

# Discusión de la aproximación paraxial y análisis numérico de la aberración de esfericidad

Discussion of the paraxial approximation and numerical analysis of spherical aberration

César Medina\*<sup>1</sup>, Sandra Velazco<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidad Nacional de Tucuman, Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología, San Miguel de Tucuman, Tucumán, Argentina

Recibida en 14 de Julio, 2017. Revisado en 16 de Septiembre, 2017. Aceptado en 4 de Octubre, 2017.

Los textos de óptica dirigidos al ciclo básico universitario discuten la formación de imágenes de espejos y lentes basándose en la aproximación paraxial. Este enfoque convencional adolece de ambigüedades y falencias que inducen al estudiante a errores conceptuales. En este trabajo se señalan tales ambigüedades y se demuestra que una proposición fundamental de la aproximación paraxial tiene una aplicabilidad muy limitada. Además, como recurso didáctico para superar las dificultades conceptuales, se presentan figuras de trazado de rayos y de la aberración de esfericidad, calculada con precisión en términos del error sistemático de enfoque, para puntos objeto a distancia infinita del sistema óptico, en distintos casos de espejos y lentes. Los resultados muestran que *a*) la aberración, para cada rayo, depende esencialmente de la distancia angular de su punto de incidencia, *b*) el comportamiento de la aberración es análogo en espejos y lentes, *c*) en espejos convexos y cóncavos, a igual distancia angular, los valores del error de enfoque son idénticos, *d*) la aberración varía en las lentes según su orientación.

**Palabras clave:** Aproximación Paraxial; Aberración de esfericidad; Análisis Numérico.

Textbooks intended to undergraduate students discuss image formation by mirrors and lens based on paraxial approximation. This conventional approach has ambiguities and lacks which induce students to conceptual mistakes. This paper points out those ambiguities and demonstrates that a basic proposition of paraxial approximation has a very limited scope. Furthermore, as a didactical tool to overcome conceptual difficulties, figures are presented depicting ray trajectories and spherical aberrations, computed precisely in terms of the focusing systematic error, for object points at an infinite distance from the optic system, in different cases of mirrors and lenses. Results show that *a*) the aberration for each ray depends mainly on the angular distance of its incidence point, *b*) the aberration behavior is the same in mirrors and lens, *c*) in concave and convex mirrors, for the same angular distance, focusing errors are the same, *d*) the aberration varies in lens according to their light-facing side.

**Keywords:** Paraxial Approximation; Spherical Aberration; Numerical Analysis.

## 1. Introducción

En el ciclo básico universitario de las carreras científicas y tecnológicas, la óptica geométrica es uno de los contenidos fundamentales de física experimental. Este modelo relativamente sencillo explica de manera satisfactoria los fenómenos de reflexión, refracción y dispersión, y permite implementar diversas prácticas de laboratorio donde el alumno puede analizar el comportamiento de la luz ante sistemas tales como espejos, lentes y prismas.

Gran parte de la investigación educativa sobre esta temática se ha centrado en las dificultades de aprendizaje y las preconcepciones de los estudiantes [1–3], y algunas investigaciones presentan propuestas educativas tendientes a superar los distintos núcleos de dificultad identificados [3–5].

Otra importante línea de investigación trata sobre la utilización de herramientas computacionales en la en-

señanza de la física en general [6] y de la óptica geométrica en particular [7–10]. Estos trabajos destacan la utilización de programas computacionales didácticos que proporcionan información y descripciones con la combinación de los lenguajes gráficos y de texto, entre otros. Tales recursos permiten representar entidades abstractas (líneas de campo, trayectorias luminosas, imágenes reales y virtuales) que muchas veces son difíciles de apreciar en prácticas experimentales. Por otro lado, la simulación computacional permite una enorme capacidad de cálculo y gráfica: calcular donde resulte difícil o tedioso hacerlo mediante métodos tradicionales, y simular los fenómenos donde resulte inaccesible la experimentación. Asimismo, se han desarrollado programas interactivos que permiten modificar las características del sistema óptico y representar trazados de rayos e imágenes, mostrando, entre otros aspectos, los efectos de las aberraciones en forma cualitativa [11].

\*Endereço de correspondência: cesarmedina@arnet.com.ar.

Algunos trabajos profundizan en la comprensión de contenidos de la óptica geométrica mediante desarrollos y análisis a menudo no considerados por libros destinados al ciclo básico universitario, ni aun por textos especializados: Lang da Silveira y Axt [12] analizan la importancia de considerar el rol del ojo, como sistema óptico, en la percepción de la imagen formada por una lupa; Pionório, Rodrigues y Bertuola [13] estudian la corrección de la aberración cromática mediante dobletes de lentes delgadas y gruesas, desde una perspectiva teórica y también a través de un tratamiento matemático detallado; Carlin y otros [14] analizan la validez del uso del modelo de lente delgada en la determinación experimental de la distancia focal de una lente.

