança solar, pode ser medida por uma técnica, denominada paralaxe trigonométrica [4-9]. Uma forma prática para compreender essa técnica é estender um dos braços perpendicularmente ao corpo com o polegar para cima (fazendo o sinal de positivo), fechar (digamos) o olho direito e mirar o polegar contra uma marca distante (por exemplo, um tronco de árvore) com o olho esquerdo; em seguida, sem mover o braço, mira-se o polegar com o olho direito, enquanto o esquerdo agora está fechado. Realizando esse procedimento, observa-se que o polegar “desloca-se” em relação à marca distante (veja a Figura 1). Conhecendo a distância entre os olhos e o ângulo relacionado ao deslocamento do dedo, pode-se determinar a distância do polegar aos olhos por meio de relações trigonométricas. Assim, a paralaxe trigonométrica é uma técnica importante que possibilita o cálculo de distâncias inacessíveis e, nesse sentido, como sugerido no documento oficial “Orientações Curriculares para o Ensino Médio” ([10] p. 74), “[...] são interessantes aplicações da trigonometria, e esse é um assunto que merece ser priorizado na escola”.

Essa técnica, voltada à astronomia é, em termos resumidos, a que segue. Primeiro, consideramos dois pontos de observação distintos, no espaço; esses dois pontos são duas posições da Terra, a segunda seis meses após a primeira. Com isso, as visadas dessas duas posições estarão (sempre de uma perspectiva do espaço) separadas por uma distância de duas vezes a distância Terra – Sol, ou aproximadamente 300 milhões de km. Essas posições aparecem como “1” e “2” na Figura 2, e a magnitude do diâmetro da órbita da Terra em torno do Sol é denominada “ $D_{ot}$ ”.

Uma estrela próxima ( $e_p$ ) será vista alinhada com uma determinada estrela distante ( $ed_1$ , na Figura 2) quando a Terra estiver na posição 1. Quando a Terra passar à posição 2, a estrela próxima  $e_p$  parecerá estar alinhada com outra estrela distante,  $ed_2$ . Assim, como no caso exemplificado na Figura 1, a estrela próxima  $e_p$  “deslocou-se”, aparentemente, em relação às estrelas distantes  $ed_1$  e  $ed_2$  de um ângulo  $\theta$ .

O ângulo de paralaxe é o ângulo menor subtendido pelo triângulo cujo lado menor é uma unidade astronômica (UA), e o lado maior é a distância à estrela próxima, que se quer medir. Uma UA é equivalente à distância média da Terra ao Sol [4, 11]. Nesse momento, chamamos a atenção do leitor para um aspecto que pode gerar alguma confusão: o ângulo  $\theta$ , na Figura 2, equivale ao dobro do ângulo de paralaxe  $\beta$ .

A explicação (correta), dada em todos os textos consultados pelos autores, é a de que, se conhecermos  $D_{ot}$  e o ângulo  $\theta$ , pode-se determinar  $d$ , a distância da Terra à estrela próxima  $e_p$ , a partir da definição da tangente do ângulo  $\theta/2$ , da seguinte forma:

$$\tan \theta/2 = \frac{D_{ot}/2}{d},$$

e isolando  $d$ , obtemos

$$d = \frac{D_{ot}/2}{\tan \theta/2} \quad (1)$$

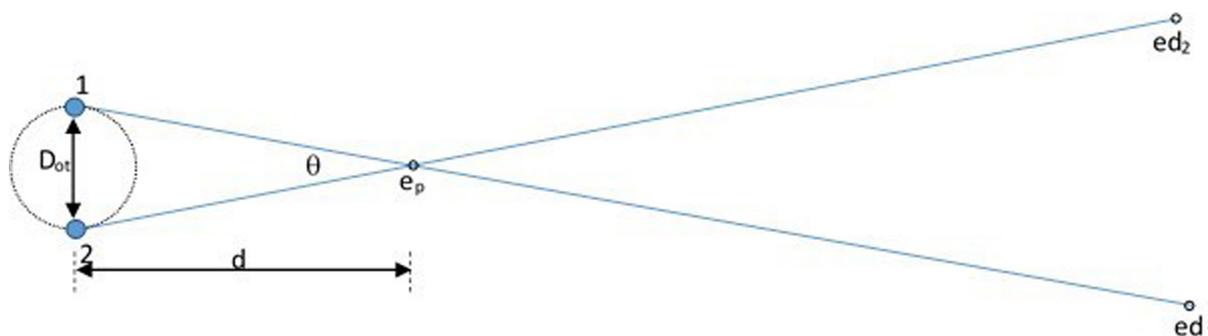
Na equação 1, substituindo  $D_{ot}$  por 2 UA e  $\theta/2$  por  $\beta$ , chega-se na expressão

$$d = \frac{1 \text{ UA}}{\tan \beta} \quad (2)$$

que permite calcular  $d$  em UA.



**Figura 1:** As duas imagens, tomadas com a câmara de um telefone celular, sugerem a visão que teríamos do polegar contra o fundo (razoavelmente) distante (os troncos das árvores nas imagens), se a visada fosse feita só com o olho esquerdo aberto (Figura à esquerda) e depois, só com o olho direito aberto (Figura à direita). O polegar parece “se mover” contra o fundo. Para produzir um par de fotos como esse, tome uma foto do polegar, em seguida tome uma segunda, deslocando o celular lateralmente de aproximadamente 10 cm. O polegar não deve ser movido entre uma foto e outra.



