Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 40, nº 2, e2307 (2018)
www.scielo.br/rbef
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2017-0213



# Sobre derivadas fracionárias*

**On fractional derivatives**

G. Sales Teodoro†[1,2], D. S. Oliveira[2], E. Capelas de Oliveira[2]

[1]Universidade Federal de Lavras, Departamento de Ciências Exatas, Avenida Central, sn, Lavras, MG, Brasil
[2]Universidade Estadual de Campinas, Instituto de matemática, estatística e computação científica, Campinas, SP, Brasil

Recebido em 01 de Julho, 2017. Revisado em 16 de Agosto, 2017. Aceito em 28 de Agosto, 2017.

Apresentamos as várias maneiras de definir uma derivada fracionária, na forma de uma introdução histórica ao cálculo fracionário. Partindo do conceito de derivada fracionária, que é uma generalização da integral de Cauchy, abordamos as derivadas fracionárias nos sentidos de Riemann-Liouville e Caputo. Discutimos propostas recentes de novas derivadas fracionárias que, por meio de um processo de limite adequado, recuperam ambas as formulações de Riemann-Liouville e Caputo. Também discutimos outras formulações em que o núcleo da integral é não singular. Com base em um critério recente, justificamos por que tais derivadas podem ser consideradas derivadas fracionárias autênticas. Também apresentamos algumas aplicações de cunho estritamente matemático, junto com uma aplicação a um problema físico específico.
**Palavras-chave:** Derivada fracionária, cálculo de ordem não inteira, derivada de Riemann-Liouville, Derivada de Caputo, Circuito RL.

We present the several ways one can define a fractional derivative, in the form of a historical introduction to fractional calculus. Starting with the concept of fractional derivative, which is a generalization of the Cauchy integral, we approach the fractional derivatives in the senses of Riemann-Liouville and Caputo. We discuss recent proposals of new fractional derivatives which, through an adequate limiting process, recover both the Riemann-Liouville and the Caputo formulations. We also discuss other formulations in which the kernel of the integral is nonsingular. On the basis of a recent criterion, we justify why such derivatives can be considered authentic fractional derivatives. We also present some applications of strictly mathematical nature, together with an application to a specific physical problem.
**Keywords:** Fractional derivates, Non-integer order calculus, Riemann-Liouville derivative, Caputo derivative, Circuit RL.

## 1. Introdução

Cálculo de ordem inteira ou simplesmente *cálculo* é um ramo da matemática cujo objetivo é o estudo dos fenômenos que envolvem movimento e variação, que estão associados aos conceitos de área (integral) e tangente (derivada). O teorema fundamental do cálculo coloca em pé de igualdade estes dois conceitos.

O cálculo integral, remonta à antiga Grécia, quando Arquimedes, desenvolveu e aplicou o *método da exaustão* para solucionar o problema da determinação de áreas. No século XVII, este ramo recebeu maior impulso, quando Newton e Leibniz, independentemente um do outro, algebrizam o método da exaustão, o qual passou, gradualmente, a ser chamado como hoje é conhecido; *cálculo integral* uma nova ferramenta para resolver não só problemas geométricos associados à área, mas também de grande aplicabilidade em outras ciências.

O cálculo diferencial, contrariamente ao cálculo integral, desenvolveu-se muito mais tarde na história da Matemática. O conceito não tinha ainda sido formulado até início do século XVII, quando Fermat procurou obter os máximos e mínimos de certas funções. Leibniz, na segunda metade do século XVII, algebriza esse problema apresentando os conceitos de variáveis, constantes e parâmetros, bem como introduzindo a notação $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ como um quociente de quantidades *infinitesimais*, onde $\mathrm{d}x$ e $\mathrm{d}y$ chamadas de *diferenciais* designam "a menor possível das diferenças em $x$ e em $y$", respectivamente. Desta notação surge o conceito de derivada que mede a taxa de variação de uma função e o hoje conhecido *cálculo infinitesimal* ou *cálculo diferencial*.

Barrow, parece ter sido o primeiro a descobrir a conexão entre esses dois ramos do cálculo. Entretanto, Newton e Leibniz foram os primeiros a compreender a verdadeira importância desta relação e a explorá-la de forma ordenada. Em fins do século XVII e meados

*Dedicado ao Prof. Dr. Waldyr Alves Rodrigues Jr. (1946-2017).
†Endereço de correspondência: graziane.teodoro@gmail.com.

do século XVIII eles, independentemente um do outro, desenvolveram o cálculo diferencial e integral, isto é, fundiram os dois ramos do cálculo. Relacionaram esses dois problemas através do chamado teorema fundamental do cálculo, que demonstra serem problemas inversos, ou seja, a solução do problema da área pode ser usada para resolver o probema da tangente [1].

O desenvolvimento do cálculo de ordem inteira continuou eficiente e seus conceitos foram ampliados até o século XIX, a partir de onde surge a chamada análise matemática, quando analistas como Gauss, Cauchy, Weierstrass e Riemann, lhe deram, com clareza e elegância, através de suas obras, uma base matemática sólida, introduzindo formalmente os conceitos de limites, derivadas e integrais, ou seja, introduziram o rigor na matemática.

Passemos agora ao cálculo de ordem arbitrária [2–4], popularmente conhecido pelo nome de cálculo fracionário, nomenclatura esta que vamos utilizar, sempre que confusões estejam descartadas.

O conceito de cálculo fracionário tem origem a partir de uma pergunta formulada numa troca de correspondência entre Leibniz e l'Hôpital [2]. Nesta correspondência, Leibniz formulou uma questão envolvendo a generalização da derivada de ordem inteira para uma ordem, em princípio, arbitrária. Prontamente, l'Hôpital devolveu a pergunta para Leibniz, questionando-o no caso em que a ordem da derivada fosse meio, ou seja, qual a interpretação do significado, na notação de Leibniz $\mathrm{d}^n y/\mathrm{d}x^n$, com $n \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots\}$, quando $n = 1/2$, que equivale a derivar a função $y(x)$ meia vez, ou seja, uma raiz quadrada ou ainda uma potência fracionária. Leibniz, em sua resposta audaciosa e profética, assegurava que, para $y(x) = x$, a igualdade $\mathrm{d}^{1/2}x = x\sqrt[2]{\mathrm{d}x : x}$ aparentemente um paradoxo, *algum dia geraria muitas consequências frutíferas.* Este é considerado efetivamente o primeiro registro do cálculo fracionário.

Podemos dizer que foi neste momento, a partir da troca de correspondências, que o cálculo ordinário e o cálculo fracionário, iniciados em tempos e por motivações diferentes, vêm a se encontrar. Com efeito, parece que Leibniz foi o primeiro a tentar estender o significado de uma derivada de ordem inteira $n$, possivelmente, substituindo $n$ por $q$, onde $q$ é um racional, nada impedindo que possa ser real ou complexo.

Após, digamos, as primeiras intuições, passamos aos primeiros passos a fim da elaboração de uma teoria. Os primeiros *processos rudimentares* se deram, no início do século XVIII, com Euler atento ao desenvolvimento do cálculo fracionário deu uma contribuição importante para o assunto numa dissertação de 1730, onde escreveu: *Quando $n$ é um inteiro positivo e se $p$ é uma função de $x$, a relação $\mathrm{d}^n p$ por $\mathrm{d}x^n$ pode sempre ser expressa algebricamente, de forma que se $n = 2$ e $p = x^3$, então $\mathrm{d}^2 x^3$ por $\mathrm{d}x^2$ é $6x$ por 1.* Agora é perguntado que tipo de relação pode então ser feita se $n$ é uma fração? Por exemplo, poderia ser melhor compreendida com auxílio de interpolações na derivada [5].

Lagrange, em 1772, contribuiu indiretamente para o cálculo fracionário, a partir da chamada lei dos expoentes, apesar de ter sido demonstrado que esta lei não é válida para toda função.

A partir do início do Século XIX, vários foram os autores que contribuíram para o tema, agora de forma sistemática, dentre eles: Laplace, em 1812, definiu uma derivada fracionária por meio de uma integral e Lacroix, em 1819, o primeiro a mencionar as derivadas de ordem arbitrária, em seu livro de cálculo, em particular, visando obter uma fórmula para a $n$-ésima derivada para funções polinomiais do tipo $y = x^m$, com $m \in \mathbb{N}$, e depois introduzindo a função gama no lugar do símbolo de fatorial. Enfim, substituindo $n$ por $\alpha$ e $m$ por $\beta$, obtendo a fórmula para a derivada de ordem arbitrária. A partir dessa equação, com $\alpha = 1/2$ e $\beta = 1$, obtém-se o mesmo resultado, conforme formulação da chamada derivada fracionária no sentido de Riemann-Liouville.

Fourier, no seu estudo de derivadas de ordens arbitrárias, em 1822, obteve a representação integral para uma função, bem como para as respectivas derivadas de ordem superior, e substituindo o inteiro $n$ por $\alpha$, real arbitrário, obteve formalmente a versão generalizada para as derivadas de ordens arbitrárias.

É a partir deste período, enquanto se desenvolvia a teoria, que começam a ocorrer as aplicações do cálculo fracionário em vários problemas, na própria matemática e em outras áreas do conhecimento. Apesar de Leibniz, Euler, Lagrange, Laplace, Lacroix, Fourier e de outros notáveis matemáticos terem se dedicado ao cálculo fracionário, não existia ainda uma aplicação característica e bem definida [2]. A honra de uma primeira operação fracionária propriamente dita coube a Abel, em 1823, que obteve a solução de uma equação integral advinda do problema da tautócrona [4]. Para o caso relativístico ver [6].

Liouville, provavelmente atraído pela solução elegante de Abel, efetuou o primeiro estudo importante para fornecer uma definição lógica de uma derivada fracionária, a partir de dois pontos de vista diferentes. O trabalho inovador consiste em expandir funções em série de potências e definir a derivada de ordem $n$ operando como se $n$ fosse um inteiro positivo, estendido para uma ordem não inteira e, então, formalmente para a derivada de ordem arbitrária.

Esta definição somente pode ser usada para uma particular classe de funções. Devido a esta restrição e a fim de estender sua definição, Liouville formulou outra definição para a derivada fracionária baseada na função gama. Contudo esta definição é útil somente para funções racionais do tipo $x^{-a}$ (com $a > 0$). Liouville obteve sucesso ao aplicar suas definições para investigar problemas na clássica teoria do potencial. Contudo, havia um problema no caso em que $\alpha = 1$, que só veio solicionado com a derivada no sentido de Weyl [4].

Grünwald, unificou os resultados de Riemann e Liouville. No ano de 1867, insatisfeito com as restrições da derivada de Liouville, adotou como ponto de partida a definição de uma derivada como o limite de um quociente de diferenças o que resultou na derivada fracionária como o limite de uma soma.

A partir dos anos 1860, começou a crescer o estudo sobre os operadores (integrais e derivadas) fracionários, que são essencialmente baseados na familiar fórmula integral de Cauchy-Goursat. Estes operadores também foram considerados por Letnikov, em 1868, Laurent em 1884 e Heaviside em 1892.

O primeiro trabalho que levou ao que hoje chamamos a formulação da derivada fracionária, segundo Riemann-Liouville foi escrito por Sonin, em 1869. Neste, Sonin tomou como ponto de partida a fórmula integral de Cauchy para a derivada de ordem $n$ de uma função analítica.

Três anos depois, em 1872, Letnikov estendeu o trabalho de Sonin. Para tanto, Letnikov, assim como Sonin, tomou como referência a própria fórmula integral de Cauchy e como contorno um círculo fechado em uma superfície de Riemann. Laurent, em 1884, publicou um trabalho sobre operadores generalizados, considerado marco inicial para o moderno desenvolvimento do cálculo de ordem arbitrária, onde generalizou a fórmula integral de Cauchy.

Depois de discutidas as condições para que uma integral seja considerada de classe de Riemann ou de classe de Liouville, pode-se resolver a questão, proposta por Center, em 1850, para a derivada fracionária de uma constante [2, 3, 7, 8].

Por outro lado, a definição de derivada de ordem arbitrária de Riemann-Liouville, com base no fato de a derivação ser a operação inversa da integração e na lei dos expoentes, foi definida como uma derivada de ordem inteira de uma integral fracionária.

Assim, o cálculo de ordem arbitrária, como uma generalização natural do cálculo clássico, passou a ser o campo da análise matemática que lida com equações integrodiferenciais, ou seja, trata da investigação e das aplicações das integrais e das derivadas de ordem arbitrária.

O cálculo operacional [2, 9], foi desenvolvido por Heaviside a partir de 1892, onde introduziu a ideia de derivadas fracionárias em seu estudo do potencial e em linhas de transmissão elétrica. Inspirado no operador simbólico de Gregory da solução da equação do calor, Heaviside introduziu a letra $p$ para o operador diferencial $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ e deu a solução da equação de difusão [10] para uma distribuição de temperatura. Heaviside deu uma interpretação de $\sqrt{p} = \mathrm{D}^{1/2}$ de forma que ${}_0\mathrm{D}_t^{1/2}(1) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$ isto é, a derivada da constante não é zero.

Os resultados de Heaviside estavam corretos, mas ele não foi capaz de justificá-los. Estes somente foram justificados, em 1919, por Bromwich, que formalizou os resultados de Heaviside de forma consistente [2].

Em 1925, Hardy e Littlewood obtêm alguns resultados das integrais fracionárias, através dos operadores de Heaviside, Berg, em 1924, aplicou-os em problemas advindos tanto da Engenharia quanto da Física [2, 3, 7, 8] e, em 1927, Marchaud, introduziu uma derivada fracionária de ordem arbitrária $\alpha$ com $0 < \alpha < 1$.

Post, em 1930, usou quocientes de diferenças para estender a definição de derivada arbitrária de Grünwald e definir a diferenciação para operadores generalizados, a chamada derivada de ordem arbitrária de Grünwald-Letnikov, ferramenta muito eficiente na resolução de problemas numéricos.

Em 1939, Erdèlyi começa a introduzir definições para as chamadas diferintegrais com respeito às funções arbitrárias. A partir de 1940, em uma série de artigos Erdèlyi e Kober investigaram as propriedades da integral fracionária. Em particular, no estudo de equações integrais duais, Erdèlyi propôs uma modificação nos operadores de Riemann-Liouville que é uma generalização da integral fracionária de Riemann-Liouville e que culminou com os operadores de Erdèlyi-Kober.

Em 1949, Riesz encontrou integrais do tipo de Riemann e de Liouville, emergindo da teoria das equações diferenciais ordinárias lineares, as quais são conhecidas como transformadas de Euler do primeiro tipo [10].

Em 1965, Cooke generaliza os operadores integrais de Erdèlyi-Kober e demonstra a sua utilidade na obtenção de soluções de equações integrais na eletrostática. Em particular, as integrais fracionárias envolvendo funções especiais são introduzidas pelos chamados operadores de Lowndes que estão relacionados com o operador diferencial de Bessel [4].

Em 1968, foi publicada a primeira monografia sobre o cálculo fracionário aplicado à Química, elaborada em uma colaboração comum entre Oldham e Spanier [2]. Depois, em 1969, Caputo propôs uma nova definição para derivada de ordem arbitrária a fim de resolver um problema de viscoelasticidade [11].

Os operadores advindos do cálculo fracionário já eram considerados úteis em vários campos, tais como reologia, biologia quantitativa, eletroquímica, difusão, teoria de transporte, probabilidade, estatística, teoria do potencial e elasticidade. Esta razão incentivou Ross a tomar a dianteira e organizar a primeira conferência internacional no assunto cálculo fracionário. Assim, em junho de 1974, depois de 279 anos, quase três séculos depois do início, ou seja, desde a célebre pergunta de l'Hôpital, a primeira conferência internacional sobre cálculo fracionário e suas aplicações às ciências matemáticas foi realizada na Universidade de New Haven.

Esta conferência[1], a grande contribuição para o tema no século XX, teve vários objetivos, sendo o mais importante, popularizar o assunto na esperança de induzir cientistas de modo a incluir o tema em sua pesquisa e encorajá-los a descobrir novos métodos formais para representar fenômenos físicos por modelos matemáticos que podiam ser tratados com a elegância através do cálculo fracionário [9]. Os trabalhos ali apresentados e discutidos foram coletados e geraram a publicação [13].

[1] A última conferência ocorreu em 2016 [12].

No ano desta conferência, depois de uma colaboração entre Oldham e Spanier, houve a publicação do primeiro livro [2] reportado exclusivamente ao cálculo fracionário aplicado, isto é, direcionado às aplicações, onde pode ser encontrada uma excelente sequência histórica, descrita por Ross, do desenvolvimento da integração e diferenciação fracionárias e suas aplicações, no período compreendido entre 1695 e 1974, e também algumas de suas aplicações nas ciências químicas e físicas [9].

O período relativo aos anos de 1695 a 1974, foi descrito por Ross em sua bibliografia cronológica do cálculo fracionário com comentários, incluindo mais de 150 artigos [3, 7, 8]. Esta descrição pode ser encontrada no livro [2]. No ano seguinte, 1975, Ross expõe a história da teoria fundamental do cálculo fracionário e a publica num importante periódico [2, 5].