En el presente trabajo, además de presentar trazados de rayos y cálculos precisos sobre la aberración de esfericidad en distintos casos de espejos y lentes, abordamos un tema que, en nuestro conocimiento, no ha sido tratado en la literatura: las condiciones de validez de la aproximación paraxial. Nuestra experiencia docente y, en particular, los resultados de distintas instancias de evaluación, indican que este tema merece ser analizado en forma rigurosa y detallada.

En efecto, las imágenes formadas por espejos y lentes no son tan ideales como predicen los modelos propuestos por los textos de uso habitual en ciclos básicos universitarios. Esas imágenes presentan ciertas discrepancias sistemáticas con respecto a las predicciones ideales, llamadas aberraciones. En particular, la aberración de esfericidad consiste en el hecho de que, para un determinado punto objeto situado sobre su eje principal, los sistemas ópticos no forman una única imagen puntual, sino una sucesión de imágenes puntuales a lo largo de cierto intervalo sobre ese eje. Esto se debe a que no todos los rayos reflejados o refractados convergen hacia el mismo punto imagen.

Así, si se coloca una pantalla perpendicular al eje óptico, en algún punto del intervalo en el que se suceden las imágenes, se verá una imagen nítida (formada por los rayos que convergen en ese plano) rodeada de un halo luminoso circular (formado por los rayos que no convergen en ese plano) cuyo contorno corresponde a la intersección con la pantalla del cono exterior de rayos provenientes del sistema óptico [15–17].

En general, los textos de uso común en el ciclo básico universitario realizan análisis parciales e incompletos de esta aberración. La discuten en términos del modelo de *rayos paraxiales*, y deducen las ecuaciones de espejos y lentes basándose en él. Sin embargo, se detecta una falta de claridad y precisión en la definición de lo que se entiende por “rayo paraxial” [18]. En nuestra experiencia docente hemos notado que esta falta de precisión induce a los estudiantes a confusiones, errores conceptuales y razonamientos equivocados.

A continuación se realizará una breve presentación y análisis crítico del modelo paraxial de reflexión y refracción utilizado por textos habituales en ciclos básicos

universitarios (en adelante nos referiremos a este modelo como *modelo convencional de reflexión y refracción*), se lo discutirá en términos físicos y de enseñanza, y finalmente se mostrarán, a modo de recurso didáctico, diagramas precisos de trazado de rayos y del error de enfoque para distintos casos de espejos y lentes.

## 2. Breve presentación del Modelo Convencional de Reflexión y Refracción

### 2.1. Supuestos y Simplificaciones

Las ecuaciones de reflexión y refracción en superficies cóncavas y convexas se deducen de un modelo geométrico que, como tal, incluye supuestos. Entre éstos cabe destacar:

*a)* Las superficies reflectantes o refringentes son esféricas (sectores o casquetes con un mismo radio de curvatura en toda su extensión).

*b)* Los rayos son *paraxiales*. Este concepto está definido en los textos de dos maneras:

1<sup>a</sup>) Son aquellos rayos incidentes que *forman ángulos pequeños con el eje óptico*

2<sup>a</sup>) Son aquellos rayos que *inciden cercanos al eje óptico*

Es común encontrar en diferentes secciones de un mismo texto ambas definiciones o caracterizaciones.

Bajo estos supuestos, el modelo aplica las leyes de reflexión y refracción, realizando ciertas aproximaciones trigonométricas, y obtiene ecuaciones independientes de las variables angulares. Estas ecuaciones relacionan las distancias objeto e imagen con parámetros relevantes del sistema, tales como las distancias focales, el radio de curvatura y los índices de refracción.

### 2.2. Geometría y Proposiciones de la Aproximación Paraxial

La desviación de los rayos de luz por superficies esféricas se puede reducir a cuatro casos: *a)* reflexión en una superficie cóncava, *b)* reflexión en una superficie convexa, *c)* refracción en una superficie cóncava, y *d)* refracción en una superficie convexa. Por brevedad, en este trabajo se analizarán sólo dos de estos casos, el primero y el último, que son los que suelen discutir los textos de óptica. La extensión a los otros dos es relativamente sencilla; el tipo de razonamiento y las conclusiones son idénticos en todos los casos.