**Figura 2:** Determinação da distância  $d$  por paralaxe trigonométrica, tal como apresentada em grande parte dos textos de ensino e divulgação de astronomia. Porém, nos textos consultados, o procedimento para a determinação do ângulo  $\theta$  não é descrito.

Se tomarmos o ângulo  $\beta$  em radianos<sup>1</sup>, a função tangente pode ser representada por uma Série de Taylor [12]

$$\tan \beta = \beta + \frac{\beta^3}{3} + \frac{2\beta^5}{15} + \dots \text{ para } |\beta| < \pi/2 \text{ rad} \quad (3)$$

Como os ângulos de paralaxe das estrelas são pequenos ( $\beta \ll 1$  rad) [4, 11], o primeiro termo,  $\beta$ , no lado direito da equação 3 é muito maior que a soma os demais termos do mesmo lado dessa equação ( $\frac{\beta^3}{3} + \frac{2\beta^5}{15} + \dots$ ) e, assim, temos que  $\tan \beta \cong \beta$  (se essa aproximação não for familiar ao leitor, sugerimos o seguinte teste: ajuste a sua calculadora para radianos (rad) e depois calcule, por exemplo, a tangente de 0,10 rad. Veja que o valor obtido é quase igual ao valor do ângulo em radianos). Então, a equação 2 pode ser reescrita como

$$d \cong \frac{1UA}{\beta} \quad (4)$$

Portanto, conhecendo o ângulo de paralaxe  $\beta$ , em radianos, de uma estrela e usando a equação 4 determina-se a distância da estrela à Terra em UA (1 UA  $\equiv$  1,496 x 10<sup>11</sup> m [4]). O “parsec”, unidade muito utilizada para as distâncias astronômicas, guarda relação direta com a equação (4), e será definido mais adiante, no final da seção 2.

Agora, a pergunta que um aluno atento poderia fazer: “mas, como se determina  $\theta$ ?” Temos então definido aqui o problema do qual tratará predominantemente esse artigo. Esse é o que se poderia chamar de um problema de transposição didática de um conceito de astronomia, pois os textos consultados [4], [5], [7], [8] e [9] apresentam esse ângulo, em geral por meio de diagramas, mas não esclarecem como ele é determinado. Esse artigo se propõe então a desenvolver duas tarefas, associadas à resolução desse problema didático. A primeira tarefa será a de determinar, de forma acessível a um estudante de ensino médio (ou a qualquer outro que se interesse pelo assunto), como se chega a esse ângulo, que é a chave para conhecer

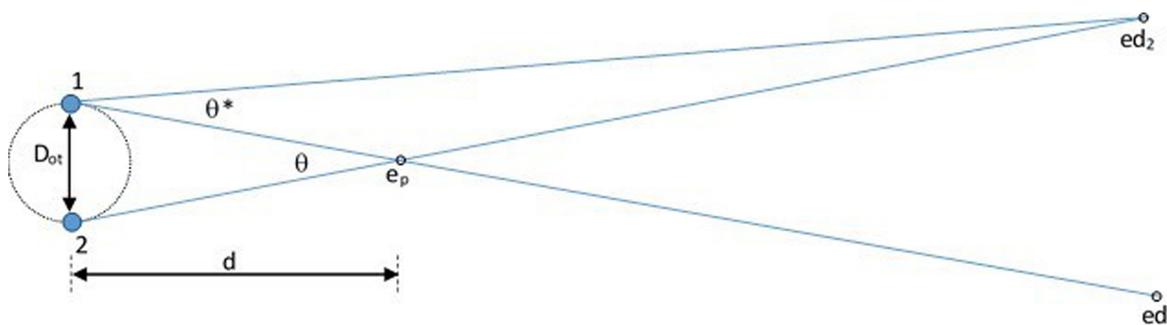
a distância à estrela próxima, que se quer determinar. A segunda tarefa é uma proposta de simulação terrestre, usando objetos próximos e distantes, num procedimento que pretende ser análogo ao dos astrônomos profissionais, de um ponto de vista exclusivamente conceitual, bem entendido. Trata-se da determinação da distância de objetos terrestres próximos por meio de fotografias, nas quais fique aparente seu movimento contra uma paisagem de fundo distante (tal como exemplificado na Figura 1); a partir da magnitude desse movimento, retira-se o ângulo de paralaxe, e com ele a distância ao observador desse objeto próximo. O uso de uma câmera fotográfica também é sugerido por Caniato [5].

## 2. Determinação gráfica de ângulos de paralaxe

Vamos então à primeira tarefa, que é a que serve de guia a esse artigo. Como determinar – astronomicamente - o ângulo  $\theta$  da Figura 2? O leitor notará que a distância  $d$  (da Terra à estrela próxima  $e_p$ ) não é conhecida, ela é justamente o que interessa medir. A distância  $D_{ot}$  (igual a 2 UA) é conhecida. Antes de iniciar, é importante notar também que, apesar de a Figura 2 não sugerir isso, a distância  $d$  é muito maior que a distância  $D_{ot}$ .