Em 1979 foi publicada a primeira tese de doutorado, escrita por Bagley [14] e orientada por Torvik, cujo tema está relacionado com as equações diferenciais de ordens arbitrárias na modelagem do comportamento de materiais viscoelásticos.

Na década de 1980 a atividade matemática em cálculo fracionário se intensifica de forma considerável em diversas partes do mundo. Nessa década, devido ao sucesso da primeira, foi promovida a segunda conferência internacional em cálculo fracionário, na University of Stratchclyde, Glasgow, em 1984, organizado também por Ross. Algumas questões em aberto ainda estavam intrigando a comunidade. Por exemplo: É possível achar uma interpretação geométrica para uma derivada de ordem não inteira? [5]. Esta questão mexe com o pensamento de muitos pesquisadores e cria-se um tipo de obsessão na busca de sua resposta. Nishimoto em 1984, começa a publicar uma série de trabalhos dedicados principalmente às aplicações do cálculo fracionário em equações diferenciais ordinárias e parciais. Tais trabalhos, posteriormente, foram coletados em livros [15].

Na União Soviética, em 1987 surge a obra de Samko, Marichev e Kilbas, um livro de cálculo fracionário, em russo, depois traduzida para o inglês, em 1991, [9], hoje um clássico.

A terceira conferência internacional em cálculo de ordem arbitrária foi realizada na Universidade de Nihon, em Tóquio, Japão em 1989 [16]. Esta conferência ocorreu por ocasião do centésimo aniversário da Universidade de Nihon. Para aqueles que frequentaram a conferência foi proposto um problema bastante engenhoso, a saber: O que é a dimensão fracionária do metrô de Tokyo?

Polack considerou aplicações do cálculo fracionário em ciência e engenharia, onde foram resolvidas equações integrais e diferenciais fracionárias, ordinárias e parciais, em mecânica dos fluidos. Miller e Ross, em 1993 publicam o clássico livro [5], onde é apresentada uma introdução às equações diferenciais fracionárias.

A partir do texto de 1969, Caputo publica, em 1992, o livro [17], onde é proposta uma mudança na definição da derivada fracionária, importante, por exemplo, na resolução de uma equação diferencial fracionária cuja solução satisfaz condições iniciais, em particular, descrevendo problemas de sismologia. Kiryakova, publica, em 1994, o livro [18], onde apresenta o cálculo fracionário generalizado e suas aplicações.

Convém ressaltar que, existem vários periódicos internacionais, completamente dedicados à teoria e aplicações do cálculo fracionário e a partir de 2010 o site FRACALMO (FRActional CALculus MOdelling).

Em 1996, Rubin [19] apresenta o desenvolvimento do cálculo fracionário de funções de uma e várias variáveis reais, discute integrais fracionárias aplicadas ao estudo de potenciais, problemas que surgem em mecânica, teoria de difração e outras áreas da física-matemática e Hilfer [20] provê uma introdução ao cálculo fracionário para físicos e coleta artigos de outros autores com várias aplicações.

Em 1999, foi publicado o importante livro de Podlubny [21], reunindo o essencial do cálculo fracionário para um estudo introdutório, inclusive várias funções especias necessárias à teoria e vários exemplos inspiradores de aplicações, em particular, envolvendo equações diferenciais ordinárias e parciais fracionárias.

West-Bologna-Grigolini [22], em 2003, descrevem como os fenômenos envolvendo fractais transformam-se, com o passar do tempo, usando metodologia advindas do cálculo fracionário. Em 2005, Zaslavsky publica o livro [23], especialmente dedicado a modelos fracionários de cinética anômala de processos complexos.

Alguns artigos merecem destaque, dentre eles: Mainardi [24] nas aplicações à mecânica; Gorenflo [25], devotado aos métodos numéricos; Carpinteri e Mainardi, reúnem uma série de artigos de pesquisa envolvendo o cálculo de ordem arbitrária e suas aplicações, e editam o livro [26]; Lorenzo e Hartley [27], aproveitando-se da falta de uma interpretação geométrica evidente para a derivada fracionária, propuseram uma interpretação para a definição de derivada segundo Grünwald-Letinikov e Tenreiro Machado [28] propôs uma outra interpretação, agora do ponto de vista de probabilidades.

Um breve destaque para o Brasil. No final do século XX, já podemos mencionar estudos associados ao cálculo de ordem não inteira no Brasil, dentre eles além do Paraná [29], Santa Catarina [30] e Rio de Janeiro [31]. Aqui, a fim de mencionar o grupo de Lenzi, no Paraná, a partir desta data, selecionamos o artigo [32]. Este grupo de físicos estuda principalmente as equações lineares e não lineares associadas à difusão anômala [33, 34].

Em 2006, Kilbas-Srivastava-Trujillo, editam o livro [35], orientado às aplicações, onde além de uma vasta revisão da teoria do cálculo integrodiferencial, encontramos várias aplicações da teoria e Magin [36], propõe modelos fracionários para descrever certos fenômenos em bioengenharia. Em 2007, Sabatier et al. [37] apresentam o estado da arte no estudo de sistemas fracionários e a aplicação da diferenciação fracionária.

Em 2010, Caponetto et al. [38], propõem implementações de *hardware* e aplicações de sistemas de ordem fracionária em modelagem de sistemas reais. Uma seção é dedicada para modelagem destes sistemas com a combinação do chamado metal polímero iônico, um novo material que pode ter aplicações em Robótica e Biomedicina, dentre outras áreas. Um outro livro é aquele escrito por Mainardi [39] dedicado exclusivamente ao estudo de modelagem matemática associada a problemas de ondas, em particular, em viscoelasticidade. O magistral trabalho de Tenreiro-Kiryakova-Mainardi [40], aborda o estado da arte, referenciando os livros e as conferências associados ao cálculo fracionário até os anos 2011.

No início dos anos 2000 Laskin [41] propôs uma mecânica quântica fracionária através das integrais de trajetórias. A partir deste estudo vários problemas foram propostos e discutidos tendo como base a mecânica quântica, em particular no estudo da equação de Schrödinger por vários autores, dentre os quais citamos Naber [42] que discutiu a equação de Schrödinger admitindo a fracionalização da derivada temporal. Mais recente são os trabalhos advindos de duas outras escolas, a saber, na China, Wang e colaboradores determinam uma função de Green para a equação de Schödinger, ainda com a fracionalização da derivada temporal, e discutem algumas aplicações [43] enquanto na Turquia, Ertik e colaboradores discutem sistemas quânticos através da derivada temporal fracionária [44]. Apenas para mencionar, comparativamente com a equação de Schrödinger, ressaltamos que o estudo de equações tipo Langevin [45], seja do ponto de vista de uma equação diferencial seja do ponto de vista de uma equação do tipo integrodiferencial, contempla outra enorme série de estudos [4].

Em 2008, Camargo et al. [46], usando métodos do cálculo diferencial e integral, apresentam e discutem dois modos distintos de se calcular a função de Green, associada ao caso unidimensional, da equação do telégrafo fracionária, bem como obtêm novas relações e um teorema de adição para as funções de Mittag-Leffler [47].

Em 2009, Camargo [48] defende sua tese de doutorado, o primeiro texto escrito em Português a fazer um estudo completo sobre as integrais e derivadas de ordem arbitrárias [2]. Concluímos, apenas mencionando as últimas teses defendidas [49–53], enquanto os mais recentes artigos serão citados no decorer do trabalho.

Num recente trabalho, Rodrigues e Capelas de Oliveira [54] argumentaram sobre questões do tipo: Para que serve o cálculo fracionário? Onde utilizá-lo? Existe uma interpretação geométrica e/ou física? Qual a relação com o cálculo de ordem inteira? que culminaram com a discussão de um problema de valor inicial. Aqui, estamos interessados em apresentar as novas formas de abordar uma derivada, continuação natural do trabalho [55].

Esse trabalho visa apresentar e discutir as várias formas de abordar um problema, através das derivadas de ordens não inteiras, há pouco introduzidas, tendo como objetivo reunir essas recentes formulações, no mínimo, através da respectiva bibliografia, num texto, em língua portuguesa, que possa se tornar numa breve introdução ao estudo do tema, em particular, para estudantes da área de exatas.

Ressaltamos que, num recente trabalho [55] foram coletadas diversas formas de apresentar uma derivada de ordem não inteira, bem como a integral fracionária. Aqui, vamos nos concentrar e justificar a utilidade das recentes formas de se introduzir uma derivada de ordem não inteira, que emergiram após o trabalho de Capelas de Oliveira-Tenreiro Machado [55], em particular, aquelas com um núcleo não singular [56, 57], bem como as derivadas fracionárias locais, pois são convenientes para lidar com funções não diferenciáveis [58–60].

O trabalho está disposto no seguinte modo: na segunda seção, apresentamos, de forma resumida, utilizando a definição de integral de convolução, o conceito de integral fracionária, considerada uma generalização do conceito de integral de Cauchy, pois entendemos que desta forma é possível identificar uma extensão natural da integral iterada como apresentada no cálculo de ordem inteira. Na terceira seção abordamos as derivadas fracionárias no sentido de Riemann-Liouville, a mais difundida, em particular, por razões históricas, e no sentido de Caputo, a mais conveniente para abordar um problema físico contendo condições iniciais e/ou de contorno, ambas definidas em termos da integral fracionária; a derivada de Grünwald-Letnikov, conveniente para problemas numéricos, e a derivada de Hilfer que, para distintos valores da ordem da derivada recupera a derivada fracionária nos sentidos de Riemann-Liouville e Caputo, além da derivada de Weyl. Na quarta seção introduzimos outras formulações da derivada fracionária que, de uma forma ou de outra, para um conveniente processo de limite, recuperam as formulações de Riemann-Liouville e/ou de Caputo, bem como discutimos aquelas formulações onde o núcleo da integral é não singular. Em particular, destacamos as derivadas de Hadamard e suas variações, onde o núcleo envolve um logaritmo; as derivadas de Caputo-Hadamard e generalizações, bem como a derivada de Caputo-Fabrizio, onde o núcleo é não singular. Na quinta seção, apresentamos e justificamos a validade de essas derivadas poderem ser consideradas fracionárias, isto é, obedecerem a um critério objetivo, recentemente proposto [61]. Na sexta seção, após uma discussão sobre o que se entende por efeito de memória, propomos aplicações tanto de cunho estritamente matemático, associado ao teorema fundamental do cálculo, quanto um específico problema físico, envolvendo um circuito elétrico composto de um resistor e um indutor, o chamado circuito $RL$ em série.

## 2. Integral fracionária

Visto que a maioria das formulações envolvendo a derivada fracionária é apresentada em termos de uma integral fracionária, introduzimos o conceito de integral fracionária conforme proposto por Riemann-Liouville. O

[2]Menção honrosa pela SBMAC.

conceito de integral fracionária de ordem $\alpha$, é conduzido, no limite $\alpha \to m$ com $m = 0, 1, 2, \ldots$ no conceito de integral de ordem inteira, conforme a fórmula de Cauchy.

Antes de apresentarmos a expressão para a integral fracionária, é conveniente introduzir o chamado núcleo de convolução definido por

$$N_\alpha(x) = \frac{x_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

onde $\Gamma(\alpha)$, com $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, é a função gama, sendo $x_+$ tal que

$$x_+ = \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Definição. Considere $y \in L^p(a, b)$, $1 \leq p \leq \infty$, $-\infty < a < b < \infty$. A integral fracionária, também chamada integral de Riemann-Liouville, de ordem $\alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}^+$, da função $y(x)$, denotada[3] por $J^\alpha_{0,x} y(x)$, é definida pela integral de convolução

$$\begin{aligned} J^\alpha_x y(x) &\equiv J^\alpha_{0,x} y(x) = N_\alpha(x) \star y(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-\xi)^{\alpha-1} y(\xi)\,\mathrm{d}\xi \end{aligned} \tag{1}$$

onde $N_\alpha(x)$ é o núcleo de convolução e $\star$ denota o produto de convolução.

É conveniente ressaltar que, a partir da propriedade da convolução, para $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, temos $J^\alpha_x J^\beta_x = J^{\alpha+\beta}_x$, conhecida como propriedade de semigrupo, ou ainda como lei dos expoentes [4]. Ainda mais, conforme mencionado, no limite $\alpha \to m$ com $m = 0, 1, 2, \ldots$, obtemos

$$\lim_{\alpha \to m} J^\alpha_x y(x) = J^m_x y(x) = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^x (x-\xi)^{m-1} y(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

que nada mais é que a fórmula das integrais iteradas de Cauchy [4].

## 3. Derivada fracionária

Nesta seção, objetivo central do trabalho, vamos abordar o conceito de derivada fracionária, pois é ele que desempenha papel fundamental na discussão de uma equação diferencial fracionária, por exemplo, associada a um problema de relaxação ou a um problema de difusão anômala [62, 63], bem como no estudo de ondas em viscoelasticidade [39], dentre outros [64, 65].

Como já mencionamos, são várias as maneiras de se apresentar uma derivada fracionária [55]. Aqui, vamos nos concentrar nas derivadas no sentido de Riemann-Liouville e no sentido de Caputo, pois serão essas duas formulações aquelas necessárias quando da apresentação de novas maneiras de abordar o conceito de derivada, seja ele do ponto de vista estritamente matemático ou no sentido de uma real aplicação em um problema advindo da física, por exemplo, onde está associada uma equação diferencial. Ainda mais, mencionamos o trabalho de Li-Deng [66] onde são discutidas, do ponto de vista técnico, várias propriedades associadas às formulações da derivada fracionária conforme propostas por Riemann-Liouville, Caputo e Grünwald-Letnikov.

É conveniente lembrar que das várias formulações, além das formulações de Riemann-Liouville e Caputo, vale a pena mencionar algumas, pelo particular interesse. Dentre elas, mencionamos a formulação de Grünwald-Letnikov, devido a sua importância em problemas numéricos. Deve ser mencionado que, alguns autores acreditam que o *aparente paradoxo*, mencionado por Leibniz em sua carta endereçada a $\ell$'Hôpital, seria devido ao fato de a derivada fracionária poder ser escrita como uma série, tal qual na definição conforme proposta por Grünwald-Letnikov [5]. Em particular, Lorenzo-Hartley [27], utilizaram esta definição para propor, numericamente, uma interpretação geométrica para a derivada de ordem arbitrária. Podlubny [67] usou a definição de Grünwald-Letnikov e suas variações para propor uma interpretação física para a derivada fracionária, considerado, ainda hoje, um problema em aberto [68].

Uma outra derivada que merece destaque é a formulação de Riesz, devido a importância nas aplicações, em particular, quando a ordem fracionária encontra-se na variável espacial. A derivada fracionária no sentido de Riesz [35, 69–71], além de outras aplicações, desempenha papel fundamental na resolução da equação de Schödinger fracionária [72–74]. Ainda mais, destacamos, também, a derivada fracionária conforme proposta por Hilfer [20], pois para particulares valores da ordem da derivada recupera as formulações conforme propostas por Riemann-Liouville e Caputo bem como, para um particular valor do extremo de integração, recupera a chamada derivada fracionária de Weyl.

Convém ressaltar que a proliferação de definições envolvendo a derivada fracionária advém de não termos uma interpretação geométrica e/ou física, em analogia ao cálculo de ordem inteira, onde a derivada é interpretada como uma razão de mudança, bem como está associada à tangente a uma curva. Ainda assim, mencionamos possíveis interpretações associadas à derivada fracionária [21, 75].

Como já mencionado, vamos apresentar apenas as formulações das derivadas fracionárias nos sentidos de Riemann-Liouville, de Caputo, de Grünwald-Letnikov e de Hilfer. As formulações da derivada fracionária envolvendo o conceito de limite, em analogia ao cálculo de ordem inteira, as derivadas de Hadamard e suas variações e as derivadas com núcleo não singular, serão apresentadas na Seção 4.

[3] A notação $D^{-\alpha}_{0,x}$, com $\alpha > 0$, para denotar o operador associado à integral fracionária, $J^\alpha_x$, também é frequente na literatura.

### 3.1. Derivada de Riemann-Liouville

Apresentamos as derivadas fracionárias no sentido de Riemann-Liouville, bem como recuperamos, a partir de um conveniente extremo de integração, a chamada derivada de Liouville. Vamos discorrer, apenas nessa seção, sobre o que se entende por derivada fracionária à direita e à esquerda para, depois, na sequência, trabalharmos apenas com a formulação da derivada fracionária à esquerda, admitindo que o tratamento dado é análogo à formulação da derivada à direita.

Definição. Consideremos $y \in AC^n[a,b]$ com $-\infty < a < b < \infty$. Sejam $\alpha \in \mathbb{C}$ com $\mathrm{Re}(\alpha) \geq 0$ e $\alpha \neq \mathbb{N}$. As derivadas fracionárias no sentido de Riemann-Liouville à esquerda e à direita, também chamadas de derivadas de Riemann-Liouville, em um intervalo finito do eixo real, denotadas por $D^\alpha_{a+}y$ e $D^\alpha_{b-}y$, são definidas, respectivamente, por

$$(D^\alpha_{a+}y)(x) := \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n (J^{n-\alpha}_{a^+}y)(x) \tag{2}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n \int_a^x \frac{y(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{(x-\xi)^{\alpha-n+1}},$$
$$n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1, \quad x > a$$

e

$$(D^\alpha_{b-}y)(x) := \left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n (J^{n-\alpha}_{b^-}y)(x)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n \int_x^b \frac{y(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{(\xi-x)^{\alpha-n+1}},$$
$$n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1, \quad x < b$$

onde $[\mathrm{Re}(\alpha)]$ é a parte inteira de $\mathrm{Re}(\alpha)$ e $J^\alpha_x y(x)$ é a integral fracionária, Eq.(1).