#### 2.2.1. Reflexión en una Superficie Cóncava

La Fig. 1 presenta un diagrama típico del modelo convencional al discutir la reflexión, en una superficie cóncava, de un rayo proveniente de un punto objeto sobre el eje óptico de la misma.

En esta figura,  $EO$  representa el eje óptico;  $P$ , el punto objeto,  $P'$ , el punto imagen;  $r_i$  el rayo incidente;  $r_r$  el rayo

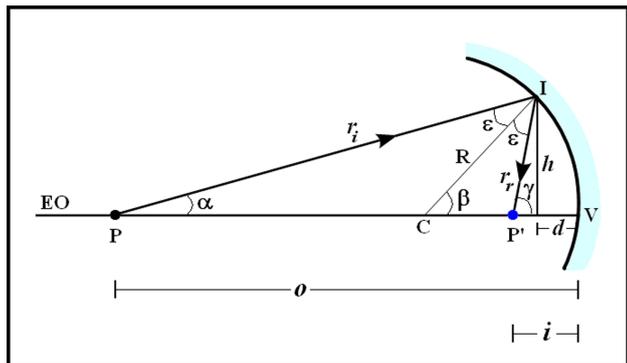


Figura 1: Reflexión en una superficie cóncava.

reflejado;  $o$ , la distancia objeto;  $i$ , la distancia imagen;  $C$ , el centro de curvatura de la superficie;  $V$ , el vértice de la superficie (punto de intersección del eje óptico con la superficie);  $I$ , el punto de incidencia;  $R$ , el radio de curvatura de la superficie;  $h$ , la altura del punto de incidencia (distancia lineal entre el eje óptico y el punto de incidencia);  $d$ , la distancia entre  $V$  y la proyección de  $I$  sobre el eje óptico;  $\alpha$ , el ángulo entre el rayo incidente y el eje óptico;  $\varepsilon$ , el ángulo de incidencia y de reflexión;  $\gamma$ , el ángulo entre el eje óptico y el rayo reflejado; y  $\beta$ , la distancia angular del punto de incidencia (ángulo entre  $I$  y  $V$ , con vértice en  $C$ ).

Este último parámetro –como se discutirá más adelante– es muy importante en el análisis de la aberración de esfericidad. En este trabajo lo llamaremos *distancia angular del punto de incidencia*, o simplemente *distancia angular*, pero es posible encontrar otra nomenclatura en la literatura, porque la terminología en óptica no está estandarizada [18].

Basado en esquemas como el de la Fig. 1, el modelo convencional señala que si  $\alpha$  es pequeño,  $\beta$  y  $\gamma$  también lo son. Luego, estos ángulos, medidos en radianes, pueden aproximarse por sus tangentes. Por su parte,  $h$  también será pequeña, y  $d$  será despreciable frente a  $R$ ,  $o$  e  $i$ .

Mediante estas simplificaciones, se deduce la ecuación de los espejos esféricos:

$$\frac{1}{o} + \frac{1}{i} = \frac{2}{R} \tag{1}$$

Esta ecuación no contiene ninguna variable angular. Los textos que presentan el modelo convencional afirman que es válida bajo la condición de que  $\alpha$  sea pequeño, pues este único requisito implicaría todas las demás condiciones necesarias en su deducción.

### 2.2.2. Refracción en una Superficie Convexa

La Fig. 2 presenta un diagrama típico del modelo convencional al discutir la refracción, en una superficie convexa, de un rayo proveniente de un punto objeto ubicado sobre el eje óptico de la misma.

En esta figura,  $\varepsilon$  y  $\varepsilon'$  representan, respectivamente, el ángulo de incidencia y el de refracción;  $r_r$ , el rayo refrac-

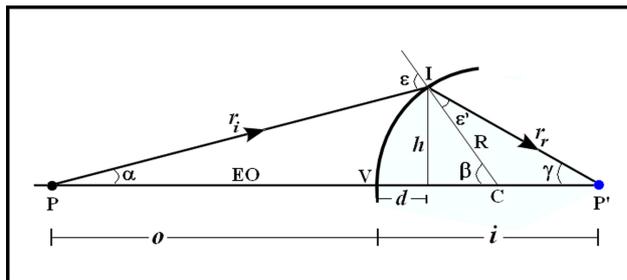


Figura 2: Refracción en una superficie convexa.

tado,  $\gamma$ , el ángulo entre el rayo refractado y eje óptico; y todos los demás parámetros tienen los significados ya definidos al comentar la Fig. 1.