Veja a Figura 3. Nela, foi adicionada uma linha que liga a posição “1” da Terra à estrela distante  $ed_2$ . Imaginemos então o seguinte: na posição 1, determina-se a estrela distante ( $ed_1$ ) que está justamente alinhada com a estrela próxima  $e_p$ . Na posição 2, seis meses depois, determina-se a nova estrela ( $ed_2$ ) que está alinhada à estrela próxima  $e_p$ . Eis a solução do problema de determinação do ângulo  $\theta$ : ele é aproximadamente igual à distância angular entre essas duas estrelas,  $ed_1$  e  $ed_2$ . Na Figura 3 esse ângulo é denotado  $\theta^*$ ; a afirmação anterior dá conta que  $\theta \approx \theta^*$ . Mais adiante, mostraremos que  $\theta^*$  é de determinação bastante simples. Isso “resolve” o problema proposto aqui: o ângulo que é medido é  $\theta^*$ , o qual é suposto aproximadamente igual a  $\theta$ , o ângulo referido em praticamente todos os textos consultados, como já mencionado. No que segue, busca-se a compreensão

<sup>1</sup> Um ângulo de  $2\pi$  radianos equivale a 360°, ou uma rotação completa.



**Figura 3:** Geometria para a determinação do ângulo  $\theta$  (ver texto). A Figura está fora de escala. O ângulo de paralaxe  $\beta$  (não representado na Figura) equivale a  $\theta/2$ .

didática do porque esses ângulos são praticamente iguais, e de como os astrônomos conseguem medi-los.

Vamos então à próxima questão, derivada do problema proposto: porque esses dois ângulos podem ser tomados como sendo aproximadamente iguais? Nesse ponto, o leitor notará que, ou um astrônomo experiente, ou um matemático, por exemplo, não terão dificuldade em produzir a resposta, mas para isso terão que condicionar os elementos geométricos da Figura 3 a determinadas restrições. Mas, e um aluno? Há aqui uma propriedade geométrica, simples de entender, mas razoavelmente oculta, que não é explorada nos textos de ensino e divulgação em astronomia que tratam da paralaxe estelar, pelo menos não nos que foram consultados pelos autores. A proposta de resposta a essa questão, é portanto uma proposta didática, cujo objetivo é tornar esse conhecimento acessível a quem se interessar. Exploreemos então o “truque” geométrico que autoriza essa (quase) igualdade de ângulos.

A “trigonometria” do problema pode ser estabelecida como segue. O primeiro obstáculo, referido na legenda da Figura 2, e também na maioria dos livros consultados, é a escala. Nessa Figura, e em praticamente todas as Figuras consultadas, as “estrelas distantes” ( $e_{d1}$  e  $e_{d2}$ ) não estão a uma distância muito maior do que a “ $d$ ” à estrela próxima ( $e_p$ ). Nas Figuras 2 e 3, essa distância é pouco mais de três vezes maior. Se alguém se der ao trabalho de medir  $\theta$  e  $\theta^*$  na Figura 3 (isso pode ser feito diretamente na tela do computador no qual está sendo feita a leitura desse texto, com um transferidor) encontrará algo como  $15^\circ$  para  $\theta^*$  e mais de  $20^\circ$  para  $\theta$ . Como afirmar que esses dois ângulos são (praticamente) iguais? Aqui, fazemos um alerta ao leitor: não estamos afirmando que as Figuras (incluindo a apresentada nesse texto) são “ruins”, ou inadequadas. O ponto, reiteramos, é: como propiciar ao estudante interessado a compreensão das condições nas quais essas medições são feitas, em escala astronômica?

Então esse alerta de certa forma autoriza a proposta de atividade a seguir. Os estudantes, de posse de papel quadriculado, de régua e de transferidor, serão convidados a produzir uma Figura semelhante à Figura 4, só que dessa vez, as estrelas distantes estarão cinco ou seis vezes mais distantes do que a estrela próxima está da Terra.

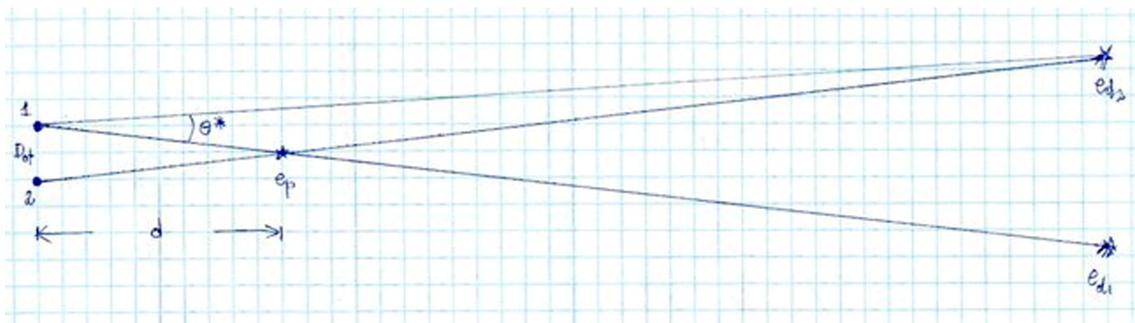
Lembremos: o diâmetro da órbita da Terra em volta do Sol deve ser pequeno quando comparado à distância  $d$  (distância à estrela próxima). Na reprodução (Figura 4), essa proporção é de aproximadamente 1 para 5. Apenas para comparação: a distância da Terra a Próxima Centauri, a estrela mais próxima (exceto o Sol), dividida pelo diâmetro da órbita Terra – Sol dá aproximadamente 137 000 ( $4,1 \times 10^{13}$  km /  $3 \times 10^8$  km), muito maior, portanto, que o fator 5. Mas esse fator 5 é o que “cabe” numa folha de papel ou numa tela de computador, é razoavelmente fácil de representar e dá resultados aceitáveis.