Da Eq.(2) podemos concluir: A derivada de ordem arbitrária, segundo Riemann-Liouville, equivale à derivada de ordem inteira de uma integral de ordem arbitrária.

A derivada de ordem inteira da integral fracionária é diferente da integral fracionária da derivada de ordem inteira, como vamos verificar após a formulação da derivada fracionária no sentido de Caputo. Mencionamos, também, que a igualdade dessas duas maneiras de abordar uma derivada fracionária, é um caso particular que está associado ao valor da função no extremo inferior da integral fracionária. Concluímos a seção apresentando dois casos particulares da derivada de Riemann-Liouville.

#### 3.1.1. Caso inteiro, $\alpha = n \in \mathbb{N}$.

A partir da Eq.(2), vamos recuperar, como caso particular do parâmetro associado à ordem da derivada, as respectivas derivadas de ordens inteiras. Para $\alpha = n \in \mathbb{N}$ temos,

$$(D^n_{a+}y)(x) = y^{(n)}(x) \qquad \text{e} \qquad (D^n_{b-}y)(x) = (-1)^n y^{(n)}(x)$$

onde $y^{(n)}(x)$ é a usual enésima derivada de $y(x)$ que, no caso $\alpha = 0$, fornecem

$$(D^0_{a+}y)(x) = y(x) = (D^0_{b-}y)(x),$$

isto é, recuperamos a própria função.

#### 3.1.2. Derivada de Liouville nos semieixos

Ao mudarmos o intervalo, considerando os semieixos, obtemos a chamada derivada de Liouville. Assim, além das condições impostas para as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville no intervalo finito, vamos considerar $x > 0$, $n$ o menor inteiro maior que $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, $\beta \equiv n - \alpha > 0$ e $0 < \mathrm{Re}(\alpha) \leq 1$. Ainda mais, consideramos $y \in AC^n(a,b)$ com $-\infty < a < b < \infty$. As derivadas de Liouville à esquerda e à direita são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned}(D^\alpha_{0+}y)(x) &:= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n (J^{n-\alpha}_{0^+}y)(x)\\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n \int_0^x \frac{y(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{(x-\xi)^{\alpha-n+1}},\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(D^\alpha_{-}y)(x) &:= \left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n (J^{n-\alpha}_{-}y)(x)\\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n \int_x^\infty \frac{y(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{(\xi-x)^{\alpha-n+1}},\end{aligned}$$

com $n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1$, $\mathrm{Re}(\alpha) \geq 0$ e $x > 0$.

Antes de passarmos para a formulação da derivada fracionária no sentido de Caputo ou simplesmente derivada de Caputo, lembramos que podemos considerar, também, como caso particular, $\mathrm{Re}(\alpha) = 0$, com $\alpha \neq 0$ o que nos leva às chamadas derivadas fracionárias de ordem puramente imaginárias [4].

### 3.2. Derivada de Caputo

Como já mencionamos, diferentemente da formulação da derivada fracionária no sentido de Riemann-Liouville, a derivada fracionária no sentido de Caputo é uma integral de ordem arbitrária de uma derivada de ordem inteira. Ainda mais, conforme proposto, a partir de agora, vamos considerar apenas a formulação levando em conta a derivada à esquerda, tendo em mente que o tratamento associado à derivada à direita se dá de maneira semelhante.

Em analogia à formulação da derivada fracionária proposta por Riemann-Liouville vamos discutir as duas derivadas fracionárias de Caputo, isto é, consideradas no semieixo $\mathbb{R}^+$ e no eixo $\mathbb{R}$, sendo $\alpha \in \mathbb{C}$ com $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ e $\alpha \neq \mathbb{N}$.

Definição. Considere $y \in AC^n[a,b]$. As derivadas fracionárias de Caputo, à esquerda, no semieixo $\mathbb{R}^+$ e no eixo $\mathbb{R}$, são dadas, respectivamente, por

$$({}^C D_{0+}^{\alpha} y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x \frac{y^{(n)}(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{(x-\xi)^{\alpha-n+1}}, \qquad (3)$$

e

$$({}^C D_{-}^{\alpha} y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{y^{(n)}(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{(x-\xi)^{\alpha-n+1}}.$$

Enfim, ressaltamos que, em analogia às integrais fracionárias de Riemann-Liouville, as derivadas fracionárias de Caputo admitem, como casos particulares $\alpha = 0$ e $\alpha = n$ com $n \in \mathbb{N}$, isto é,

$$({}^C D_{0+}^{0} y)(x) = y(x) = ({}^C D_{-}^{0} y)(x),$$

recuperando a função, e

$$({}^C D_{0+}^{n} y)(x) = y^{(n)}(x) \quad \text{e} \quad ({}^C D_{-}^{n} y)(x) = (-1)^n y^{(n)}(x)$$

onde $y^{(n)}(x)$ é a usual enésima derivada de $y(x)$.

### 3.3. Derivada de Grünwald-Letnikov

Como já mencionado, a formulação de Grünwald-Letnikov tem importância em problemas numéricos. Essa formulação foi introduzida a partir de uma série, porém a expressão em termos de uma integral é mais facilmente manipulável. Vamos introduzir o conceito como proposto por Grünwald-Letnikov e depois apresentar a mencionada expressão de mais fácil manipulação.

Definição. Considere $y \in L^p(a,b)$, $1 \leq p < \infty$ e $-\infty < a < b < \infty$. Admita que $y$ seja uma função definida em um intervalo dado e $x$ um ponto fixo no interior deste intervalo. A derivada de ordem arbitrária $\alpha$ no sentido de Grünwald-Letnikov à esquerda, denotada por, $y_+^{\alpha)}(x)$, é definida pela expressão

$$y_+^{\alpha)}(x) = \lim_{h\to+0} \frac{(\Delta_h^{\alpha} y)(x)}{h^{\alpha}}, \qquad \alpha > 0. \qquad (4)$$

Esta definição está baseada na generalização da usual diferenciação de uma função $y(x)$ de ordem $n \in \mathbb{N}$ da forma

$$y^{(n)}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(\Delta_h^{n} y)(x)}{h^{n}}. \qquad (5)$$

Aqui $(\Delta_h^n y)(x)$ é uma diferença finita de ordem $n \in \mathbb{N}$ de uma função $y(x)$ com um passo $h \in \mathbb{R}$ e centrado no ponto $x \in \mathbb{R}$.

A partir da expressão anterior, define-se uma derivada de ordem arbitrária substituindo diretamente $n \in \mathbb{N}$ na Eq.(5) por $\alpha > 0$. Para isto, $h^n$ é substituído por $h^\alpha$, enquanto a diferença finita $(\Delta_h^n y)(x)$ é substituída pela diferença $(\Delta_h^\alpha y)(x)$ de uma ordem arbitrária $\alpha \in \mathbb{R}$ definida pela série infinita, a seguir

$$(\Delta_h^{\alpha} y)(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} y(x-kh),$$
$$x, h \in \mathbb{R}, \ \alpha > 0, \qquad (6)$$

onde $\binom{\alpha}{k} \equiv \Gamma(\alpha+1)/\Gamma(\alpha-k+1)k!$.

Quando $h > 0$, a diferença, Eq.(6), é chamada diferença à esquerda, enquanto para $h < 0$ é chamada diferença à direita. A série na Eq.(6) converge absoluta e uniformemente para todo $\alpha > 0$ e para toda função $y(x)$.

Seguindo a Eq.(5) emerge a derivada de Grünwald-Letnikov de ordem arbitrária à esquerda $y_+^{\alpha}(x)$ definida pela expressão Eq.(4). Substituindo a Eq.(6) na Eq.(4) e introduzindo as funções gama, obtemos

$$\begin{aligned} y_+^{\alpha)}(x) &\equiv \mathrm{D}^{\alpha} y(x) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+1) y(x-kh)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)} \end{aligned} \qquad (7)$$

desde que o limite exista.

Quando $\alpha$ é igual a um inteiro $m$, a Eq.(7) reduz-se à derivada de ordem $m$, isto é, na seguinte forma

$$\mathrm{D}^m y(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^m} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} y(x-kh), \qquad (8)$$

onde $\binom{m}{k}$ é o coeficiente do binômio.

A expressão Eq.(6) da diferença de ordem arbitrária $(\Delta_h^\alpha y)(x)$ admite que a função $y(x)$ é dada pelo menos no semieixo. Para a função $y(x)$ dada num intervalo finito $[a,b]$, tal diferença pode ser definida como uma continuação da função $y(x)$ truncada além de $[a,b]$:

$$(\Delta_h^{\alpha} y)(x) = (\Delta_h^{\alpha} y^*)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} y^*(x-kh),$$
$$x, h \in \mathbb{R}, \ \alpha > 0, \qquad (9)$$

onde

$$y^*(x) = \begin{cases} y(x), & x \in [a,b], \\ 0, & x \notin [a,b]. \end{cases}$$

Reescreve-se a diferença de ordem arbitrária Eq.(9) em termos da função $y(x)$ propriamente dita, nas formas

$$(\Delta_{h,a+}^{\alpha} y)(x) := \sum_{k=0}^{[\frac{x-a}{h}]} (-1)^k \binom{\alpha}{k} y(x-kh),$$
$$x \in \mathbb{R}, \ h > 0, \ \alpha > 0$$

e

$$(\Delta_{h,b-}^{\alpha} y)(x) := \sum_{k=0}^{[\frac{b-x}{h}]} (-1)^k \binom{\alpha}{k} y(x+kh),$$
$$x \in \mathbb{R}, \ h > 0, \ \alpha > 0.$$

Então, em analogia à Eq.(4), a derivada à esquerda de ordem arbitrária no sentido de Grünwald-Letnikov de ordem $\alpha > 0$, em um intervalo finito $[a,b]$, é definida por

$$y_{a+}^{\alpha)}(x) := \lim_{h\to+0} \frac{(\Delta_{h,a+}^{\alpha} y)(x)}{h^{\alpha}}. \qquad (10)$$

Definição. Seja $y(x) \in C^m[0,x]$. A derivada fracionária, de ordem $\alpha$, no sentido de Grünwald-Letnikov, é definida por

$$\begin{aligned} \mathrm{D}^\alpha y(x) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{y^{(k)}(0)\, x^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x (x-\tau)^{m-\alpha-1} y^{(m)}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

com $m$ inteiro tal que $m-1<\alpha<m$.

É possível mostrar que as formulações da derivada fracionária conforme propostas por Riemann-Liouville e Caputo podem ser obtidas a partir da formulação de Grünwald-Letnikov [54].

### 3.4. Derivada de Hilfer

Introduz-se o conceito de derivada fracionária conforme proposto por Hilfer [20]. Esta formulação, para um dos extremos do intervalo relativo ao parâmetro, recupera a formulação conforme Riemann-Liouville enquanto no outro extremo, recupera a formulação de Caputo. Ainda mais, as chamadas derivadas fracionárias no sentido de Weyl são recuperadas para um particular valor do extremo do intervalo. Apenas mencionamos que as derivadas de Hilfer já foram generalizadas para as assim chamadas derivadas de Hilfer-Prabhakar [76] e Hilfer-Hadamard [77].

Definição. Sejam $0<\alpha<1$ e $0\leq\mu\leq 1$, denominados a ordem e o tipo da derivada fracionária, respectivamente. A derivada fracionária (à direita/à esquerda), em relação a $x$ é definida por

$$\mathsf{D}^{\alpha,\mu}_{a\pm} f(x) = \left[\pm J^{\mu(1-\alpha)}_{a\pm} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(J^{(1-\mu)(1-\alpha)}_{a\pm} f\right)\right](x)$$

para funções $f$ para as quais a expressão do lado direito exista. Aqui, as integrais fracionárias são conforme Eq.(1), com o extremo inferior igual a $a$.

No caso em que $a=\mp\infty$ e $\mu=0$, recuperamos as derivadas conforme a formulação de Weyl; $\mu=0$ recupera a formulação proposta por Riemann-Liouville e $\mu=1$ obtém-se a derivada conforme introduzida por Caputo.

Definição. Para $-\infty<a<\infty$ a derivada fracionária de Hilfer de ordem $0<\alpha<1$ e tipo $0\leq\mu\leq 1$ no limite $a$ é definida pela expressão

$$\mathsf{D}^{\alpha,\mu} f(a) = \pm \lim_{x\to a\pm} \mathsf{D}^{\alpha,\mu}_{a\pm} f(x)$$

desde que os dois limites existam e sejam iguais. Se $\mathsf{D}^{\alpha,\mu} f(a)$ existe, a função é chamada diferenciável fracionariamente no limite $a$. Note que, enquanto as derivadas fracionárias são operadores não locais, a derivada fracionária no limite é um operador local, como vamos discutir a seguir.

## 4. Outras formulações

Antes de abordarmos outras formulações envolvendo o conceito de derivada fracionária, façamos um pequeno resumo relativo ao tema, em particular, mencionando algumas referências onde podemos aprofundar os conhecimentos. No livro de Miller-Ross [5], encontramos um levantamento histórico desde o ano de 1695 até 1993, onde são comentados vários resultados e citados vários artigos, muitos deles seminais. Mais recente são os artigos de Tenreiro-Kiryakova-Mainardi [40, 78, 79] onde podem ser encontrados vários fatos marcantes relativos ao cálculo fracionário, com destaque para os pôsters que podem ser baixados gratuitamente. Como já mencionado, o trabalho de Capelas de Oliveira-Tenreiro Machado [55] contém um resumo das várias formulações propostas até o final da década passada e, mais recente, o livro de Camargo-Capelas de Oliveira [4], escrito em português, onde encontramos uma introdução sobre o cálculo fracionário desde o ano 1695 até o início de 2015, comemorando os 320 anos do cálculo fracionário, contendo, também, várias informações de pesquisadores e grupos de pesquisa que atuam no Brasil.

Além das derivadas fracionárias que mencionamos e outras citadas na bibliografia, existem outros dois grupos de derivadas que são, por muitos pesquisadores, consideradas, também, fracionárias, a saber: aquelas que são apresentadas por limites e recuperam as derivadas de ordem inteira, além de satisfazerem várias das propriedades do cálculo de ordem inteira [80] e aquelas que têm o núcleo não singular, que começaram a aparecer após o trabalho de Caputo-Fabrizio [56].

No primeiro grupo, mencionamos a chamada derivada fracionária compatível de ordem $\alpha$ com $0<\alpha<1$ introduzida por Khalil-Horani-Yousef-Sababheh [81] que, no limite $\alpha\to 1$, vem a coincidir com a derivada de ordem um, como no cálculo de ordem inteira. Estende-se o conceito de derivada fracionária compatível para uma ordem $\alpha$, sendo $n<\alpha\leq n+1$, com $n\in\mathbb{N}$ desde que a função $f$ seja $n-$diferenciável em $t$, com $t>0$. Também recente é a formulação de Katugampola [82] que satisfaz as propriedades da derivada de ordem inteira, similar à derivada compatível. Em recentes trabalhos discutiu-se a chamada $M$-formulação [83] e a $\mathcal{V}$-formulação [84] que generalizam várias das chamadas derivadas compatíveis e suas modificações.

Enquanto, no segundo grupo citamos a formulação proposta por Caputo-Fabrizio [56]. Essa formulação considera o núcleo da integral fracionária uma função não singular. A partir dessa formulação, emergem várias outras, todas elas com núcleo não singular[4]. Também recente é a formulação proposta por Yang et al. [86] envolvendo uma integral cujo núcleo é ainda uma função não singular, em particular uma função exponencial. Yang-Tenreiro Machado [63] propuseram um novo operador associado à derivada cuja ordem é variável, com o intuito de descrever

[4]Uma lista atualizada pode ser encontrada na referência [85], onde é discutida a equação de Harry Dym fracionária.

processos de difusão anômala e Hao et al. [87] discutem modelos de relaxação e difusão com núcleos não singulares e, enfim, Gómez-Aguillar [88] apresenta o oscilador tipo Irving-Mullineux usando uma derivada fracionária cujo núcleo é uma função de Mittag-Leffler [89].

Além das definições de operadores fracionários, muitas outras de suas modificações e generalizações foram usadas na literatura e podem ser encontradas no livro [9]. Hoje, existe um grande número de operadores, associados ao cálculo fracionário de uma e várias variáveis, que preservam as propriedades de memória de modo diferente. Outros operadores associados ao cálculo fracionário, dentre eles aquele de Hadamard e suas generalizações, que vamos discutir a seguir, podem ser encontrados em [9, 35, 90]. Vamos abordar, também, as chamadas derivadas fracionárias no sentido de Caputo-Fabrizio [56] e suas variações, devido a importância de terem um núcleo não singular.