El modelo convencional señala que si  $\alpha$  es pequeño,  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon'$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  también lo son. Luego, en la ley de Snell, los senos de  $\varepsilon$  y  $\varepsilon'$  pueden aproximarse por los ángulos mismos medidos en radianes, y también  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  pueden aproximarse por sus tangentes. Al igual que en el caso anterior,  $h$  será pequeño, y  $d$  será despreciable frente a  $R$ ,  $o$  e  $i$ . Mediante estas simplificaciones se deduce la ecuación para la refracción en una superficie esférica:

$$\frac{n_o}{o} + \frac{n_i}{i} = \frac{n_i - n_o}{R} \tag{2}$$

donde  $n_o$  y  $n_i$  representan los índices de refracción del medio en el que se ubican el objeto y la imagen, respectivamente. A partir de esta ecuación puede deducirse la de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{o} + \frac{1}{i} = \frac{1}{f} \tag{3}$$

donde  $f$  representa la distancia focal.

Las Ecs. (2) y (3) no contienen ninguna variable angular, y se señala que son válidas bajo la sola condición de que  $\alpha$  sea pequeño.

## 3. Breve análisis crítico del Modelo Convencional de Reflexión y Refracción

### 3.1. Limitaciones de las Superficies Esféricas

Consideramos conveniente y relevante advertir a los estudiantes que las superficies reflectoras y refringentes no necesariamente deben ser esféricas. Ésta es la forma más común por su facilidad de diseño y construcción, y tiene la ventaja de simplificar algunos esquemas geométricos y desarrollos algebraicos, pero también presenta aberraciones más notorias, en particular, la llamada, justamente, aberración de esfericidad. Existen otras superficies llamadas *asféricas* (no esféricas) cuyas aberraciones son más moderadas, especialmente la aberración de esfericidad, pero son más difíciles de diseñar y construir.

Respecto de la reflexión, cualquier estudiante está familiarizado con el hecho de que en los reflectores parabólicos

(o dicho con más propiedad, *paraboloideas*), todos los rayos que inciden paralelos al eje convergen, al menos idealmente, en un mismo punto; es decir, no tienen aberración de esfericidad para puntos objeto infinitamente alejados.

En cuanto a las lentes, existe cierta variedad de formas. Las cilíndricas y toroides, por ejemplo, son las más comunes para corregir la aberración de astigmatismo, en tanto que las elipsoides e hiperboloides se usan para disminuir la aberración de esfericidad. El estudio de estos sistemas ópticos está fuera del contexto de este trabajo. El lector interesado puede remitirse a las referencias [19] y [20].

### 3.2. Análisis Crítico de la Aproximación Paraxial

La aproximación paraxial, como toda aproximación, presenta la ventaja de una ostensible simplicidad a costa de una dada falta de precisión. La simplicidad es de índole matemática: se obtienen ecuaciones sencillas e independientes de las variables angulares. Pero existen dos problemas inherentes al modelo: *Problema 1*: Es un problema matemático. Consiste en cuantificar la falta de precisión, es decir, los errores sistemáticos introducidos por las aproximaciones trigonométricas.

*Problema 2*: Es un problema conceptual y de lógica. El mero hecho de que  $\alpha$  sea pequeño no implica que  $\beta$  y  $\gamma$  también lo sean (ni tampoco que lo sean  $\varepsilon$  y  $\varepsilon'$ , en el caso de la refracción).

A continuación discutiremos el *Problema 1*, asociado a los ángulos pequeños.

#### 3.2.1. Errores Sistemáticos de las Aproximaciones Trigonométricas

Como se mencionó al comentar las Figs. 1 y 2, en el modelo paraxial se aproximan los ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  por sus tangentes, y los senos de  $\varepsilon$  y  $\varepsilon'$ , por los ángulos mismos medidos en radianes. En caso de que estos ángulos sean mucho menores que un radián, estas aproximaciones introducen un error sistemático muy pequeño, que no es otro que el error de truncamiento de las series de Maclaurin [21]:

$$\text{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad \forall x \quad (4)$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots \quad |x| \leq \pi/2 \quad (5)$$

Luego, la aproximación paraxial, también llamada gaussiana o de primer orden, consiste en conservar sólo el primer término de los desarrollos en serie de las Ecs. (4) y (5). Los textos especializados en óptica plantean estos desarrollos en serie y discuten distintos grados de aproximación según se conserven más o menos términos, y en esto radican también diversos métodos de diseño de lentes [22–24].