Os resultados, na visão dos estudantes, não são lá muito “empolgantes”. Tomando como referência a Figura 4,  $\theta^*$  (medido com transferidor) dá aproximadamente  $10,5^\circ$ ; com  $D_{ot} = 1$  cm (dois quadradinhos), pode-se calcular  $d$  por meio da equação 1:

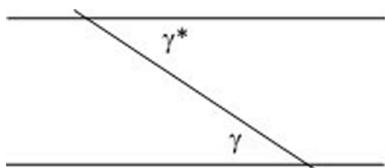
$$d = \frac{1 \text{ cm}/2}{\tan 10,5^\circ/2} = 5,4 \text{ cm}$$

A distância  $d$  na Figura 4 equivale a 10 divisões, ou 5 cm. Os cálculos, na visão dos alunos, “não funcionam lá muito bem”, e isso é positivo: essa é a “deixa” para explorar as razões dessa diferença. Cabe também acrescentar que, no desenho poderíamos facilmente medir de forma direta o ângulo  $\theta$  (representado nas Figuras 2 e 3); entretanto, um astrônomo não poderia fazer isso. De fato, uma medida direta de  $\theta$ , com transferidor, na Figura 4, mostraria que ele é razoavelmente diferente de  $\theta^*$ . Veremos porque no parágrafo a seguir.

Agora, entra em questão a escala da Figura. Se a distância às estrelas fixas fosse de fato muito maior do que a distância à estrela próxima  $e_p$ , as retas  $1 - e_{d1}$  e  $2 - e_{d1}$  na Figura 3 seriam praticamente paralelas na região que contém a Terra e a estrela próxima  $e_p$ . Então, satisfeita essa condição, teríamos duas retas paralelas, cortadas por uma reta diagonal; o segmento de reta entre os cortes seria a distância à estrela próxima  $e_p$ . De fato, numa acepção mais geométrica, se uma reta diagonal corta duas retas paralelas, os chamados ângulos alternos (e internos nesse caso),  $\gamma^*$  e  $\gamma$  na Figura 5 são iguais. Essa é a proposição XXIX do Livro I dos Elementos de Euclides [13].



**Figura 4:** Réplica da Figura 3, feita a mão. O ângulo  $\theta^*$  é medido com transferidor, e a distância  $d$  é calculada, em cm, supondo  $\theta^* = \theta$ . Em seguida, essa distância  $d$  é medida diretamente no desenho.



**Figura 5:** Se uma reta diagonal corta duas retas paralelas, os ângulos alternos internos  $\gamma^*$  e  $\gamma$  serão iguais.

Então, essa é a condição que tem que ser cumprida para que a medida da distância das estrelas por paralaxe trigonométrica seja válida: a distância da Terra à estrela próxima que está sendo medida deve ser muito menor do que a distância às assim chamadas estrelas distantes. Apenas para referência: a estrela Próxima Centauri é a estrela mais próxima do sistema solar; essa distância é de aproximadamente 4,2 anos-luz (um pulso de luz levaria 4,2 anos para percorrer a distância entre Próxima Centauri e a Terra). Sendo mais preciso: Alfa Centauro é de fato um sistema triplo (ver, por exemplo, [14], endereço no qual podem ser conferidas imagens das constelações do Cruzeiro do Sul e de Centauro). Uma dessas estrelas do sistema triplo, Próxima Centauri, é a estrela mais próxima do sistema solar. As outras duas estrelas estão um pouco mais distantes, a aproximadamente 4,35 anos-luz.

Se considerarmos alguma outra estrela  $a$ , imaginemos, 84 anos-luz de distância, essa outra estrela serviria razoavelmente bem como "estrela distante". Para evitar confusões: o leitor notará que nem é preciso saber a distância à estrela distante; na representação gráfica descrita acima, os estudantes são alertados de que não foi necessário medir as distâncias  $\overline{1 - e_{d1}}$  e  $\overline{2 - e_{d1}}$ . Na prática astronômica, aquelas estrelas que ocupam as mesmas posições em duas fotos, tiradas em um intervalo de seis meses, podem ser consideradas distantes para fins de paralaxe trigonométrica. O fato de elas aparecerem nas mesmas posições nas duas fotos dá origem a uma outra denominação bastante comum na astronomia: são as assim chamadas "estrelas fixas".