Enfim, a seguir, apresentamos as derivadas de Hadamard e de Caputo-Fabrizio com suas generalizações. Depois de validarmos, conforme critério a ser discutido na Seção 5.1, a caracterização de derivada fracionária, discutimos duas aplicações, uma do ponto de vista estritamente matemático e outra do ponto de vista físico.

### 4.1. Derivadas de Hadamard e suas variações

As derivadas de Hadamard e suas variações diferem das demais por conterem um logaritmo no núcleo. Essa derivada fracionária é invariante em relação à dilatação em todo o eixo [91]. Antes de apresentarmos o conceito de derivada de Hadamard e suas possíveis variações, primeiro vamos introduzir a respectiva integral de Hadamard, visto ser esse conceito necessário para introduzir a derivada de Hadamard e no sentido de Caputo-Hadamard [35], bem como a integral fracionária generalizada a fim de apresentar as variações da derivada de Hadamard.

#### 4.1.1. Integral de Hadamard

Em analogia às derivadas fracionárias no sentido de Riemann-Liouville e de Caputo, as quais são apresentadas a partir da integral de Riemann-Liouville, aqui, introduzimos a integral de Hadamard visando as respectivas derivadas de Hadamard e suas variações.

Definição. Considere $\varphi \in L^p(a,b)$, $1 \le p \le \infty$ e $0 < a < b < \infty$. Sejam $\alpha \in \mathbb{C}$ com $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ e $(a,b)$ um intervalo limitado ou ilimitado do semieixo $\mathbb{R}^+$. A integral fracionária de Hadamard, à esquerda, é definida por

$$(\mathcal{J}^{\alpha}_{a^+}\varphi)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\ln \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \varphi(t)\, \frac{\mathrm{d}t}{t}, \qquad (11)$$

onde $x > a$ e $n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1$.

#### 4.1.2. Integral generalizada

A integral fracionária generalizada foi introduzida em [82], de forma a generalizar as integrais fracionárias de Riemann-Liouville e de Hadamard. Tal definição é fundamental para introduzir o conceito da derivada generalizada e da derivada generalizada com uma modificação do tipo Caputo.

Definição. Considere $\varphi \in X^p_c(a,b)$, $c \in \mathbb{R}$, $1 \le p \le \infty$ e $-\infty < a < b < \infty$. Sejam $\alpha \in \mathbb{C}$ com $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ e $\alpha \neq \mathbb{N}$; e $[a,b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ um intervalo finito do eixo $\mathbb{R}$ e $\rho > 0$. A integral fracionária generalizada, à esquerda, é definida por

$$({}^{\rho}\mathcal{J}^{\alpha}_{a^+}\varphi)(x) := \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{t^{\rho-1}\,\varphi(t)}{(x^{\rho}-t^{\rho})^{1-\alpha}} \mathrm{d}t, \qquad (12)$$

onde $x > a$ e $n = [\mathrm{Re}(\alpha)]+1$. Nos limites $\rho \to 1$ e $\rho \to 0^+$ recuperamos, como casos particulares, as integrais de Riemann-Liouville e de Hadamard, respectivamente.

#### 4.1.3. Derivada de Hadamard

Nesta seção introduzimos a derivada fracionária conforme proposta por Hadamard em [92]. O conceito desta derivada, em analogia à derivada fracionária no sentido de Riemann-Liouville, equivale à derivada de ordem inteira de uma integral de ordem arbitrária.

Definição. Considere $\varphi \in AC^n_{\delta}[a,b]$, $0 < a < b < \infty$. Sejam $\alpha \in \mathbb{C}$ com $\mathrm{Re}(\alpha) \ge 0$ e $\alpha \neq n$ com $n \in \mathbb{N}$; e $(a,b)$ um intervalo limitado ou ilimitado do semieixo $\mathbb{R}^+$. A derivada fracionária de Hadamard, à esquerda, é definida por

$$\begin{aligned}(\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}\varphi)(x) &:= \delta^n(\mathcal{J}^{n-\alpha}_{a^+}\varphi)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n \int_a^x \left(\ln\frac{x}{t}\right)^{n-\alpha-1} \varphi(t)\,\frac{\mathrm{d}t}{t},\end{aligned}$$

onde $x > a$, $\delta = \left(x\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)$ e $\mathcal{J}^{n-\alpha}_{a^+}$ é a integral de Hadamard de ordem $(n-\alpha)$, conforme Eq.(11).

No caso em que $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$, obtemos

$$(\mathcal{D}^{n}_{a^+}\varphi)(x) = \delta^n\varphi(x).$$

Em particular, se $\alpha = 0$, temos

$$(\mathcal{D}^{0}_{a^+}\varphi)(x) = \varphi(x),$$

isto é, recuperamos a função.

#### 4.1.4. Derivada no sentido de Caputo-Hadamard

Recentemente, foi introduzida uma nova formulação para a derivada fracionária [70], onde o mesmo argumento para introduzir a derivada de Caputo é utilizado. Para esta derivada é proposta uma modificação do tipo Caputo na derivada de Hadamard, isto é, obtendo a, assim chamada, derivada no sentido de Caputo-Hadamard. Ressalte-se que, uma modificação do tipo Caputo quer dizer que introduzimos o operador de diferenciação no integrando da integração fracionária, ou seja, permutamos a ordem das operações diferenciação e integração.

Definição. Considere $\varphi \in AC^n_\delta[a,b]$, $0 < a < b < \infty$. Sejam $\alpha \in \mathbb{C}$ com $\mathrm{Re}(\alpha) \geq 0$ e $\alpha \neq n$ com $n \in \mathbb{N}$. A derivada fracionária no sentido de Caputo-Hadamard, à esquerda, é definida por

$$({}^C\mathcal{D}^\alpha_{a+}\varphi)(x) := (\mathcal{J}^{n-\alpha}_{a+}\delta^n\varphi)(x)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \left(\ln\frac{x}{t}\right)^{n-\alpha-1}\left(t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n \varphi(t)\,\frac{\mathrm{d}t}{t},$$

onde $x > a$, $n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1$ e $\delta = \left(t\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)$.

No caso em que $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$, obtemos

$$({}^C\mathcal{D}^n_{a+}\varphi)(x) = \delta^n\varphi(x).$$

Em particular, se $\alpha = 0$, temos

$$({}^C\mathcal{D}^0_{a+}\varphi)(x) = \varphi(x),$$

isto é, recuperamos a função.

### 4.1.5. Derivada generalizada

Também recente é o trabalho [93] onde a chamada derivada fracionária generalizada que contém como casos limites as derivadas conforme propostas por Riemann-Liouville e Hadamard é discutida.

Definição. Considere $\varphi \in X^p_c(a,b)$, $c \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$, $0 \leq a \leq b \leq \infty$. Sejam $\alpha \in \mathbb{C}$ com $\mathrm{Re}(\alpha) \geq 0$ e $\alpha \neq \mathbb{N}$; e $\rho \in \mathbb{R}$ tal que $\rho > 0$. A derivada fracionária generalizada, à esquerda, é definida por

$$({}^\rho\mathcal{D}^\alpha_{a+}\varphi)(x) := \delta^n_\rho({}^\rho\mathcal{J}^{n-\alpha}_{a+}\varphi)(x)$$
$$= \frac{\rho^{1-n+\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)}\left(x^{1-\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n\int_a^x \frac{t^{\rho-1}\,\varphi(t)}{(x^\rho - t^\rho)^{1-n+\alpha}}\mathrm{d}t,$$

onde $x > a$, $n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1$ e ${}^\rho\mathcal{J}^{n-\alpha}_{a+}$ é a integral generalizada, conforme Eq.(12), de ordem $(n-\alpha)$. Ressaltamos que, nos limites $\rho \to 1$ e $\rho \to 0^+$ recuperamos, como casos particulares, as derivadas conforme formuladas por Riemann-Liouville e Hadamard, respectivamente.

No caso em que $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$, obtemos

$$({}^\rho\mathcal{D}^n_{a+}\varphi)(x) = \delta^n_\rho\varphi(x).$$

Em particular, para $\alpha = 0$, temos

$$({}^\rho\mathcal{D}^0_{a+}\varphi)(x) = \varphi(x)$$

isto é, recuperamos a função.

### 4.1.6. Derivada generalizada com uma modificação do tipo Caputo

Aqui, introduzimos um novo operador de diferenciação de ordem arbitrária [90], a partir de uma modificação do tipo Caputo na derivada fracionária generalizada. Este novo operador de diferenciação admite como casos particulares as derivadas de ordem arbitrária conforme propostas por Caputo e Caputo-Hadamard. Tanto a integral quanto a derivada fracionárias generalizadas são definidas para $\alpha \in \mathbb{C}$, porém, aqui, restringimos nosso operador ao caso $\alpha \in \mathbb{R}$ com $\alpha > 0$ e $\alpha \neq \mathbb{N}$.

Definição. Considere $\varphi \in X^p_c(a,b)$, $c \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$, $0 \leq a \leq b \leq \infty$. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\rho > 0$. A derivada generalizada com uma modificação do tipo Caputo, à esquerda, é definida, para $0 < a < x < b < \infty$, por

$$({}^\rho_*\mathcal{D}^\alpha_{a+}\varphi)(x) := ({}^\rho\mathcal{J}^{n-\alpha}_{a+}\delta^n_\rho\varphi)(x) \tag{13}$$
$$= \frac{\rho^{1-n+\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{t^{\rho-1}}{(x^\rho - t^\rho)^{1-n+\alpha}} \times \left(t^{1-\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n \varphi(t)\,\mathrm{d}t. \tag{14}$$

desde que a integral exista.

Em particular, se $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$, então

$$({}^\rho_*\mathcal{D}^n_{a+}\varphi)(x) = \delta^n_\rho\varphi(x).$$

No caso em que $\alpha = 0$, temos

$$({}^\rho_*\mathcal{D}^0_{a+}\varphi)(x) = \varphi(x),$$

isto é, recuperamos a função.

Nos casos em que, $\rho \to 1$ e $\rho \to 0^+$, na Eq.(14), recuperamos, como casos particulares, as derivadas de Caputo e de Caputo-Hadamard, respectivamente.

Ressalte-se que, em uma recente publicação [94] essa formulação é chamada de derivada de Caputo-Katugampola, onde os autores discutem teoremas de existência e unicidade.

## 4.2. Derivada de Caputo-Fabrizio e variações

Começamos essa seção mencionando que a derivada fracionária, conforme formulada por Caputo-Fabrizio [56] não satisfaz o critério que vamos discutir na próxima seção, relativo à aceitação para uma derivada poder ser considerada fracionária. É importante mencionar que, apesar disso, essa formulação encontra recentes aplicações [95], bem como a discussão do circuito $RL$ em série, conforme Seção 6.

Aqui, introduzimos a derivada fracionária no sentido de Caputo-Fabrizio, a assim chamada derivada fracionária no tempo, cujo núcleo é não singular, para as quais foram apresentadas várias propriedades, bem como a respectiva transformada de Laplace [56].

Definição. (Derivada fracionária no tempo). Sejam $0 \leq \alpha \leq 1$, $-\infty \leq a < t$ e $f \in H^1(a,b)$ com $b > a$. A derivada fracionária no tempo é dada por

$$\mathscr{D}_t^{(\alpha)} f(t) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^t \dot{f}(\tau) \exp\left[-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\tau)\right] \mathrm{d}\tau \qquad (15)$$

onde $M(\alpha)$ é uma função de normalização tal que $M(0) = 1 = M(1)$ e $\dot{f}$ denota a derivada de ordem um.

Note que, em analogia à derivada de Caputo, Eq.(3), a derivada fracionária no tempo de uma constante é igual a zero. Ainda mais, o núcleo é não singular em $t = \tau$, contrariamente à derivada de Caputo, Eq.(3).

Introduzindo a notação $\sigma = (1-\alpha)/\alpha$ com $0 \le \sigma < \infty$, podemos escrever a Eq.(15) como

$$\tilde{\mathscr{D}}_t^{(\alpha)} f(t) = \frac{N(\sigma)}{\sigma} \int_a^t \dot{f}(\tau) \exp\left[-\frac{1}{\sigma}(t-\tau)\right] \mathrm{d}\tau, \qquad (16)$$

onde $N(\sigma)$ é uma função de normalização tal que $N(0) = 1 = N(\infty)$.

Considerando as normalizações $M(0) = 1 = M(1)$ e $N(0) = 1 = N(\infty)$ e tomando $\alpha \to 0$ ($\sigma \to \infty$) e $\alpha \to 1$ ($\sigma \to 0$) nas Eq.(15) e Eq.(16), obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha\to 0} \mathscr{D}_t^{(\alpha)} f(t) &= \lim_{\alpha\to 0} \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^t \dot{f}(\tau) \exp\left[-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\tau)\right] \mathrm{d}\tau \\ &= \lim_{\sigma\to\infty} \frac{N(\sigma)}{\sigma} \int_a^t \dot{f}(\tau) \exp\left[-\frac{1}{\sigma}(t-\tau)\right] \mathrm{d}\tau \\ &= f(t) - f(a) \end{aligned} \qquad (17)$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha\to 1} \mathscr{D}_t^{(\alpha)} f(t) &= \lim_{\alpha\to 1} \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^t \dot{f}(\tau) \exp\left[-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\tau)\right] \mathrm{d}\tau \\ &= \lim_{\sigma\to 0} \frac{N(\sigma)}{\sigma} \int_a^t \dot{f}(\tau) \exp\left[-\frac{1}{\sigma}(t-\tau)\right] \mathrm{d}\tau \\ &= \dot{f}(t). \end{aligned}$$

Ressalte-se que, para obtenção dos resultados anteriores, fizemos uso da relação

$$\lim_{\mu\to 0} \left\{ \frac{1}{\mu} \exp\left[-\frac{1}{\mu}(t-\tau)\right] \right\} = \delta(t-\tau).$$

Ainda mais, conforme Eq.(17), fica claro que, no limite $\alpha \to 0$, a função original não é recuperada, o que ocorre somente se $f(a) = 0$ [96], recuperando, assim, os casos envolvendo a derivada de ordem inteira.

No esteio do trabalho de Caputo-Fabrizio [56], Losada-Nieto [57] introduziram a correspondente integral fracionária

$${}^{CF}I^{\alpha} f(t) = (1-\alpha) f(t) + \alpha \int_0^t f(s)\, \mathrm{d}s, \qquad t \ge 0 \quad (18)$$

com $0 \le \alpha \le 1$, associada à derivada fracionária no tempo, bem como estudaram algumas propriedades visando a resolução de uma equação diferencial fracionária, via transformada de Laplace e, portanto, consideraram o extremo inferior, $a = 0$, na expressão para a derivada fracionária no tempo. Ainda mais, propuseram a expressão $M(\alpha) = 2/(2-\alpha)$ com $0 \le \alpha \le 1$ de modo que a derivada fracionária no tempo, conforme proposta por Caputo-Fabrizio [56], fosse reformulada, adquirindo a seguinte forma

$$\mathscr{D}_t^{(\alpha)} f(t) = \frac{1}{1-\alpha} \int_0^t \dot{f}(\tau) \exp\left[-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\tau)\right] \mathrm{d}\tau \qquad (19)$$

com $0 < \alpha < 1$ e $\dot{f}$ denota a derivada primeira.

Recentemente, como uma aplicação, Atangana [97], utilizando a definição da derivada fracionária no tempo, conforme proposta por Caputo-Fabrizio [56] e modificada por Losada-Nieto [57], discute a equação diferencial de Fisher [98].

Também recente é o trabalho de Yang et al. [86] onde é proposta uma nova derivada, também com núcleo não singular, agora, do tipo de Riemann-Liouville, contrariamente às duas formulações de Caputo-Fabrizio [56] e Losada-Nieto [57], visto que essas duas são extensões da derivada fracionária de Caputo. Com essa derivada, como uma aplicação, discutem uma equação diferencial fracionária associada ao problema de fluxo de calor.

**Definição.** Sejam $a \le x$ e $\nu$ tal que $0 < \nu < 1$. A derivada fracionária no tempo do tipo Riemann-Liouville é dada por

$$D_{a^+}^{(\alpha)} f(t) = \frac{R(\alpha)}{1-\alpha} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_a^t f(\xi) \exp\left[-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\xi)\right] \mathrm{d}\xi \qquad (20)$$

sendo $R(0) = 1 = R(1)$.

Ainda, com núcleo não singular e usando o fato de que a função de Mittag-Leffler [89] generaliza a função exponencial, Atangana-Baleanu [99] introduziram duas derivadas fracionárias, uma no sentido de Caputo e a outra no sentido de Riemann-Liouville, as chamadas derivadas com núcleo não local.

Definição. Sejam $f \in H^1(a,b)$, $b > a$ e $0 \leq \alpha \leq 1$. A derivada fracionária com núcleo não local do tipo Caputo é dada por

$$ {}^{ABC}{}_aD_t^\alpha f(t) = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\int_a^t \dot{f}(\tau)E_\alpha\left[-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\tau)^\alpha\right]\mathrm{d}\tau \tag{21} $$

onde $E_\alpha(\cdot)$ é uma função de Mittag-Leffler e $B(\alpha)$ é o análogo ao fator de normalização da derivada de Caputo-Fabrizio.

Note que, quando $\alpha = 0$, não recuperamos a função original exceto quando a função, calculada no extremo inferior da integral, é zero, isto é, $f(a) = 0$.