Pero los textos destinados al ciclo básico, en general, no aclaran estos detalles matemáticos, y sus definiciones de

rayos paraxiales (v. sección 2.1) adolecen de ambigüedad. En cuanto a la primera definición (en adelante, la proposición de  $\alpha$  pequeño), son pocos los textos básicos que aclaran cuán pequeño debe ser  $\alpha$  para que el rayo pueda considerarse paraxial. Respecto de la segunda (en adelante, la proposición de *incidencia cercana* al eje óptico), son menos aún los textos que aclaran cuán cercano al eje óptico debe incidir el rayo. Palabras como “pequeño” o “cercano”, en física, cobran sentido sólo en términos comparativos o relativos, y es poco probable que un estudiante que ve estos temas por primera vez deduzca por sí mismo que “ $\alpha$  pequeño” significa  $\alpha \ll 1$  rad e “incidencia cercana” significa  $h \ll R$  o bien que  $\beta \ll 1$  rad (Figs. 1 y 2).

Más importante aun que la ambigüedad de las definiciones es el hecho de que ellas *no son equivalentes*. Esto atañe al *Problema 2*, que se discutirá a continuación.

#### 3.2.2. Discusión de la Proposición de $\alpha$ Pequeño

La proposición de  $\alpha$  pequeño es menos general que la de *incidencia cercana*. El hecho de que un rayo incida formando un ángulo pequeño con el eje óptico no implica necesariamente que el punto de incidencia esté cercano a dicho eje. Si la distancia objeto  $o$  es mucho mayor que el radio de curvatura  $R$  de la superficie,  $\alpha$  puede ser muy pequeño para puntos de incidencia lejanos al eje óptico, es decir, para alturas de incidencia  $h$  del orden de  $R$ , o lo que es equivalente, para distancias angulares  $\beta$  del orden o mayores que un radián. En tales casos, las ecuaciones deducidas por el modelo dejan de ser válidas, porque las aproximaciones o simplificaciones trigonométricas introducen errores muy grandes.

En la Fig. 1 se observa que  $\text{tg}(\alpha) = h/(o-d)$ . Teniendo en cuenta que  $h$  y  $d$  pueden asumir un valor máximo igual a  $R$ , en tanto que  $o$  puede ser tan grande como se quiera, se concluye que para valores suficientemente grandes de  $o$ ,  $\alpha$  puede hacerse muy pequeño, aun para puntos de incidencia que tengan  $h$  y  $d$  relativamente grandes (del orden de  $R$ ). En tales casos,  $\beta$  será grande ( $\text{sen}(\beta) = h/R$ ) y  $\gamma$  será mayor aún ( $\gamma = \beta + \varepsilon$ ). Esto demuestra que la proposición de  $\alpha$  pequeño y las conclusiones obtenidas de ella son válidas sólo para puntos objeto cercanos a la superficie reflectora (distancia objeto del orden de  $R$  o menor).

En cuanto a la Fig. 2, en ella se observa que  $\text{tg}(\alpha) = h/(o+d)$ . Aplicando un razonamiento análogo al del caso anterior, se concluye que para  $o$  suficientemente grande,  $\alpha$  puede ser muy pequeño aun cuando  $d$  y  $h$  sean grandes (del orden de  $R$ ). Si  $h$  es grande, también  $\beta$  lo será ( $\text{sen}(\beta) = h/R$ ), pero en este caso esto no implica que  $\gamma$  también lo sea. De todos modos, debe tenerse presente que para falsar un modelo no es necesario demostrar que todas sus proposiciones son falsas.

En la Fig. 2 cabe analizar dos cuestiones adicionales. La primera consiste en que el “cono de apertura” o haz de rayos subtendido desde un punto objeto cualquiera

hacia una superficie convexa, no llega a toda el área de la superficie. La segunda atañe al hecho de que el modelo convencional, en el caso de la refracción, además de suponer que  $\beta$  y  $\gamma$  son pequeños, supone que  $\varepsilon$  y  $\varepsilon'$  (ángulos de incidencia y refracción) también lo son. Para discutir estas cuestiones cabe considerar el comportamiento de los rayos que inciden tangencialmente en una superficie refringente convexa.

La Fig. 3 muestra dos rayos tangenciales,  $r_1$  y  $r_2$ , los cuales marcan el límite superior del cono de apertura de sus respectivos puntos objeto (los rayos emitidos desde  $P_1$  a un ángulo mayor que  $\alpha_1$ , o desde  $P_2$ , a un ángulo mayor que  $\alpha_2$ , no incidirán en la superficie)<sup>1</sup>. Por claridad, no se han marcado en la figura los rayos refractados ni los ángulos  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\varepsilon$  ni  $\varepsilon'$ .