O "exercício" proposto acima ajudará a reconhecer os ângulos que são importantes nesse tipo de medida. Nesse momento, convém relatar aos alunos que os ângulos de paralaxe medidos na astronomia são sempre menores que um segundo de arco. Um segundo de arco é um ângulo muito pequeno: os alunos aprendem que precisam dividir a circunferência em 360 partes iguais; depois, uma dessas partes (um grau) será dividida em 60 partes, e uma dessas partes será denominada "um minuto de arco". Por fim, esse minuto de arco precisará ser dividido em outras 60 partes; só então chegaremos a um segundo de arco. Dito de outra forma, um segundo de arco é  $(360 \times 60 \times 60)$  avos de uma circunferência. Ou, a circunferência tem que ser dividida em um milhão e duzentas e noventa e seis mil partes; uma dessas partes é o segundo de arco. O maior ângulo de paralaxe será então produzido pela estrela que estiver mais próxima da Terra; essa estrela é Próxima Centauri, como já mencionado anteriormente. Seu ângulo de paralaxe é igual a apenas 0,750 segundos de arco (ver, por exemplo, [15] p. 341). Conforme mencionado na legenda da Figura 3, o ângulo de paralaxe é a metade do ângulo  $\theta$ , tal como definido mais acima no texto. Então, para exemplificar, o ângulo de paralaxe de Próxima Centauri, 0,750", equivale a um ângulo  $\theta$  de 1,500".

Os astrônomos adotam uma medida de distância que é justamente calcada em ângulos dessa ordem de magnitude: um "parsec", do inglês "parallax second" ([15], p. 339) é a distância na qual se encontraria um objeto celeste fictício que, ao ser observado da Terra, produziria um ângulo de paralaxe igual a um segundo de arco. Detalhando um pouco mais: a distância de 1 pc é definida a partir da equação 4, tomando o ângulo de paralaxe igual a 1 segundo de arco (1") convertido para radianos:

$$d = \frac{1UA}{\beta} = \frac{1UA}{1''} = \frac{1UA}{\frac{1}{3600} \frac{\pi}{180}} = 206\,265 UA,$$

ou seja, 1 pc equivale a 206 265 UA (A título de curiosidade, e como já mencionado anteriormente, 1 pc equivale a aproximadamente 3,26 anos-luz, ou  $3,09 \times 10^{16}$  m [4]).

Então, a distância em pc da Terra à uma estrela com um ângulo de paralaxe  $\beta$ , em segundo de arco, é definida

pelos astrônomos como o inverso do ângulo de paralaxe:

$$d = \frac{1}{\beta} \text{ (pc)}$$

Tomando, como exemplo, a estrela Próxima Centauri, ela estará então a  $\frac{1}{0,75} = 1,33$  pc de distância da Terra (ou do Sistema Solar, dá praticamente no mesmo).

### 3. Determinação fotográfica de ângulos de paralaxe

Vamos agora à segunda tarefa: uma atividade prática na qual esses ângulos serão determinados fotograficamente, tal como fazem os astrônomos. Essa determinação envolverá objetos terrestres e câmaras fotográficas, que podem ser as mais comuns, tais como as de telefones celulares. Convém lembrar que os ângulos de paralaxe “reais”, obtidos pela observação de estrelas próximas, são desanimadoramente pequenos, como destacado no parágrafo anterior, e a instrumentação necessária para medi-los, diferentemente do que descrevemos aqui, está fora do alcance de praticamente qualquer escola de ensino médio do País, afirmação essa que admitirá certamente algumas poucas exceções. Uma alternativa didática interessante, para o estudo terrestre de fenômenos de paralaxe, consiste na construção de um instrumento simples, que permite a medida direta de ângulos ([16], p. 44 e seguintes). Optamos por essa estratégia “fotográfica” de medida porque ela se aproxima mais do que fazem os astrônomos, como já referimos anteriormente.

A atividade – “terrestre”, bem entendido – a partir da qual será possível estimar a distância a um objeto próximo por meio de duas fotografias (feitas, por exemplo, com a câmara de um telefone celular) é explanada a seguir.

Inicialmente, mediremos de forma aproximada o campo de visão, em graus, da objetiva da câmara fotográfica empregada. Escolha, por exemplo, um prédio (do qual seja possível medir diretamente a largura) afaste-se dele com a câmara, perpendicularmente, até o ponto em que o prédio “enche” completamente o campo de visão da câmara. Essa deverá estar ajustada para focalizar no infinito. Se for usada a câmara de um telefone celular, não é necessário nenhum ajuste, basta enquadrar o prédio e fazer a imagem preencher toda a largura do quadro. Não é necessário fazer a foto. Meça, com uma trena, a largura “a” do campo da foto e a distância da câmara à parede (“b”); veja a Figura 6. O campo de visão  $\phi$  será dado então por

$$\phi = 2 \times \arctan \frac{a}{2b}$$

Nas fotos da Figura 7 foi empregada uma câmara munida de uma objetiva com distância focal igual a 70 mm. O campo de visão dessa câmara e sua objetiva, medido pelo



**Figura 6:** As marcas (setas de papel pardo, à esquerda e à direita) estão separadas por uma distância de 13,8 m. A câmara, com objetiva de 70 mm, foi posicionada a 28,40 m de distância. Conforme detalhado no texto, o campo de visão  $\phi$  da câmara fotográfica é de  $27,3^\circ$ . O cartaz central superior dá a dimensão equivalente à distância de 1 m; a seta menor, abaixo, fornece o equivalente à “largura” de um grau, para esse campo de visão.