Definição. Sejam $f \in H^1(a,b)$, $b > a$ e $0 \leq \alpha \leq 1$. A derivada fracionária com núcleo não local do tipo Riemann-Liouville é dada por

$$ {}^{ABRL}{}_aD_t^\alpha f(t) = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^t f(\tau)E_\alpha\left[-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\tau)^\alpha\right]\mathrm{d}\tau \tag{22} $$

com $E_\alpha(\cdot)$ e $B(\alpha)$ dados como acima.

Enfim, mencionamos a chamada derivada fracionária de Riemann-Liouville estendida, conforme introduzida por Agarwal et al. [100].

Definição. Sejam $\mathrm{Re}(\nu) \geq 0$ e $m \in \mathbb{N}$ o menor inteiro maior que $\mathrm{Re}(\nu)$ de modo que $m - 1 \leq \mathrm{Re}(\nu) < m$. A derivada fracionária de Riemann-Liouville estendida é dada por

$$ \begin{aligned} D_x^{\nu,p;\kappa,\mu} f(x) &= \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left\{\frac{1}{\Gamma(m-\nu)}\int_0^x (x-\xi)^{m-\nu-1}\right. \\ &\left.\times f(\xi)\,{}_1F_1\left(\alpha;\beta;-\frac{p\,x^{\kappa+\mu}}{\xi^\kappa(x-\xi)^\mu}\right)\mathrm{d}\xi\right\} \end{aligned} \tag{23} $$

sendo $\mathrm{Re}(p) > 0$, $\mathrm{Re}(\kappa) > 0$ e $\mathrm{Re}(\mu) > 0$ e ${}_1F_1(a;b;x)$ a função hipergeométrica confluente [101].

Quando $p = 0$, obtemos a clássica derivada fracionária de Riemann-Liouville, conforme Eq.(2).

Em resumo, conforme já mencionado, são várias as formulações da derivada fracionária. Após o trabalho de Capelas de Oliveira-Tenreiro Machado [55], várias outras formulações apareceram na literatura, cada uma com a sua particularidade, dentre elas destacamos: a derivada fracionária no tempo tipo Caputo, Eq.(15); a derivada fracionária no tempo (reformulada) tipo Caputo, Eq.(19); a derivada fracionária no tempo tipo Riemann-Liouville, Eq.(20); a derivada fracionária com núcleo não local tipo Caputo, Eq.(21); a derivada fracionária com núcleo não local tipo Riemann-Liouville, Eq.(22), a derivada fracionária de Riemann-Liouville estendida, Eq.(23), dentre outras mais recentes [80, 83, 84].

## 5. Validade das derivadas

Como já mencionamos, existe um número grande de definições envolvendo o conceito de derivada fracionária [55], e uma pergunta natural que surge é saber se todas podem ser consideradas, realmente, como derivadas fracionárias. Para tal, no início, logo após o primeiro congresso dedicado exclusivamente ao cálculo fracionário, em 1974, Ross [3] sugere um critério, baseado em cinco propriedades, a fim de caracterizar uma derivada de ordem não inteira no sentido estrito da palavra, isto é, um critério que pudesse discernir se uma particular derivada pode ser considerada de ordem não inteira. Apenas para mencionar, as derivadas de ordem não inteira, conforme propostas por Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov e Caputo satisfazem as cinco propriedades e, portanto, são consideradas derivadas de ordem não inteira, conforme esse critério.

Recente, como já mencionado, Ortigueira-Tenreiro Machado [61] propuseram um novo critério visando uma maneira de saber se uma particular derivada pode ser considerada no sentido fracionário. Esse critério difere um pouco daquele conforme proposto por Ross [3], pois envolve, também, a regra de Leibniz na versão fracionária. Como no critério anterior, as derivadas conforme propostas por Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov e Caputo satisfazem as cinco propriedades e, portanto, são consideradas derivadas de ordem não inteira, também neste novo critério.

Aqui, nesta seção, vamos recuperar o critério proposto por **Ortigueira-Tenreiro Machado [61]**, a fim de testá-lo nas formulações, conforme anteriormente apresentadas, dentre elas: a formulação de Grünwald-Letnikov, a formulação de Hilfer, que contém como casos particulares do parâmetro, associado à ordem da derivada fracionária, as formulações de Riemann-Liouville e de Caputo, bem como, para um particular valor do extremo de integração, a formulação de Weyl. É importante ressaltar que existem formulações que, mesmo não satisfazendo a esse critério, desempenham papel importante na resolução de problemas, por exemplo, advindos da física em questão, como é o caso do oscilador harmônico cuja derivada é expressa em termos da formulação conforme proposta por Caputo-Fabrizio [56] e que será usada para discutir o circuito $RL$ em série.

### 5.1. Critério para uma derivada ser fracionária

Em 1975 Ross [3] propôs um critério, contendo cinco itens, que um operador deve cumprir para que este seja considerado uma derivada fracionária e quarenta anos depois, em 2015, Ortigueira-Tenreiro Machado [61] propuseram uma reformulação desse critério, também, composto por cinco itens. Aqui, optamos pelo critério conforme proposto em [61] visto que é mais restritivo. Vamos apresentar esse critério a fim de mostrar que as derivadas conforme propostas por Riemann-Liouville, Caputo, Grünwald-Letnikov e Hilfer, podem ser consideradas derivadas fracionárias, visto satisfazerem o critério, enquanto a formulação proposta por Caputo-Fabrizio não satisfaz esse critério.

Tendo em vista que operadores lineares que satisfazem a clássica regra de Leibniz, a saber,

$$D^\alpha(f(x)g(x)) = (D^\alpha f(x))g(x) + f(x)D^\alpha g(x),$$

não são derivadas fracionárias, uma vez que para essa regra ser satisfeita a ordem $\alpha$ da derivada fracionária coincide com diferenciação de ordem igual a um [102], Ortigueira-Tenreiro Machado [61] apresentam o seguinte critério[5] para uma derivada ser considerada fracionária:

1. A derivada fracionária é um operador linear;
2. A derivada de ordem zero de uma função é a própria função, $D^0 f(x) = f(x)$;
3. A derivação fracionária, quando a ordem é um inteiro, deve produzir o mesmo resultado da derivação ordinária;
4. A lei dos expoentes $D^\alpha D^\beta f(x) = D^{\alpha+\beta} f(x)$ é satisfeita para $\alpha < 0$ e $\beta < 0$;
5. Vale a regra de Leibniz generalizada
$$D^\alpha(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} D^k f(x) D^{\alpha-k} g(x),$$
com $\displaystyle\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-k+1)k!}$.

Vamos começar mostrando que a derivada fracionária no sentido de Grünwald-Letnikov pode ser considerada uma derivada fracionária. Visto que a derivada conforme proposta por Hilfer, contém como casos particulares as formulações de Riemann-Liouville e Caputo, para casos particulares do parâmetro da derivada e a derivada de Weyl, obtida através de um particular valor do extremo da integral, discutimos apenas a formulação de Hilfer, para, enfim, discutir a formulação conforme proposta por Caputo-Fabrizio.

### 5.2. Derivada de Grünwald-Letnikov

Mostramos que a derivada de Grünwald-Letnikov, conforme definida pela Eq.(7), satisfaz os cinco itens do critério proposto em Ortigueira-Tenreiro Machado [61].

#### 5.2.1. Linearidade

Sejam $f$ e $g$ funções reais de variáveis reais, $a$ e $b$ escalares, assim

$$\begin{aligned}
&D^\alpha[af+bg](x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} \\
&\times [af+bg](x-kh) \\
&= a\left(\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x-kh)\right) \\
&+ b\left(\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} g(x-kh)\right) \\
&= aD^\alpha f(x) + bD^\alpha g(x).
\end{aligned}$$

Portanto, a derivada de Grünwald-Letnikov é um operador linear.

#### 5.2.2. Derivada de ordem zero

A derivada de Grünwald-Letnikov de ordem zero de uma função é a própria função. De fato, substituindo $\alpha = 0$, temos

$$D^0 f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^0} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{0}{k} f(x-kh).$$

Observemos que o coeficiente binomial $\binom{0}{k}$ só será diferente de zero quando $k = 0$ e, nesse caso, vale um. Portanto,

$$D^0 f(x) = \lim_{h\to 0} f(x-kh) = f(x).$$

#### 5.2.3. Derivada de ordem inteira

Como já mencionamos, a derivada de Grünwald-Letnikov está baseada na generalização da diferenciação, conforme Eq.(7), portanto quando a ordem é $n \in \mathbb{N}$ produz o mesmo resultado da derivação ordinária. Para mostrar que a derivada de Grünwald-Letnikov quando a ordem é um inteiro negativo produz o mesmo resultado da $n$-ésima integração precisamos primeiro considerar o seguinte resultado.

Lema 5.1. Sejam $\alpha \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$ então

$$\frac{(-\alpha)_n}{n!} = (-1)^n \binom{\alpha}{n}, \tag{24}$$

sendo $(\alpha)_n = (\alpha)(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1) = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}$ o símbolo de Pochhammer [103].

Quando a ordem da derivada é um inteiro negativo, ou seja, $\alpha = -n$ com $n \in \mathbb{N}$ temos, a partir da Eq.(7),

$$D^{-n} f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{-n}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-n}{k} f(x-kh)$$

e pela Eq.(24) podemos escrever

$$\begin{aligned}
D^{-n} f(x) &= \lim_{h\to 0} h^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n)_k}{k!} f(x-kh) \\
&= \lim_{h\to 0} h^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(n)k!} f(x-kh).
\end{aligned}$$

Rearranjando a equação anterior, considerando $m = kh$, e admitindo que essa série converge uniformemente obtemos

$$D^{-n} f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \lim_{h\to 0} h^n \frac{\Gamma(n+\frac{m}{h})}{\Gamma(n)\Gamma(\frac{m}{h}+1)} f(x-m).$$

[5] Para a apresentação desse critério usamos a notação $D^\alpha$ para representar uma derivada fracionária qualquer de ordem $\alpha$.

 DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2017-0213

Usando a relação [61] $\lim_{h\to 0}\frac{\Gamma(n+\frac{m}{h})}{\Gamma(\frac{m}{h}+1)} = \left(\frac{m}{h}\right)^{n-1}$, temos

$$\begin{aligned} D^{-n}f(x) &= \lim_{h\to 0} h^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\frac{m}{h})^{n-1}}{\Gamma(n)} f(x-m) \\ &= \lim_{h\to 0} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m^{n-1}}{\Gamma(n)} f(x-m)h. \end{aligned}$$

Considerando $\lim_{h\to 0} h = \mathrm{d}t$, obtemos

$$D^{-n}f(x) = \int_0^{\infty} \frac{f(x-t)t^{n-1}}{\Gamma(n)} \mathrm{d}t,$$

que é a $n$-ésima integral de $f$ de acordo com a fórmula de integrais iteradas de Cauchy. E, portanto, quando a ordem é um inteiro negativo temos que a derivada de Grünwald-Letnikov produz o mesmo resultado da $n$-ésima integração de $f$.

### 5.2.4. Lei dos expoentes

Vamos mostrar que para $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ quaisquer vale a relação $D^{\alpha}D^{\beta}f(x) = D^{\alpha+\beta}f(x)$, para isso usamos a relação [65],

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{m-n}\binom{\beta}{n} = \binom{\alpha+\beta}{m}. \tag{25}$$

Pela Eq.(7) temos $D^{\beta}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\beta}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{\beta}{n}f(x-nh)$. Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} D^{\alpha}D^{\beta}f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} \\ \times \left[\frac{1}{h^{\beta}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{\beta}{n} f(x-kh-nh)\right]. \end{aligned}$$

Considerando a mudança de variável $k = m - n$ no primeiro somatório e a Eq.(25) obtemos,

$$\begin{aligned} D^{\alpha}D^{\beta}f(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\alpha+\beta}}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m-n}\binom{\alpha}{m-n}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{\beta}{n}f(x-mh)\right] \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\alpha+\beta}}\sum_{m=0}^{\infty}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{m-n}\binom{\beta}{n}\right](-1)^m f(x-mh) \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\alpha+\beta}}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{\alpha+\beta}{m}(-1)^m f(x-mh) = D^{\alpha+\beta}f(x), \end{aligned}$$

que é o resultado desejado.

### 5.2.5. Regra de Leibniz generalizada

Vamos, primeiro, considerar um resultado que será importante para mostrar que a derivada de Grünwald-Letnikov satisfaz à generalização da regra de Leibniz, a saber:
Lema 5.2. Se $\alpha \in \mathbb{C}$ e $k, i \in \mathbb{N}$ então

$$\binom{k+i}{i}\binom{\alpha}{k+i} = \binom{\alpha}{i}\binom{\alpha-i}{k}. \tag{26}$$

Vamos, agora, mostrar que a derivada de Grünwald-Letnikov satisfaz à generalização da regra de Leibniz. Sejam $f$ e $g$ funções reais de variáveis reais, então pela Eq.(7) e para $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\left(\Delta_h^n f\right)(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}f(x-kh)$$

e, portanto, $f(x-kh) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\left(\Delta_h^i f\right)(x)$.

Assim,

$$\begin{aligned} \left(\Delta_h^{\alpha} fg\right)(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha}{k}f(x-kh)g(x-kh) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha}{k}g(x-kh)\left[\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\left(\Delta_h^i f\right)(x)\right] \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\left(\Delta_h^i f\right)(x)\sum_{k=i}^{\infty}(-1)^k\binom{k}{i}\binom{\alpha}{k}g(x-kh). \end{aligned}$$

Considerando a mudança $k \to k - i$ temos,

$$\left(\Delta_h^\alpha fg\right)(x) = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \left(\Delta_h^i f\right)(x) \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+i}\binom{k+i}{i}\binom{\alpha}{k+i} g(x-(k+i)h).$$

Utilizando a Eq.(26) podemos escrever

$$\begin{aligned}\left(\Delta_h^\alpha fg\right)(x) &= \sum_{i=0}^{\infty}\left(\Delta_h^i f\right)(x)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha}{i}\binom{\alpha-i}{k} g(x-(k+i)h)\\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\binom{\alpha}{i}\left(\Delta_h^i f\right)(x)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha-i}{k} g(x-(k+i)h).\end{aligned}$$

Pela Eq.(7) e considerando a convergência uniforme da série temos

$$\begin{aligned}D^\alpha(fg)(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\Delta_h^\alpha gf\right)(x)}{h^\alpha}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^\alpha}\sum_{i=0}^{\infty}\binom{\alpha}{i}\left(\Delta_h^i f\right)(x)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha-i}{k} g(x-(k+i)h)\\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\binom{\alpha}{i}\left[\lim_{h\to 0}\frac{\left(\Delta_h^i f\right)(x)}{h^i}\right]\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\alpha-1}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha-i}{k} g(x-(k+i)h)\\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\binom{\alpha}{i} f^{(i)}(x)\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\alpha-1}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha-i}{k} g(x-kh)\\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\binom{\alpha}{i} f^{(i)}(x) D^{\alpha-i}g(x),\end{aligned}$$

portanto, vale a generalizaçao da regra de Leibniz.

### 5.3. Derivada de Hilfer

Como já mencionado, ao mostrarmos que a derivada de Hilfer satisfaz os cinco itens do critério proposto em [61] estamos, também, mostrando que as derivadas de Weyl, obtida por um particular valor do extremo da integral; de Riemann-Liouville e de Caputo, obtidas para particulares valores da ordem da derivada, satisfazem esse critério uma vez que essas derivadas são recuperadas através de valores apropriados para $a$ e $\mu$ na derivada de Hilfer.

#### 5.3.1. Linearidade

Para mostrarmos que a derivada de Hilfer é um operador linear, vamos primeiro mostrar que a integral fracionária é um operador linear.
Lema 5.3. A integral fracionária é um operador linear.
Demonstração. Sejam $f$ e $g$ funções reais de variáveis reais, $\beta$ e $\gamma$ constantes, assim

$$\begin{aligned}\left[J_{a+}^\mu(\beta f+\gamma g)\right](x) &= \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_a^x \frac{(\beta f+\gamma g)(t)}{(x-t)^{1-\mu}}\mathrm{d}t\\ &= \frac{\beta}{\Gamma(\mu)}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\mu}}\mathrm{d}t + \frac{\gamma}{\Gamma(\mu)}\int_a^x \frac{g(t)}{(x-t)^{1-\mu}}\mathrm{d}t\\ &= \beta\left(J_{a+}^\mu f\right)(x) + \gamma\left(J_{a+}^\mu g\right)(x),\end{aligned}$$

para $x > a$ e $Re(\mu) > 0$, portanto a integral fracionária é um operador linear.

Considerando que tanto a derivação de ordem um quanto a integral fracionária são operadores lineares, mostramos que a derivada de Hilfer é um operador linear. Sejam $f$ e $g$ funções reais de variáveis reais, $\beta$ e $\gamma$ constantes, $0 < \alpha < 1$ e $0 \leq \mu \leq 1$.