Dado que los rayos  $r_1$  y  $r_2$  son tangentes a la superficie, son perpendiculares a su normal en el punto de tangencia, es decir, son normales al radio  $R$  que, en cada caso, toca el punto de incidencia. Luego, el ángulo de incidencia es  $\varepsilon = \pi/2$  radianes, y el ángulo de refracción  $\varepsilon'$ , si bien depende, por la ley de Snell, del índice de refracción, no será pequeño, en general.

Por otra parte, se puede observar que para un rayo en incidencia tangencial  $\sin(\alpha) = R/(o + R)$ , de lo cual se concluye que para distancias  $o$  suficientemente grandes, el ángulo  $\alpha$  puede hacerse arbitrariamente pequeño, pero

esto no implica que los ángulos  $\beta$ ,  $\varepsilon$  y  $\varepsilon'$  serán también pequeños. En el límite, cuando  $o$  tiende a infinito,  $h$  tiende a  $R$  y  $\beta$  tiende a  $\pi/2$ .

El análisis de estos casos límite es muy ilustrativo, pero no es necesario que las distancias objeto  $o$  sean muy grandes para falsar la proposición de  $\alpha$  pequeño. A distancias  $o$  moderadas, las aproximaciones trigonométricas ya introducen errores muy grandes. Esto se ilustra en la siguiente figura.

En la Fig. 4 se representa una superficie refringente convexa de centro  $C$  y radio  $R$ , y un punto objeto  $P$  situado a una distancia  $o = 5R$ , que emite un rayo con un ángulo  $\alpha = 0.1$  rad (los ángulos y los segmentos no están graficados a escala, y se han omitido, por claridad, algunos parámetros). Para este valor de  $\alpha$ , el hecho de aproximar el ángulo por su tangente introduce un error porcentual del orden de 0.3% (en general, aceptable). Sin embargo, al resolver el triángulo oblicuángulo PIC<sup>2</sup> se obtiene que  $\beta \approx 0.542$  rad. Para este valor, el hecho de aproximar  $\beta$  por su tangente introduce un error porcentual del orden de 11% (en general, inaceptable).

Esto demuestra que, también en este caso, la proposición de  $\alpha$  pequeño no es equivalente a la de *incidencia cercana*, y es inaplicable para distancias  $o$  que no sean del orden o menores que el radio  $R$ .

<sup>1</sup> Los rayos que provienen de un punto objeto sobre el eje óptico y pasan por el borde de la apertura de la lente, reciben el nombre de rayos marginales (o axiales, en algunos textos.)

<sup>2</sup> El triángulo PIC se puede resolver fácilmente aplicando la ley de los senos, pues se conoce el valor de  $\alpha$ , del lado opuesto a  $\alpha$ :  $R$ , y del lado mayor, horizontal:  $6 R$ .

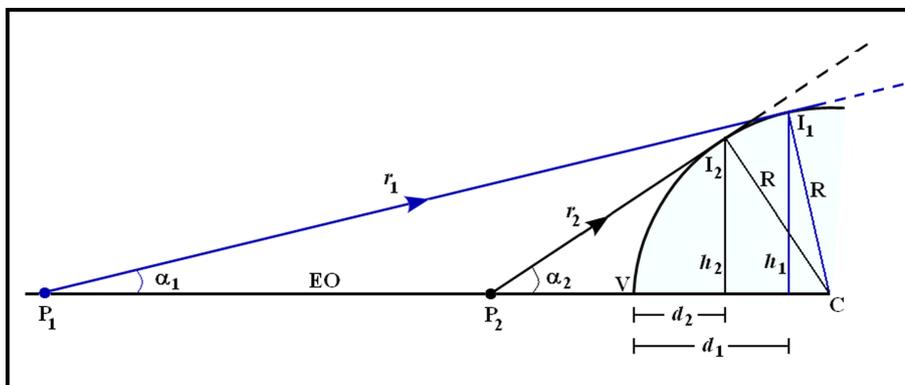


Figura 3: Rayos tangentes a una superficie refringente.

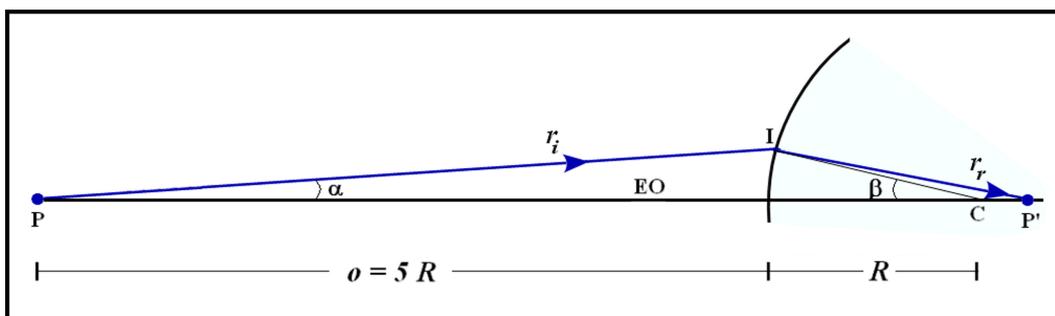


Figura 4: Refracción con distancia objeto moderada.