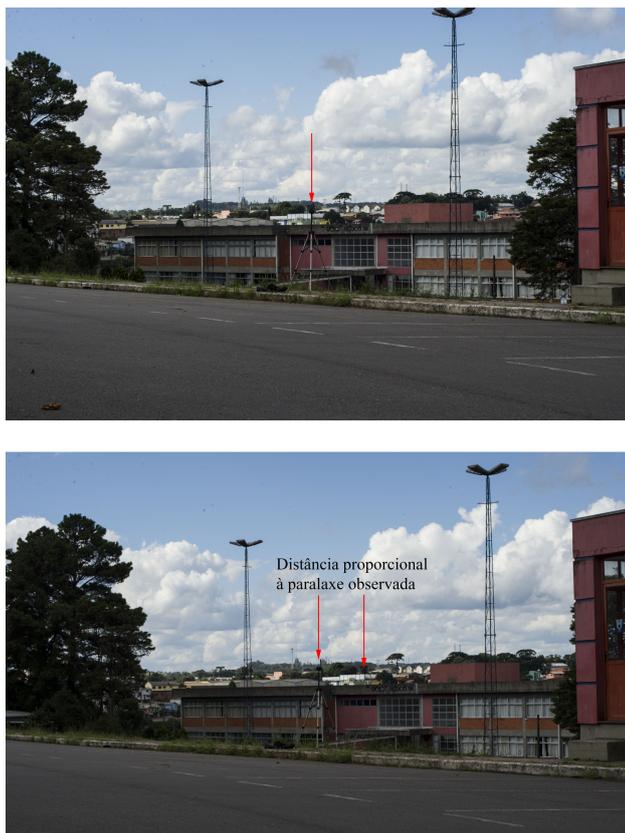
processo descrito acima, resultou em:

$$\phi = 2 \times \arctan \frac{13,8 \text{ m}/2}{28,4 \text{ m}} = 27,3^\circ$$

Também é possível determinar o campo de visão da câmara se for conhecida a distância focal do sistema óptico e as dimensões do CCD (elemento sensor de imagem); mas nem sempre é muito simples encontrar essas dimensões, em geral fornecidas pelo fabricante. Nesse caso, a expressão para cálculo é a mesma, porém com “a” sendo a distância focal em mm, e “b”, a maior dimensão do sensor, também em mm.

Qual seria a largura (imagine um detalhe qualquer na parede do prédio) equivalente a  $1^\circ$ ? Uma solução simples é dividir a largura do prédio (13,8 m) por  $27,3^\circ$ , o que dá 0,505 m, ou 50,5 cm. Esse seria um valor aproximado, já que estamos falando de um “arco” de  $27,3^\circ$ , o prédio seria a “corda” desse arco. Se for feito o cálculo “exato”, teremos  $\tan 1^\circ = (\text{largura de } 1^\circ) / 28,40 \text{ m}$ , o que dá para essa largura de  $1^\circ$  um valor de 0,496 m. Compare com 0,505 m: é razoável fazer essa aproximação. Aqui cabe uma consideração: os astrônomos profissionais adotam um procedimento análogo, mas a aproximação num contexto astronômico é muito melhor, pois a largura do quadro das fotos por eles obtidas (por meio de telescópios e detectores) é da ordem de minutos de arco (conforme disponibilizado no site do Laboratório Nacional de Astrofísica [17], para o telescópio de 1,60 m equipado com um detector CCD SITE, a largura do campo de visão é de 5,28 minutos de arco), enquanto que no nosso caso ela é da ordem de  $25^\circ$ .

Entretanto, na reprodução dessa foto, essa “largura correspondente a um grau” será reduzida; a imagem do prédio real (1380 cm), medida na foto aberta na tela



**Figura 7:** Entre a imagem acima e a imagem abaixo, a câmara foi deslocada lateralmente de uma distância de 0,94 m. Note a haste escura do tripé fotográfico, marcada por uma seta na imagem superior. Na imagem inferior, essa haste “se deslocou” contra o fundo distante, conforme indicado pelas duas setas verticais.

de um computador, por exemplo, terá um valor menor. Os autores encontraram para a largura de imagem na tela de um computador um valor de 16,9 cm. Portanto, o fator de redução será de  $\frac{1380}{16,9} = 81,7$ . Assim, na tela do computador, detalhes de uma largura angular de  $1^\circ$  medirão  $\frac{50,5\text{cm}}{81,7} = 0,62\text{ cm}$

A câmara fotográfica (aqui, com objetiva de distância focal 70 mm) está então “calibrada” para medir ângulos. Só não se pode esquecer que tudo isso vale se a distância focal for mantida (cuidado: nas lentes “zoom” ela pode ser variada manualmente), e se a câmara estiver focalizada no infinito.

Novamente, se for usado um telefone celular, não há nenhuma necessidade de preocupação com a distância focal. A razão para isso é que a distância focal de uma objetiva de uma câmara de telefone celular é de alguns poucos mm, e uma distância de pouco mais de um metro já pode ser considerada “infinita” para tais câmaras.