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned}
D^{\alpha,\mu}_{a\pm}(\beta f+\gamma g)(x) &= \left[\pm J^{\mu(1-\alpha)}_{a\pm}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(J^{(1-\mu)(1-\alpha)}_{a\pm}\right)(\beta f+\gamma g)\right](x)\\
&= \pm J^{\mu(1-\alpha)}_{a\pm}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\beta J^{(1-\mu)(1-\alpha)}_{a\pm}f(x)+\gamma J^{(1-\mu)(1-\alpha)}_{a\pm}g(x)\right)\\
&= \pm J^{\mu(1-\alpha)}_{a\pm}\left(\beta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}J^{(1-\mu)(1-\alpha)}_{a\pm}f(x)+\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}J^{(1-\mu)(1-\alpha)}_{a\pm}g(x)\right)\\
&= \beta\left[\pm J^{\mu(1-\alpha)}_{a\pm}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(J^{(1-\mu)(1-\alpha)}_{a\pm}\right)f\right](x)+\\
&\quad\ \gamma\left[\pm J^{\mu(1-\alpha)}_{a\pm}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(J^{(1-\mu)(1-\alpha)}_{a\pm}\right)g\right](x)\\
&= \beta D^{\alpha,\mu}_{a\pm}\beta f(x)+\gamma D^{\alpha,\mu}_{a\pm}\beta g(x).
\end{aligned}$$

### 5.3.2. Derivada de ordem zero

Vamos mostrar que a derivada de Hilfer de ordem zero de uma função é a própria função. De fato, tomando o limite $\alpha\to 0$, temos

$$\lim_{\alpha\to 0} D^{\alpha,\mu}_{a+}f(x)=\left[J^{\mu}_{a+}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(J^{(1-\mu)}_{a+}\right)f\right](x)=\left[J^{\mu}_{a+}\left(J^{-\mu}_{a+}\right)f\right](x)=J^0 f(x)=f(x).$$

### 5.3.3. Lei dos expoentes

Mostrar que a lei dos expoentes é sastisfeita para $\alpha<0$ e $\beta<0$ é o mesmo que mostrar que a integral fracionária satisfaz essa propriedade para $\alpha>0$ e $\beta>0$. Conforme já mencionamos isso ocorre, assim para provar que $I^{\alpha}_{a\pm}I^{\beta}_{a\pm}=I^{\alpha+\beta}_{a\pm}$ vamos considerar alguns lemas. Para uma demonstração usando a fórmula de Dirichlet ver [4].

Lema 5.4. A integral frácionaria à esquerda possui a propriedade

$$J^{\beta}_{a+}f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(t)(t-a)^{n+\beta}}{\Gamma(n+\beta+1)}\binom{-\beta}{n} \tag{27}$$

para $t>a$ e $\beta\in\mathbb{C}$ com $\mathrm{Re}(\beta)>0$ [103].

Lema 5.5. A integral fracionária à esquerda de um produto de duas funções é dada por

$$J^{\beta}_{a+}(fg)(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\beta}{k}f^{(k)}(t)J^{k+\beta}_{a+}g(t) \tag{28}$$

para $t>a$ e $\beta\in\mathbb{C}$ com $\mathrm{Re}(\beta)>0$ [103].

Agora vamos mostrar que a integral fracionária satisfaz a lei dos expoentes, isso é,

$$\left[J^{\gamma}_{a+}\left(J^{\beta}_{a+}f\right)\right](t)=J^{\gamma+\beta}_{a+}f(t).$$

Usando a Eq.(27) temos

$$\left[J^{\gamma}_{a+}\left(J^{\beta}_{a+}f\right)\right](t) = J^{\gamma}_{a+}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(t)(t-a)^{n+\beta}}{\Gamma(n+\beta+1)}\binom{-\beta}{n}\right],$$

considerando agora a Eq.(28) podemos escrever,

$$\begin{aligned}
\left[J^{\gamma}_{a+}\left(J^{\beta}_{a+}f\right)\right](t) &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\beta}{n}\binom{-\gamma}{k}\frac{f^{(n+k)}(t)J^{k+\gamma}_{a+}[(t-a)^{\beta+n}]}{\Gamma(n+\beta+1)}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\beta}{n}\binom{-\gamma}{k}\frac{f^{(n+k)}(t)}{\Gamma(n+\beta+1)}\frac{(t-a)^{\beta+n+k+\gamma}\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\beta+1+k+\gamma)}.
\end{aligned}$$

Introduzindo a mudança $k\to k-n$ temos

$$\left[J^{\gamma}_{a+}\left(J^{\beta}_{a+}f\right)\right](t) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\beta}{n}\binom{-\gamma}{k-n}f^{(k)}(t)\frac{(t-a)^{\beta+\gamma+k}}{\Gamma(\beta+\gamma+1+k)}.$$

Pelas Eq.(25) e Eq.(27) obtemos o resultado desejado,

$$\left[J_{a+}^{\gamma}\left(J_{a+}^{\beta}f\right)\right](t)=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\beta-\gamma}{k}f^{(k)}(t)\frac{(t-a)^{\beta+\gamma+k}}{\Gamma(\beta+\gamma+1+k)}=J_{a+}^{\beta+\gamma}f(t). \tag{29}$$

### 5.3.4. Derivada de ordem inteira

Como a derivada de ordem $n$ com $n\in\mathbb{N}$ é a inversa à esquerda da $n$-ésima integração, ou seja, $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}J_{a+}^{n}f(x)=f(x)$, para mostrar que a derivada de Hilfer recupera a derivação ordinária quando a ordem é um inteiro positivo, vamos mostrar que $D_{a+}^{n,\mu}J_{a+}^{n}f(x)=f(x)$. Assim, admitindo que vale a lei dos expoentes temos

$$\begin{aligned}
D_{a+}^{n,\mu}J_{a+}^{n}f(x) &= \left[J_{a+}^{\mu(1-n)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(J_{a+}^{(1-\mu)(1-n)}\right)\right]J_{a+}^{n}f(x)\\
&= J_{a+}^{\mu(1-n)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(J_{a+}^{(1-\mu)(1-n)}\right)J_{a+}^{n}f(x)\right]\\
&= J_{a+}^{\mu(1-n)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(J_{a+}^{(1-\mu)(1-n)+n}\right)f(x)\\
&= J_{a+}^{\mu(1-n)}\left(J_{a+}^{(1-\mu)(1-n)+n-1}\right)f(x)\\
&= J_{a+}^{0}f(x)=f(x).
\end{aligned}$$

### 5.3.5. Regra de Leibniz generalizada

Agora, nessa seção, vamos obter uma expressão para a derivada de Hilfer do produto de duas funções. Sejam $\alpha$ e $\mu$, respectivamente, a ordem e o tipo da derivada de Hilfer, com $0<\alpha<1$ e $0\le\beta\le 1$. Podemos escrever a derivada de Hilfer em termos da derivada de Caputo, denotada por ${}_*D_{a\pm}^{\nu}$, i.e., para $0<\alpha\mu-\mu+1<1$ temos,

$$D_{a\pm}^{\alpha,\mu}f(t)=J_{a\pm}^{1-(\alpha\mu-\mu+1)}DJ_{a\pm}^{(1-\mu)(1-\alpha)}f(t)={}_*D_{a\pm}^{\alpha\mu-\mu+1}J_{a\pm}^{(1-\mu)(1-\alpha)}f(t).$$

Utilizando a Eq.(28) podemos escrever

$$D_{a\pm}^{\alpha,\mu}(fg)(t)={}_*D_{a\pm}^{\alpha\mu-\mu+1}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-(1-\mu)(1-\alpha)}{k}f^{(k)}(t)J_{a+}^{k+(1-\mu)(1-\alpha)}g(t)\right].$$

Por outro lado, como a derivada de Caputo é um operador linear obtemos,

$$D_{a\pm}^{\alpha,\mu}(fg)(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-(1-\mu)(1-\alpha)}{k}{}_*D_{a\pm}^{\alpha\mu-\mu+1}\left[f^{(k)}(t)J_{a+}^{k+(1-\mu)(1-\alpha)}g(t)\right].$$

Considerando a regra de Leibniz para a derivada de Caputo [104], a saber,

$${}_*D^{\alpha}(fg)(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}{}_*D^{k}f(t){}_*D^{\alpha-k}g(t)+g(a)(f(t)-f(a))\frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)},$$

podemos reescrever a equação anterior na seguinte forma

$$\begin{aligned}
D_{a\pm}^{\alpha,\mu}(fg)(t) &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-(1-\mu)(1-\alpha)}{k}\cdot\\
&\cdot\left[\sum_{s=0}^{\infty}\binom{\alpha\mu-\mu+1}{s}f^{(k+s)}(t){}_*D_{a\pm}^{\alpha\mu-\mu+1-s}J_{a\pm}^{k+(1-\mu)(1-\alpha)}g(t)\right]\\
&+\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-(1-\mu)(1-\alpha)}{k}J_{a\pm}^{k+(1-\mu)(1-\alpha)}\cdot\\
&\cdot\ g(a)\left(f^{(k)}(t)-f^{(k)}(a)\right)\frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(\mu-\alpha\mu)}.
\end{aligned}$$

Considerando a mudança $k = m - s$ temos,

$$\begin{aligned} D^{\alpha,\mu}_{a\pm}(fg)(t) &= \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-(1-\mu)(1-\alpha)}{m-s}\binom{\alpha\mu-\mu+1}{s}f^{(m)}(t)\cdot \\ &\cdot\ {}_{*}D^{\alpha\mu-\mu+1-s}_{a\pm}J^{m-s+(1-\mu)(1-\alpha)}_{a\pm}g(t)+ \\ &+\ \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-(1-\mu)(1-\alpha)}{k}J^{k+(1-\mu)(1-\alpha)}_{a\pm}\cdot \qquad (30)\\ &\cdot\ g(a)(f^{(k)}(t)-f^{(k)}(a))\frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(\mu-\alpha\mu)}. \qquad (31)\end{aligned}$$

Observemos que para $s \in \mathbb{N}$ e $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathbb{R}$ entre 0 e 1 temos,

$$_{*}D^{\bar{\alpha}-s}_{a\pm}J^{\bar{\beta}-s}_{a\pm} = J^{1-s-(\bar{\alpha}-s)}_{a\pm}D^{1-s}J^{\bar{\beta}-s}_{a\pm} = J^{1-\bar{\alpha}}_{a\pm}D^{1}D^{-s}J^{-s}_{a\pm}J^{\bar{\beta}}_{a\pm} = J^{1-\bar{\alpha}}_{a\pm}D^{1}J^{\bar{\beta}}_{a\pm}. \qquad (32)$$

Tomando $\bar{\alpha} = \alpha\mu - \mu + 1$ e $\bar{\beta} = m + (1-\mu)(1-\alpha)$ na Eq.(32) obtemos

$$\begin{aligned} {}_{*}D^{\alpha\mu-\mu+1-s}_{a\pm}J^{m+(1-\mu)(1-\alpha)-s}_{a\pm} &= J^{\mu-\alpha\mu}_{a\pm}D^{1}J^{m+(1-\mu)(1-\alpha)}_{a\pm} \\ &= J^{\mu(1-\alpha)}_{a\pm}D^{1}J^{(1-\mu)(1-\alpha)}_{a\pm}J^{m}_{a\pm} \\ &= D^{\alpha,\mu}_{a\pm}J^{m}_{a\pm} \\ &= D^{\alpha-m,\mu}_{a\pm}. \qquad (33)\end{aligned}$$

Assim, pelas Eq.(30) e Eq.(33) temos

$$\begin{aligned} D^{\alpha,\mu}_{a\pm}(fg)(t) &= \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-(1-\mu)(1-\alpha)}{m-s}\binom{\alpha\mu-\mu+1}{s}f^{(m)}(t)D^{\alpha-m,\mu}_{a\pm}g(t) \\ &+\ \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-(1-\mu)(1-\alpha)}{k}J^{k+(1-\mu)(1-\alpha)}_{a\pm}\cdot \\ &\cdot\ g(a)(f^{(k)}(t)-f^{(k)}(a))\frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(\mu-\alpha\mu)}.\end{aligned}$$

Usando a Eq.(25) obtemos, uma fórmula para a derivada de Hilfer do produto de duas funções, a saber,

$$\begin{aligned} D^{\alpha,\mu}_{a\pm}(fg)(t) &= \sum_{m=0}^{\infty}\binom{\alpha}{m}f^{(m)}(t)D^{\alpha-m,\mu}_{a\pm}g(t) \\ &+\ \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-(1-\mu)(1-\alpha)}{k}J^{k+(1-\mu)(1-\alpha)}_{a\pm}\cdot \\ &\cdot\ g(a)(f^{(k)}(t)-f^{(k)}(a))\frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(\mu-\alpha\mu)}. \qquad (34)\end{aligned}$$

Observemos que, se $g(a) = 0$ obtemos exatamente a forma da regra de Leibniz, conforme o critério proposto por Ortigueira-Tenreiro Machado [61].

### 5.4. Derivada de Caputo-Fabrizio

Aqui, vamos mostrar que a derivada fracionária no sentido de Caputo-Fabrizio, apesar de ser considerada uma derivada fracionária, não satisfaz todos os itens associados ao critério conforme proposto por Ortigueira-Tenreiro Machado [61], a saber, a lei dos expoentes. Ainda assim, como vamos ver em uma das aplicações, dentre outras já mencionadas, pode ser usada como fracionária, no sentido que recupera o caso inteiro.

#### 5.4.1. Lei dos expoentes

Nessa seção, mostramos que a integral fracionária de Caputo-Fabrizio não satisfaz a lei dos expoentes, para quaisquer valores de $\alpha$ e $\beta$. De fato, podemos escrever

$$\begin{aligned}
I^\alpha J^\beta f(t) &= (1-\alpha)J^\beta f(t) + \alpha \int_0^t J^\beta f(s)\mathrm{d}s \\
&= (1-\alpha)(1-\beta)f(t) + (1-\alpha)\beta \int_0^t f(s)\mathrm{d}s + \\
&\quad \alpha \int_0^t \left[(1-\beta)f(s) + \beta \int_0^s f(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}s \\
&= (1-\alpha)(1-\beta)f(t) + (\beta+\alpha-2\alpha\beta)\int_0^t f(s)\mathrm{d}s + \\
&\quad \alpha\beta \int_0^t \int_0^s f(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s \\
&= (1-\alpha-\beta)f(t) + (\beta+\alpha)\int_0^t f(s)\mathrm{d}s + \\
&\quad \alpha\beta\left[f(t) + \int_0^t\int_0^s f(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s - 2\int_0^t f(s)\mathrm{d}s\right] \\
&= J^{\alpha+\beta}f(t) + \alpha\beta\left[f(t) + \int_0^t (t-s)f(s)\mathrm{d}s - 2\int_0^t f(s)\mathrm{d}s\right] \\
&= J^{\alpha+\beta}f(t) + \alpha\beta\left[f(t) + \int_0^t (t-s-2)f(s)\mathrm{d}s\right].
\end{aligned}$$

Em geral, $J^\alpha J^\beta f(t) \neq J^{\alpha+\beta}f(t)$, exceto quando $\alpha$ ou $\beta$ é zero ou $f$ é identicamente nula. Assim, não vale a lei dos expoentes para a derivada fracionária de Caputo-Fabrizio.

## 6. Aplicações

Nessa seção, começamos discutindo o que se entende por efeito de memória e não localidade para, depois, apresentar duas aplicações envolvendo as derivadas fracionárias. Primeiramente, a partir da derivada fracionária do tipo Caputo, a chamada derivada generalizada com uma modificação do tipo Caputo [90], discutimos uma generalização do teorema fundamental do cálculo e, utilizando a formulação de Caputo-Fabrizio, discutimos o circuito $RL$ (resistor-indutor) em série. Nas duas aplicações, recuperamos os resultados clássicos, isto é, no caso de termos a derivada de ordem inteira.

### 6.1. Efeito de Memória

Antes de apresentarmos as aplicações propriamente ditas, vamos discorrer sobre o que se entende por efeito de memória e não localidade, através de um simples problema de valor inicial utilizando a metodologia da transformada de Laplace.

Para simplificar, vamos especificar uma derivada temporal. É conveniente lembrar que quando foi introduzido o conceito de derivada de ordem não inteira, em particular, nos sentidos de Caputo e de Riemann-Liouville, dependentes de uma integral, que se inicia na particular escolha do instante inicial e vai até o presente, temos caracterizado um operador não local e que preserva o chamado efeito de memória. Ainda mais, fenômenos não locais não são descritos apenas por parâmetros dinâmicos, por exemplo, espaço e tempo, daí inserirmos um parâmetro, em princípio, arbitrário na ordem da derivada a fim de associá-lo com a não localidade do operador.

Considere a equação diferencial fracionária

$$\frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}t^\alpha}x(t) = f(x) \tag{35}$$

com $x \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$, um típico problema de relaxação, ou $1 < \alpha < 2$, um típico problema de oscilações, com condições iniciais, por exemplo, na forma $x(0) = 0$, no caso de relaxação e $x(0) = 0$ e $x'(0) = a$ sendo $a$ uma constante, no caso de oscilações. Ainda mais, seja $f(x)$ uma função contínua com a discussão apenas para o caso de relaxação.

A solução da Eq.(35), obtida a partir da transformada de Laplace, é dada pela integral

$$x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{36}$$

cujo núcleo (singular) é exatamente como na Eq.(1).