### 3.3. Conclusiones sobre el Modelo Convencional

La proposición de  $\alpha$  pequeño es aplicable sólo para puntos objeto cercanos al sistema (espejo o lente), es decir, cuando  $o$  es del orden o menor que  $R$ . Cuando  $o$  supera el orden de  $R$ , el hecho de que  $\alpha$  sea pequeño no implica que sean válidas las proposiciones, aproximaciones, ecuaciones y conclusiones del modelo convencional.

Debería hacerse esta salvedad, o sencillamente descartar esta proposición y adoptar la de *incidencia cercana*, que es más amplia y confiable, porque no depende de ninguna restricción sobre la distancia objeto  $o$ . De todos modos, debe aclararse que por “cercano al eje óptico” debe entenderse  $h \ll R$  o  $\beta \ll 1$  rad. Estas dos condiciones son equivalentes. Ambas están expresadas en términos comparativos, pero la segunda, al plantear una comparación con una unidad convencional, se independiza de los parámetros del sistema y podría considerarse más general. Este parámetro  $\beta$ , denotado aquí como *distancia angular* (del punto de incidencia), es el que se usará en los siguientes cálculos y gráficas.

## 4. Cálculos Cuantitativos de la Aberración de Esfericidad

### 4.1. Consideraciones previas

Si se adopta la proposición de *incidencia cercana* al eje óptico como condición necesaria para que la aberración de esfericidad sea moderada, cabe preguntarse qué error de enfoque tendrán los rayos que no incidan tan “cercanos”.

Desde luego, la aberración depende de la distancia objeto, por lo cual es necesario limitar el estudio a un dado valor de esta variable. En este trabajo se considerarán puntos infinitamente alejados del sistema óptico ( $o \rightarrow \infty$ ). Esta elección se basa en razones didácticas y prácticas. Por una parte, se desea resaltar el hecho de que para puntos infinitamente alejados, aun cuando  $\alpha \rightarrow \theta$ , hay rayos que inciden a distancias angulares grandes ( $\beta$  del orden de un radián o mayor) generando una aberración de esfericidad considerable. Por otra parte, el comportamiento para  $o \rightarrow \infty$  tiene utilidad práctica en sistemas tales como anteojos astronómicos y terrestres, lentes de objetivos fotográficos, gafas, etc.

Para  $o \rightarrow \infty$ , se puede definir como error de enfoque de un dado rayo a la diferencia relativa entre la posición  $i$  de la imagen correspondiente a dicho rayo, y la posición  $f$  del foco imagen (aberración de esfericidad longitudinal). Es decir,

$$\varepsilon = \frac{i - f}{f} \quad (6)$$

En nuestros cálculos para los espejos, las posiciones  $i$  y  $f$  se miden respecto del vértice de la superficie, y por tanto  $i$  equivale a la distancia imagen y  $f$  a la distancia focal, siendo  $f = R/2$ , donde  $R$  es el radio de curvatura.

En el caso de las lentes, las posiciones  $i$  y  $f$  se miden respecto del origen de coordenadas. La posición del foco imagen se calcula teniendo en cuenta el espesor de las

lentes (v. Apéndice A), y aplicando la Ec. (2) dos veces, una para cada superficie (en el Apéndice B se desarrolla un ejemplo de este cálculo para una lente convergente biconvexa).<sup>3</sup>

### 4.2. Metodología

A partir de un conjunto de rayos incidentes paralelos, se calcula la desviación de los mismos usando la ley física pertinente, es decir, igualdad de los ángulos de incidencia y reflexión respecto de la normal a la superficie, para los espejos, y ley de Snell para las lentes. Luego se calcula la posición del punto en que los rayos emergentes del sistema intersectan al eje óptico, es decir, el punto imagen para cada rayo del conjunto. Finalmente, se calcula el error de enfoque para cada rayo usando la Ec. (6) y se presentan el trazado de los rayos y las gráficas del error de enfoque en función de la distancia angular de cada punto de incidencia. (En el Apéndice C se explica paso a paso esta metodología para el caso de una lente, y en el Apéndice D se ofrece uno de los programas desarrollados, totalmente operativo en entorno Scilab, para el caso de una lente convergente.)