O passo seguinte consistirá em tomar duas fotos de um mesmo “alvo”, de modo que de uma foto para a outra a câmara seja deslocada lateralmente de uma determinada distância. Veja agora as duas imagens da Figura 7.



**Figura 8:** Ampliações da Figura 7. Note a haste preta superior do tripé fotográfico contra o prédio claro, um pouco abaixo da linha do horizonte.

Na imagem superior, a haste escura superior de um tripé fotográfico (seta vermelha) está alinhada com um prédio claro, distante (veja também o encarte ampliado na Figura 8, logo a seguir). Na imagem inferior, a câmara foi deslocada lateralmente de uma distância de 0,94 m (essa distância seria, em termos astronômicos, o equivalente ao diâmetro da órbita Terra – Sol,  $D_{ot}$  na Figura 2-a e 1-b); na segunda imagem, percebe-se que a haste escura deslocou-se visivelmente contra o fundo. Outros objetos, as torres de iluminação, por exemplo, também “se movem”, de um quadro para o outro. Seu “movimento” é menor, dado que elas estão mais distantes. É esse o efeito que é denominado “paralaxe”.

Agora, passemos ao cálculo do ângulo de paralaxe. O deslocamento contra o fundo distante, medido como sugerido acima, foi de 1,25 cm. Tínhamos calculado que deslocamentos equivalentes a  $1^\circ$  correspondem a 0,62 cm, medidos na foto (lembre-se que a largura total da imagem na tela do computador deve ser a mesma, 16,9 cm). Então, por uma proporção direta, se  $1^\circ$  corresponde a 0,62 cm, 1,25 cm corresponderão a  $2,02^\circ$ . Esse é o ângulo  $\theta$  da nossa “paralaxe fotográfica”. Em astronomia, esse ângulo  $\theta$  equivaleria ao dobro do ângulo de paralaxe astronômica:  $2\beta = \theta$ .

É claro que, se a imagem da Figura 7 for “aberta” em computadores diferentes, a largura das imagens não será mais, necessariamente, o valor indicado no texto, de 16,9 cm. Mas o deslocamento de paralaxe também mudará, proporcionalmente, de tal sorte que o ângulo de paralaxe medido será o mesmo,  $2,02^\circ$ , aproximadamente.

Por fim, passemos ao cálculo da distância  $d$  (usaremos aqui a denominação das grandezas conforme as da Figura 2) através da equação 1:

$$d = \frac{D_{ot}/2}{\tan \theta/2} = \frac{0,94\text{ m}/2}{\tan 2,02^\circ/2} = 26,7\text{ m}$$

A medida direta da distância, com uma trena, forneceu uma distância  $d$  ao objeto próximo (o qual seria o

análogo da distância  $d$  à estrela próxima  $e_p$ ), de 26,20 m, uma aproximação bastante convincente. Nesse ponto, convém lembrar aos estudantes que essa medida direta da distância ao objeto próximo não pode ser feita num contexto de astronomia.

#### 4. Considerações finais

O objetivo didático desse trabalho era uma compreensão mais conceitual dos fundamentos da medida de ângulos por paralaxe trigonométrica, utilizada pelos astrônomos para a determinação das distâncias de estrelas próximas. Conforme referido na introdução, na bibliografia consultada, não foram encontrados detalhes de como os astrônomos determinam esse ângulo de paralaxe. E aqui estabelecemos a primeira conclusão: não se trata de um erro (os textos e as Figuras consultadas eram todos corretos), mas sim de uma omissão. E mesmo essa “omissão” não pode ser generalizada como uma falha, dado que, em muitos desses textos, a opção dos autores talvez não tenha sido a de detalhar esse aspecto específico. O que surpreende, sempre de um ponto de vista didático, é a omissão sistemática desse aspecto central.

Para compreender melhor essa omissão: imagine um triângulo retângulo, alongado, de tal modo que o cateto maior não seja muito diferente em comprimento da hipotenusa. Os textos referem que, para determinar esse cateto maior, é necessário conhecer o cateto menor (o análogo astronômico do diâmetro da órbita da Terra em volta do Sol ou uma UA, conhecido) e o ângulo entre o cateto maior e a hipotenusa. Mas não conhecemos diretamente dois dos três ângulos internos desse retângulo (o terceiro mede  $90^\circ$ ), nem sua hipotenusa, nem seu cateto maior (que é justamente o que interessa determinar). Então, como esse ângulo entre o cateto maior e a hipotenusa é determinado? Sem ele, o problema de determinar o cateto maior (o análogo astronômico da distância sistema solar – estrela próxima) não tem solução.