Consideremos, agora, $0 < t_1 < t_2 < t$ de modo que podemos escrever

$$x(t_2) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_2} (t_2-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

e

$$x(t_1) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1 - \tau)^{\alpha-1} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

cuja diferença $x(t_2) - x(t_1)$ pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} x(t_2) - x(t_1) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} [(t_2 - \tau)^{\alpha-1} - (t_1 - \tau)^{\alpha-1}] \\ &\times \ f(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \\ & \ \ \ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - \tau)^{\alpha-1} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

Da expressão conlui-se que: a primeira integral envolve valores anteriores a $t_1$, enquanto a segunda, apenas valores entre $t_1$ e $t_2$. Para valores de $\alpha = 1$ (caso inteiro) apenas a segunda integral contribui, ou seja, podemos afirmar que equações de ordem inteira modelam sistemas sem memória. Por outro lado, $0 < \alpha \neq 1$, as duas integrais contribuem, logo equações de ordem não inteira modelam sistemas com memória, isto é, um efeito de memória associado à primeira integral, dependendo de valores anteriores a $t_1$.

Pode-se afirmar que é possível interpretar os resultados advindos do cálculo fracionário como um refinamento do cálculo de ordem inteira, daí a importância de se introduzir uma derivada de ordem não inteira.

Em relação às aplicações envolvendo diversas formas de se apresentar a derivada de ordem não inteira, citamos os recentes trabalhos: para o problema de difusão, mencionamos a recente dissertação de mestrado [105], onde o autor faz um paralelo entre as difusões normal e anômala, discutindo os formalismos e apresentando aplicações, fazendo uso das derivadas de Riemann-Liouville e Caputo. Por outro, a equação de Schrödinger fracionária foi estudada e discutida com a derivada de Riesz, também numa dissertação de mestrado [106,107]. Enfim, visto que a viscoelasticidade estuda o comportamento de materiais com características elásticas e de viscosidade, quando submetidos a forças de deformação, os modelos descrevem a relação entre as quantidades tensão e deformação, ambas funções do tempo, as chamadas relações constitutivas. Utilizando as derivadas de Caputo e Riemann-Liouville, discutiu-se as relações constitutivas fracionárias [54]. Ainda mais, é recente o estudo de um fluido de Maxwell fracionário com uma derivada do tipo Caputo-Fabrizio, isto é, com núcleo não singular, aqui também, a partir de relações constitutivas fracionárias [108].

### 6.2. Teorema fundamental

O teorema fundamental do cálculo funde os conceitos de integral e derivada. São várias as extensões do conceito de derivada fracionária visando a demonstração de uma generalização do teorema fundamental do cálculo [91,109]. Aqui, a fim de apresentar uma aplicação do ponto de vista estritamente matemático, apresentamos uma generalização do teorema fundamental do cálculo associado à derivada generalizada com uma modificação do tipo Caputo [90].

**Teorema 6.1.** Sejam $\alpha, \rho \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha > 0$ e $\rho > 0$ com $n = [\alpha]+1$. Consideremos $\mathrm{AC}\,^n_\delta[a,b]$ o espaço das funções que possuem $n-1$ derivadas contínuas em $[a,b]$ tal que $\varphi^{(n-1)}(x) \in \mathrm{AC}\,[a,b]$, isto é,

$$\mathrm{AC}\,^n_\delta[a,b] = \Big\{ \varphi : [a,b] \to \mathbb{R} : \delta_\rho^{n-1}\varphi(x) \in \mathrm{AC}\,[a,b], \delta_\rho = \left( x^{1-\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) \Big\}.$$

(a) Se $\alpha \notin \mathbb{N}$ ou $\alpha \in \mathbb{N}$ e $\Phi(x) = ({}^\rho\mathcal{J}^\alpha_{a^+}\varphi)(x)$, $\forall x \in [a,b]$, obtemos

$$({}^\rho_*\mathcal{D}^\alpha_{a^+}\Phi)(x) = \varphi(x). \tag{37}$$

(b) Se $({}^\rho\mathcal{J}^{n-\alpha}_{a^+}\varphi)(x) \in \mathrm{AC}\,^n_\delta[a,b]$, então

$$\begin{aligned} ({}^\rho\mathcal{J}^\alpha_{a^+}\, {}^\rho_*\mathcal{D}^\alpha_{a^+}\Phi)(x) &= \varphi(x) \\ &- \sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{\delta_\rho^k\,\varphi(a)}{k!}\left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^k. \end{aligned} \tag{38}$$

No caso em que $0 < \alpha < 1$, temos

$$({}^\rho_a\mathcal{J}^\alpha_b\, {}^\rho_*\mathcal{D}^\alpha_{a^+}\Phi)(x) = \Phi(x) - \Phi(a). \tag{39}$$

Demonstração.

(a) Utilizando o resultado, $({}^\rho_*\mathcal{D}^\alpha_{a^+}\, {}^\rho\mathcal{J}^\alpha_{a^+}\varphi)(x) = \varphi(x)$, demonstrado em [90], segue imediatamente a Eq.(37).

(b) Seja $\alpha \notin \mathbb{N}$. A partir da definição, Eq.(13), podemos escrever

$$\begin{aligned} ({}^\rho\mathcal{J}^\alpha_{a^+}\, {}^\rho_*\mathcal{D}^\alpha_{a^+}\Phi)(x) &= ({}^\rho\mathcal{J}^\alpha_{a^+}\, {}^\rho\mathcal{J}^{n-\alpha}_{a^+}\, \delta^n_\rho\,\Phi)(x) \\ &= ({}^\rho\mathcal{J}^n_{a^+}\, \delta^n_\rho\,\Phi)(x), \end{aligned}$$

e com o uso do seguinte resultado,

$$({}^\rho\mathcal{J}^n_{a^+}\delta^n_\rho\varphi)(x) = \varphi(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\delta_\rho^k\,\varphi(a)}{k!}\left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^k.$$

também demonstrado em [90], segue a Eq.(38). Em particular, no caso em que $0 < \alpha < 1$, temos

$$\begin{aligned} ({}^\rho\mathcal{J}^\alpha_{a^+}\, \delta^\alpha_\rho\,\Phi)(x) &= \int_a^x t^{\rho-1}\left(t^{1-\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\Phi(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_a^x \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(t)\right)\mathrm{d}t = \Phi(x) - \Phi(a), \end{aligned}$$

e, se $\alpha = 1$, obtemos

$$({}^\rho_a\mathcal{J}^1_b\, {}^\rho_*\mathcal{D}^1_{a^+}\Phi)(x) = \int_a^b \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(t)\right)\mathrm{d}t = \Phi(b) - \Phi(a).$$

### 6.3. Circuito $RL$

Utilizando a derivada fracionária no sentido de Caputo-Fabrizio, a chamada derivada fracionária no tempo do tipo Caputo, discutimos o circuito $RL$ (resistor-indutor) em série. A fim de efetuarmos uma comparação, resolvemos o mesmo problema com a formulação da derivada de Caputo. Em ambos os casos, nos convenientes limites, recuperamos os resultados clássicos, isto é, a resolução do problema com a derivada de ordem inteira.

Sejam $R$ o resistor, $L$ o indutor e $E(t)$ a força eletromotriz. A equação diferencial, obtida a partir da lei de Kirchhoff, que descreve um circuito $RL$ em série, isto é, como se comporta a corrente, é dada por

$$L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I(t) + RI(t) = E(t)$$

onde $I(t)$ é a corrente. Mencionamos que, num circuito $RC$ (resistor-capacitor) em série temos uma equação similar

$$R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I(t) + \frac{1}{C}I(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t).$$

Para efeito de cálculo, vamos considerar a força eletromotriz como sendo uma constante, $E_0$, bem como utilizar a derivada fracionária no sentido de Caputo-Fabrizio [56], isto é, vamos discutir a equação diferencial fracionária

$$\frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}t^\alpha}I(t) + aI(t) = b, \tag{40}$$

onde $1/2 < \alpha < 1$ e as constantes $a = R/L$ e $b = E_0/L$, impondo a condição de corrente inicial igual a zero, $I(0) = 0$. É conveniente deixar claro que consideramos o parâmetro $\alpha$ nesse intervalo, pois podemos, também, obter uma equação diferencial para a variação da carga armazenada no capacitor o que nos leva a uma equação diferencial onde o parâmetro da derivada deve ser $1 < 2\alpha \equiv \beta < 2$.

A fim de resolver o problema, tomamos a transformada de Laplace de ambos os lados da Eq.(40), logo

$$\mathscr{L}\left[D_t^\alpha I(t)\right] + aF(s) = \frac{b}{s}$$

onde $F(s) = \int_0^\infty I(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$ é a transformada de Laplace de $I(t)$ com $\mathrm{Re}(s) > 0$ e $s$ o parâmetro da transformada de Laplace.

Utilizando a Eq.(15) com a normalização $M(\alpha) = 1$ obtemos para a transformada de Laplace da derivada fracionária de Caputo-Fabrizio [110]

$$\mathscr{L}\left[D_t^\alpha I(t)\right] = \frac{s}{\alpha + (1-\alpha)s}F(s)$$

que, substituído na equação anterior fornece uma equação algébrica na variável $F(s)$, com solução dada por

$$F(s) = \frac{b}{as + \frac{s^2}{\alpha+(1-\alpha)s}}. \tag{41}$$

A fim de recuperar a solução da equação diferencial para $I(t)$ devemos proceder com o cálculo da transformada de Laplace inversa. Utilizando frações parciais e já voltando nas variáveis de partida, podemos escrever

$$I(t) = \frac{E_0}{R}\left\{1 - \frac{\exp\left[-\dfrac{R\alpha/L}{1+R(1-\alpha)/L}t\right]}{1+R(1-\alpha)/L}\right\}. \tag{42}$$

Por outro lado, utilizando o mesmo procedimento porém, agora, com a derivada fracionária no sentido de Caputo, obtemos para a corrente

$$I(t) = \frac{E_0}{L}\,t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}\left(-\frac{R}{L}t^\alpha\right) \tag{43}$$

onde $E_{\nu,\mu}(\cdot)$ é uma função de Mittag-Leffler de dois parâmetros [4].

No caso particular em que consideramos o limite $\alpha \to 1$, tanto na Eq.(42) quanto na Eq.(43), obtemos

$$I(t) = \frac{E_0}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-Rt/L}\right) \tag{44}$$

que é o resultado obtido quando utilizamos a derivada de ordem inteira.

A fim de esboçarmos alguns gráficos para explicitar o comportamento da corrente em função do tempo, através das Eq.(42), Eq.(43) e Eq.(44), consideramos os parâmetros $a \equiv R/L = 4$ e $b \equiv E_0/R = 3$ o que acarreta $E_0/R = 3$. Ver Figura 1, Figura 2 e Figura 3 para diferentes valores do parâmetro $\alpha$,

## 7. Conclusões

Apresentamos o conceito de derivada fracionária como uma generalização do conceito de derivada de ordem inteira, a partir da integral fracionária, uma generalização do conceito de integral iterada de Cauchy. Destacamos as clássicas formulações de Riemann-Liouville (derivada de ordem inteira de uma integral fracionária), de Caputo (integral fracionária de uma derivada de ordem inteira) e de Grünwald-Letnikov (apropriada para problemas numéricos). Mencionamos a formulação da derivada de Riesz devido a sua importância na resolução de problemas onde a derivada fracionária encontra-se na variável espacial e apresentamos a formulação de Hilfer, pois comporta, como casos particulares do parâmetro, as derivadas de Riemann-Liouville e Caputo, bem como a derivada de Weyl para um particular valor do extremo de integração.

Mencionamos, também, recentes formulações da derivada fracionária, dentre elas a formulação de Katugampola e suas variações, de Hadamard e suas generalizações e de Caputo-Fabrizio e suas variações. Apresentamos a formulação da derivada de Hadamard e suas generalizações visando, nas aplicações, apresentar o chamado teorema fundamental do cálculo fracionário com a derivada generalizada com uma modificação de Caputo, generalizando o clássico teorema fundamental do cálculo.

 DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2017-0213

Apresentamos, também, a recente formulação da derivada fracionária conforme proposta por Caputo-Fabrizio e suas generalizações visando o estudo da equação diferencial fracionária associada à corrente num circuito elétrico contendo um resistor e um indutor.

A partir do critério que caracteriza uma derivada de ordem fracionária, depois de apresentado, verificamos que as formulações de Riemann-Liouville, de Caputo, como casos particulares da formulação conforme proposta por Hilfer, e de Grünwald-Letnikov, satisfazem o critério e, por isso, nesse sentido, podem ser consideradas derivadas fracionárias. Mostramos, também, que a recente formulação conforme proposta por Caputo-Fabrizio não satisfaz o critério, mas, ainda assim, pode ser considerada uma derivada fracionária no sentido de que recupera a derivada de ordem inteira quando o parâmetro associado à derivada é um número inteiro, em particular, é a unidade. Em resumo, esse trabalho, uma continuação natural do

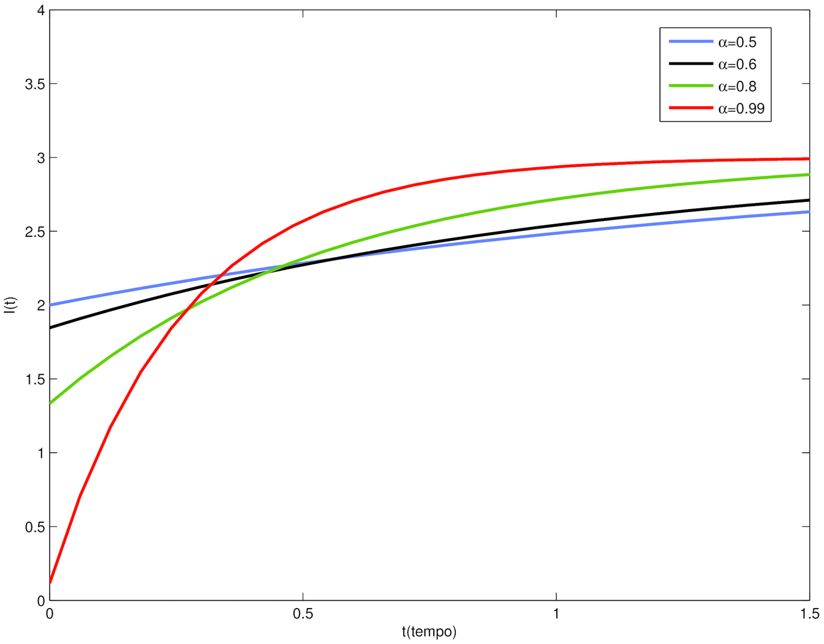


**Figura 1:** Solução da Eq.(40). Gráfico da corrente × tempo, I$(t) \times t$, conforme Eq.(42), utilizando a derivada fracionária no sentido de Caputo-Fabrizio com o parâmetro $\alpha = 0.5, 0.6, 0.8, 0.99$.

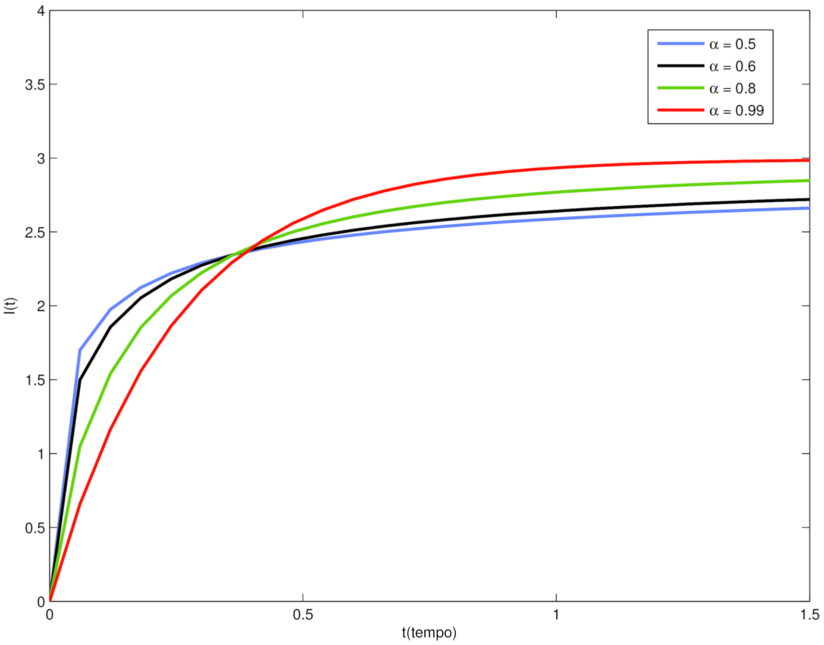


**Figura 2:** Solução da Eq.(40). Gráfico da corrente × tempo, I$(t) \times t$, conforme, Eq.(43), utilizando a derivada fracionária no sentido de Caputo com o parâmetro $\alpha = 0.5, 0.6, 0.8, 0.99$.