Surpreendentemente, nenhum texto didático dá informações completas a esse respeito, e é essa lacuna que os autores pretenderam preencher, tanto na sessão 2 (“Determinação gráfica de ângulos de paralaxe”), quanto na sessão 3 (“Determinação fotográfica de ângulos de paralaxe”). A intenção, na sessão 2, foi de “geometrizá-lo” o problema, de modo a perceber que não medimos diretamente o ângulo que nos interessa, mas sim outro ângulo, muito semelhante (mas não exatamente igual). E essa medida é feita a partir de fotos obtidas por meio de telescópios, de uma dada posição da Terra no espaço e depois de outra, seis meses depois. Nessa segunda foto, obtida seis meses depois, os astrônomos verificam o quanto a estrela próxima “mudou de posição”; esse deslocamento aparente, a “paralaxe”, é a medida que precisamos para determinarmos a distância à estrela (desde que conheçamos, é claro, o valor da medida do raio da órbita da Terra em volta do Sol). Na sessão 3, a ideia foi explorar essa propriedade (recém exercitada) de

identificar ângulos (praticamente) semelhantes, em um procedimento fotográfico, esse sim referido com relativa abundância na literatura da didática da astronomia.

Esse é tipicamente um problema de transposição didática. Mas é um problema que permaneceu razoavelmente oculto não pela dificuldade intrínseca do tema, (os leitores atentos puderam perceber que nada além de princípios elementares de geometria foram evocados) mas por uma omissão sistemática. Os autores não têm hipóteses razoavelmente argumentadas para a(s) causa(s) dessa omissão. Uma delas poderia relacionar-se às recorrentes questões de escala, na representação de Figuras esquemáticas em astronomia (ver, por exemplo, [18], [19] e [20]). De fato, a semelhança de ângulos que resolve o problema didático aqui levantado fica um tanto oculta por conta da escala das Figuras empregadas. Como não é possível representar graficamente, do ponto de vista da escala, a questão da paralaxe num contexto astronômico, essa representação é feita invariavelmente (completamente) fora de escala. Essa escala distorcida (aliás, também empregada em parte desse artigo) é de fato mencionada em um número razoavelmente grande dos textos consultados. Pois bem: nessas Figuras fora de escala (as únicas que podemos produzir em representações em papel ou em telas de computador) a alegada semelhança de ângulos não é facilmente perceptível. Essa hipótese, para explicar a ausência sistemática de alusão a qual ângulo é de fato medido numa paralaxe estelar, é bastante razoável. Mas não é a única possível, e talvez nem seja a mais relevante. Mas isso seria talvez matéria para outra investigação.

#### Referências

- [1] S. Gossan and C.D. Ott, *Methods of Measuring Astronomical Distances. Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory – LIGO*. Disponível em <https://dcc.ligo.org/public/0096/T1200427/001/distance-ladder.pdf>, acesso em 06/04/2017.
- [2] [http://www.esa.int/Our\\_Activities/Space\\_Science/Gaia/overview](http://www.esa.int/Our_Activities/Space_Science/Gaia/overview), acesso em 06/04/2017.
- [3] <https://ned.ipac.caltech.edu/level5/NED1D/ned1d.html>, acesso em 06/04/2017.
- [4] K.S. Oliveira Filho e M.F.O. Saraiva, *Astronomia & Astrofísica* (Livraria da Física, Porto Alegre, 2014), 3<sup>a</sup> ed.
- [5] R. Caniato, *O Céu* (Editora Átomo, Campinas, 2011).
- [6] S. Paolantonio e O.I. Pintado, *Revista Latino-Americana de Educação em Astronomia* **3**, 7 (2006).
- [7] <http://cdcc.usp.br/cda/dispositivos/paralaxe/index.html>, acesso em 06/04/2017.
- [8] <http://www.telescopiosnaescola.pro.br/aga215/cap08.pdf>, acesso em 06/04/2017.
- [9] <http://www3.uma.pt/Investigacao/Astro/Grupo/Publicacoes/Pub/Posters/paralaxe.pdf>, acesso em 06/04/2017.
- [10] Brasil, *Orientações Curriculares para o Ensino Médio – vol. 2* (Secretaria de Educação Básica, Brasília, 2006).

- [11] J.M. Pasachoff, *Astronomy: From the Earth to the Universe* (Saunders College Publishing, Philadelphia, 1997), 5th ed.
- [12] D. Halliday, R. Resnick e J. Walker, *Fundamentos de Física, V. 1 – Mecânica* (LTC, Rio de Janeiro, 2016), 10<sup>a</sup> ed.
- [13] <https://www.mat.uc.pt/~jaimecs/euclid/4parte.html>, acesso em 06/04/2017.
- [14] [https://imagine.gsfc.nasa.gov/features/cosmic/nearest\\_star\\_info.html](https://imagine.gsfc.nasa.gov/features/cosmic/nearest_star_info.html), acesso em 06/04/2017.
- [15] N.F. Comins e W.J. Kaufmann, *Descobrimos o Universo* (Bookman, Porto Alegre, 2008), 8<sup>a</sup> ed.
- [16] C.A. Ronan, *Los Amantes de la Astronomía* (Editorial Blume, Barcelona, 1982).
- [17] <http://www.lna.br/opd/instrum/camara/camara.html>, acesso em 06/04/2017.
- [18] R. Langhi e R. Nardi, *Educação em Astronomia: Repensando a Formação de Professores* (Escrituras Editora, São Paulo, 2012).
- [19] R. Langhi e R. Nardi, *Cad. Bras. Ens. Fís.* **24**, 87 (2007).
- [20] S.M. Bisch, *Astronomia no Ensino Fundamental: Natureza e Conteúdo do Conhecimento de Estudantes e Professores*. Tese Doutorado, Universidade de São Paulo, 1998.