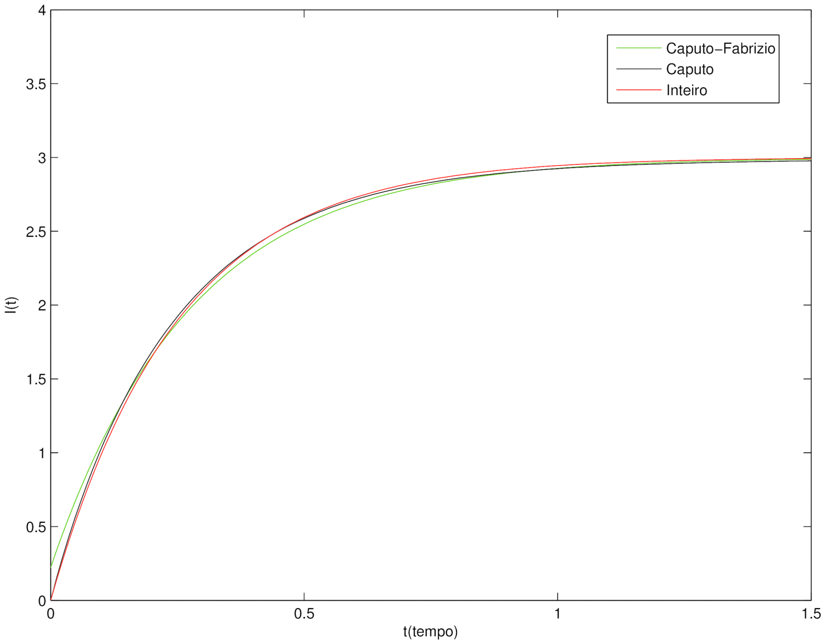


**Figura 3:** Comparação das soluções da Eq.(40), gráfico corrente $\times$ tempo, $I(t) \times t$, utilizando as derivadas fracionárias no sentido de Caputo e de Caputo-Fabrizio com o parâmetro $\alpha = 0.98$ e o caso inteiro $\alpha = 1$.

trabalho [55] apresentou as mais recentes formulações, com destaque para duas concretas aplicações do conceito de derivada fracionária, no sentido da derivada generalizada com uma modificação do tipo Caputo [90] e no sentido de Caputo-Fabrizio, a versão que deu início as derivadas fracionárias com núcleo não-singular [56].

Enfim, visto que o número de formulações da derivada fracionária, não para de crescer, concluímos, citamos a recente formulação da derivada, no sentido de Caputo, de uma função em relação a outra função [111].

### Agradecimento

Agradecemos ao Prof. Dr. J. Vaz Jr e ao Dr. J. E. Maiorino, por várias e frutíferas discussões. Um agradecimento especial vai para o referee anônimo pelas sugestões que deixaram o trabalho mais consistente, deixando a leitura mais agradável.

## Referências

[1] J. Cícero Calheiros, *O Cálculo com Enfoque Geométrico.* Dissertação de Mestrado, Imecc-Unicamp, Campinas (2016).

[2] K.B. Oldham and J. Spanier, *The Fractional Calculus* (Academic Press, New York-London, 1974).

[3] B. Ross, Lecture Notes in Mathematics **457**, 1 (1975).

[4] R. Figueiredo Camargo e E. Capelas de Oliveira, *Cálculo Fracionário* (Livraria Editora da Física, São Paulo, 2015).

[5] K.S. Miller and B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations* (John Wiley and Sons, Inc., New York, 1993).

[6] S.G. Kamath, J. Math. Phys. **33**, 934 (1991).

[7] B. Ross, Math. Mag. **50**, 115 (1970).

[8] B. Ross, Historia Mathematica **4**, 75- (1977).

[9] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications* (Gordon and Breach Science Publishers, Switzerland, 1993).

[10] L. Debnath and D. Bhatta, *Integrals Transforms and Their Applications* (Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2007), 2nd ed.

[11] M. Caputo, *Elasticità e Dissipazione* (Zanichelli, Bologna, 1969).

[12] J.A. Tenreiro Machado, F. Mainardi and V. Kiryakova, Frac. Cal. & Appl. Anal. **19**, 1074 (2016).

[13] B. Ross, (ed.), *Fractional Calculus and its Applications*, Proceedings of the International Conference, New Haven, June 1974 (Springer Verlag, New York, 1974).

[14] R.L. Bagley, *Applications of Generalized Derivatives to Viscoelasticity.* Ph.D. Thesis, Air Force Institute of Technology (1979).

[15] K. Nishimoto, *Fractional Calculus, Vol. 1, 2, 3 and 4* (Descartes Press, Koriyama, 1984).

[16] K. Nishimoto (ed.), *Fractional Calculus and its Applications*, College of Engineering, Nihon University, Japan (1990).

[17] M. Caputo, *Lectures on Seismology and Rheological Tectonics* (Univ. degli Studi di Roma, La Sapienza, 1993).

[18] V.S. Kiryakova, *Generalized Fractional Calculus and Applications* Pitman Research Notes in Math., Número 301, Longman, Harlow, (1994).

[19] B. Rubin, *Fractional Integrals and Potentials, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, Vol. 82* (Longman, Harlow, 1996).

[20] R. Hilfer (ed.), *Applications of Fractional Calculus in Physics* (World Scientific Publishing, New York, 2000).

[21] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations, Mathematics in Science and Engineering, Vol. 198* (Academic Press, San Diego, 1999).

 DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2017-0213

[22] B.J. West, M. Bologna and P. Grigolini, *Physics of Fractal Operators* (Springer-Verlag, New York and Berlin, 2003).

[23] G.M. Zaslavsky, *Chaos and Fractional Dynamics, Vol. 511, Lect. Notes in Phys.* (Oxford University Press, Oxford, 2005).

[24] F. Mainardi, Chaos, Solitons and Fractals **9**, 1461 (1996).

[25] R. Gorenflo, in: *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics, Vol. 378 of CISM Courses and Lectures*, edited by A. Carpinteri and F. Mainardi (Springer-Verlag, Berlin, 1997), p. 277-290.

[26] A. Carpinteri and F. Mainardi (eds), *Fractal and Fractional Calculus in Continuum Mechanics* (Springer Verlag, Viena, 1997).

[27] C.F. Lorenzo and T.T. Hartley, *Initialization, Conceptualization, and Application in the Generalized Fractional Calculus*, NASA/TP-1998-208415 (1998).

[28] J. Tenreiro Machado, Fract. Cal. & Appl. Anal. **6**, 73 (2003).

[29] K.S. Fa and K.G. Wang, Phys. Rev. E. **82**, 012101 (2010).

[30] A.S. Martinez, R.S. Gonzáles and A.L. Espíndola, Physica A **388**, 2922 (2009).

[31] S. Umarov, C. Tsallis, M. Gell-Mann and S. Steinberg, J. Math. Phys. **51**, 033502 (2010).

[32] L.C. Malacarne, R.S. Mendes, I.T. Pedron and E.K. Lenzi, Phys. Rev. E **63**, 030101(R) (2001).

[33] E.K. Lenzi, R.S. Mendes, L.C. Malacarne and I.T. Pedron,Physica A **319**, 245 (2003).

[34] I.T. Pedron and R.S. Mendes, Rev. Bras. Ens. Fis. **27**, 251 (2005).

[35] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations,* **204** (Elsevier, Amsterdam, 2006).

[36] R.L. Magin, *Fractional Calculus in Bioengineering* (Begell House Publishers, New York, 2006).

[37] J. Sabatier, O.P. Agrawal and J.A. Tenreiro Machado, *Advances in Fractional Calculus: Theoretical Developments and Applications in Physics and Engeneering* (Springer, New York, 2007).

[38] R. Caponetto, G. Dongola, L. Fortuna and I. Petras, *Fractional Order Systems: Modelling and Control Applications*, World Scientific Series on Nonlinear Science, (Series Editor: Leon O Chua), Serie A, Vol. 72, (2010).

[39] F. Mainardi, *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity. An Introduction to Mathematical Models* (Imperial College, Londres, 2010).

[40] J. Tenreiro Machado, V. Kiryakova and F. Mainardi, Comm. Nonl. Sci. Num. Simul. **16**, 1140 (2011).

[41] N. Laskin, Phys. Lett. A **268**, 298- (2000).

[42] M. Naber, J. Math. Phys. **45**, 3339 (2004).

[43] S. Wang, M. Xu and X. Li, Nonlinear Anal. Real World Applications **10**, 1081 (2009).

[44] H. Ertik, D. Demirhan, H. Şirin and F. Büyükkiliç, J. Math. Phys. **51**, 082102 (2010).

[45] R. Figueiredo Camargo, A.O. Chiacchio, R. Charnet and E. Capelas de Oliveira, J. Math. Phys. **50**, 063507 (2009).

[46] R. Figueiredo. Camargo, Ary O. Chiacchio and E. Capelas de Oliveira, J. Math. Phys. **49**, 033505 (2008).

[47] A.L. Soubhia, R. Figueiredo Camargo, E. Capelas de Oliveira and J. Vaz Jr., Fract. Cal. & Appl. anal. **13**, 9 (2010).

[48] R. Figueiredo Camargo, *Cálculo Fracionário e Aplicações.* Tese de Doutorado, Imecc-Unicamp (2009).

[49] F. Silva Costa, *Sobre as Funções de Fox e Aplicações.* Tese de Doutorado, Imeec-Unicamp, Campinas (2011).

[50] E. Contharteze Grigoletto, *Equações Diferenciais Fracionárias e as Funções de Mittag-Leffler.* Tese de Doutorado, Imeec-Unicamp, Campinas (2014).

[51] F. Grangeiro Rodrigues, *Sobre as Derivadas Fracionárias.* Tese de Doutorado, Imeec-Unicamp, Campinas (2015).

[52] A.R. Gómez Plata, *Equações Diferenciais Fracionárias Não Lineares.* Tese de Doutorado, Imeec-Unicamp, Campinas (2016).

[53] J.C.A. Soares, *Cálculo Fracionário e as Equações de Evolução.* Tese de Doutorado, Imeec-Unicamp, Campinas (2016).

[54] F.G. Rodrigues e E. Capelas de Oliveira, Rev. Bras. Ens. Fis. **37**, 1 (2015).

[55] E. Capelas de Oliveira and J.A. Tenreiro Machado, Math. Prob. Ing., **2014**, 238459 (2014).

[56] M. Caputo and M. Fabrizio, Prog. Fract. Differ. Appl. **1**, 73 (2015).

[57] J. Losada and J.J. Nieto, Prog. Fract. Differ. Appl. **1**, 87 (2015).

[58] Y. Chen, Y. Yan and K. Zhang, J. Math. Anal. Appl. **362**, 17 (2010).

[59] V.E. Tarasov, Int. J. Appl. Comp. Math. **2**, 195 (2016).

[60] R. Almeida and D.F.M. Torres, Comp. & Math. Appl. **61**, 3097 (2011).

[61] M.D. Ortigueira and J.A. Tenreiro Machado, J. Comput. Phys. **293**, 4 (2015).

[62] R. Figueiredo Camargo, E. Capelas de Oliveira and J. Vaz Jr., J. Math. Phys. **50**, 123518 (2009).

[63] Xiao-J Yang and J.A. Tenreiro Machado, arXiv:1611.09200v1[cond-mat.stat-mech] (2016).

[64] R. Hermann, *Fractional Calculus: An Introduction for Physicists* (World Scientific, New Jersey, 2011).

[65] M.D. Ortigueira, *Fractional Calculus for Scientists and Engineers* (Springer, Berlin-Heidelberg, 2011).

[66] C. Li and W. Deng, Appl. Math. Comput. **187**, 777 (2007).

[67] I. Podlubny, Frac. Cal. Appl. Anal. **5**, 367 (2002).

[68] J.A. Tenreiro Machado, F. Mainardi and V. Kiryakova, Fract. Cal. & Appl. Anal. **18**, 495 (2015).

[69] D. Baleanu, K. Diethelm, E. Scalas and J.J. Trujillo, *Fractional Calculus, Models and Numerical Methods, Series on Complexity, Nonlinearity and Chaos, Volume 3* (World Scientific, New Jersey, 2012).

[70] F. Jarad, T. Abdeljawad and D. Baleanu, Abst. & Appl. Anal. **2012**, ID890395 (2012).

[71] M. Riesz, *L'integral de Riemann-Liouville et le probleme de Cauchy*, **81**, 1 (1949).

[72] E. Capelas de Oliveira, F. Silva Costa and J. Vaz Jr., J. Math. Phys. **51**, 123517 (2010).

[73] E. Capelas de Oliveira and J. Vaz Jr., J. Phys. A **44**, 185303 (2011).

[74] S.S. Bayin, J. Math. Phys. **57**, 123501 (2016).

[75] J.A. Tenreiro Machado, Commun. Nonl. Sci. Num. Simul. **14**, 3492 (2009).

[76] R. Garra, R. Gorenflo, F. Polito and Z. Tomovski, arXiv:1401.6668v2 [math.PR], (2014).

[77] M.D. Qassim, K.M. Furati and N.-E. Tatar, Abst. Appl. Anal. **2012**, 391062 (2012).

[78] J.A. Tenreiro Machado, V. Kiryakova and F. Mainardi, Fract. Cal. & Appl. Anal. **13**, 329 (2010).
[79] J.A. Tenreiro Machado, V. Kiryakova and F. Mainardi, Fract. Cal. & Appl. Anal. **13**, 447 (2010).
[80] J. Vanterler da Costa and E. Capelas de Oliveira, arXiv:1704.08186v2 [math.CA] (2017).
[81] R. Khalil, M. al Horani, A. Yousef and M. Sababheh, J. Comput. & Appl. Math. **264**, 65 (2014).
[82] U.D. Katugampola, ArXiv:1410.6535v1 [math.CA] (2014).
[83] J. Vanterler da Costa and E. Capelas de Oliveira, ArXiv 1704.08187 [math.CA] (2017).
[84] J. Vanterler da Costa and E. Capelas de Oliveira, ArXiv: 1705.07181 [math.CA] (2017).
[85] F. Silva Costa, J.C.S. Alves, A.R. Gómez Plata and E. Capelas de Oliveira, Comp. Appl. Math., **X**, 1 (2017).
[86] Xiao-Jun Yang, H.M. Srivastava and J.A. Tenreiro Machado, Thermal Science **20**, 753 (2016).
[87] H. Sun, X. Hao, Y. Zhang and D. Baleanu, Phys. A **468**, 590 (2017).
[88] J.F. Gómez-Aguillar, Chaos, Solitons and Fractals **95**, 179 (2017).
[89] R. Gorenflo, A.A. Kilbas, F. Mainardi and S.V. Rogosin, *Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications* (Springer Monographs in Mathematics, Springer, Heildelberg, 2014).
[90] D.S. Oliveira and E. Capelas de Oliveira, *On a Caputo-type fractional derivative*, submetido à publicação (2017).
[91] Y.Y. Gambo, F. Jarad, D. Baleanu and T. Abdeljawad, Adv. Diff. Equat. **2014**, DOI: 10.1186/1687-1847-2014-10 (2014).
[92] J. Hadamard, J. Math. Pures Appl. **8**, 101 (1892).
[93] U.N. Katugampola, Bull. Math. Anal. Appl. **6**, 1 (2014).
[94] R. Almeida, A.B. Malinowska and T. Odzijewicz, J. Comput. Nonlinear Dynam **11**, 061017 (2016).
[95] M. Saqib, F. Ali, I. Khan, N.A. Sheikh and S.A.A. Jan., submetido ao Alexandria Engineering Journal (2017).
[96] M. Caputo and M. Fabrizio, Progr. Fract. Differ. Appli. **2**, 1 (2016).
[97] A. Atangana, Appl. Math. Comput. **273**, 948 (2016).
[98] M. Alquran, K. Al Khaled, T. Sandar and J. Chattopadhyay, Phys. A Stat. Mech. Appl. **438**, 81 (2015).
[99] A. Atangana and D. Baleanu, Thermal Science **20**, 763 (2016).
[100] P. Agarwal, J. Choi and R.B. Paris, J. Nonlinear Sci. Appl. **8**, 451 (2015).
[101] E. Capelas de Oliveira, *Funções Especiais com Aplicações* (Editora Livraria da Física, São Paulo, 2012), 2ª ed.
[102] V.E. Tarasov, Commun. Nonl. Sci. Num. Simulat. **18**, 2945 (2013).
[103] G. Sales Teodoro, *Sobre Derivadas Fracionárias*. Tese de Doutorado, Imecc-Unicamp, Campinas (2017).
[104] K. Diethelm, *The Analysis of Fractional of Differential Equations* (Springer, Heidelberg, 2010).
[105] M.A.F. Santos, *Sobre Difusões Normal e Anômala – Formalismos e Aplicações*. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Maringá, Maringá (2015).
[106] S. Jarosz, *A equação de Schrödinger fracionária com potenciais delta*, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas (2016).
[107] S. Jarosz and J. Vaz Jr., J. Math. Phys. **57**, 123506 (2016).
[108] F. Gao and X.-J. Yang, Thermal Science **20**, S871 (2016).
[109] E. Contharteze Grigoletto and E. Capelas de Oliveira, Appl. Math. **4**, xxx (2013).
[110] E. Capelas de Oliveira, J. Vaz Jr. and S. Jarosz, submetido para publicação, (2017).
[111] R. Almeida, Commun. Nonl. Sci. Num. Simulat. **44**, 460 (2017).