Para todas las lentes se supone un índice de refracción  $n = 1.5$ , pero esto no resta generalidad al estudio; los resultados cualitativos y las conclusiones serían las mismas para cualquier otro valor de  $n$ .

Los cálculos y las figuras 5-9 están realizados con programas de nuestra autoría desarrollados en Scilab 5.5.1.

## 5. Resultados

### 5.1. Espejos

#### 5.1.1. Espejos cóncavos

La Fig. 5a representa un corte transversal de un espejo esférico cóncavo de radio de curvatura  $R = 2$  m, cuyo foco está situado a 1 m sobre el origen del sistema de ejes considerado, en el semieje positivo de las ordenadas. Sobre el espejo incide un haz de rayos paralelos representados con flechas azules y espaciados cada  $4^\circ$  ( $\sim 0.07$  rad) en el rango de  $4^\circ$  a  $36^\circ$  de distancia angular  $\beta$ . Los rayos reflejados se representan con flechas rojas. El eje óptico coincide con el eje de coordenadas vertical. Para mayor claridad los ejes de coordenadas tienen distintas escalas.

Se observa que ninguno de los rayos reflejados que se representan converge al foco. La Fig. 5b muestra el error de enfoque para cada uno de los rayos trazados en la Fig. 5a. El signo negativo corresponde a errores por defecto, es decir, que los rayos convergen a distancias del espejo

<sup>3</sup> Debe notarse que en el caso de las lentes, en general, las posiciones  $i$  y  $f$  no representan, respectivamente, la distancia imagen ni la distancia focal imagen; puesto que, convencionalmente, la distancia imagen se mide respecto del vértice de la superficie del lado de la imagen, y la distancia focal imagen se mide respecto del plano principal imagen de la lente.

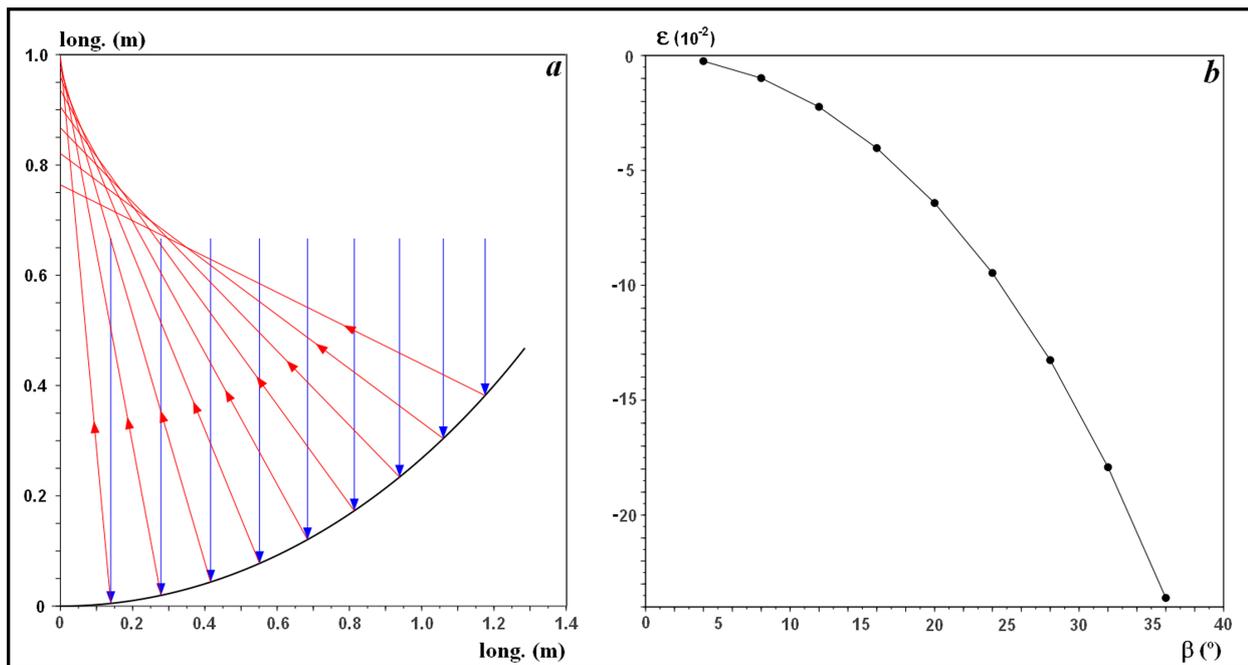


Figura 5: Espejo cóncavo: a) Trazado de rayos. b) Error de enfoque en función de  $\beta$ .

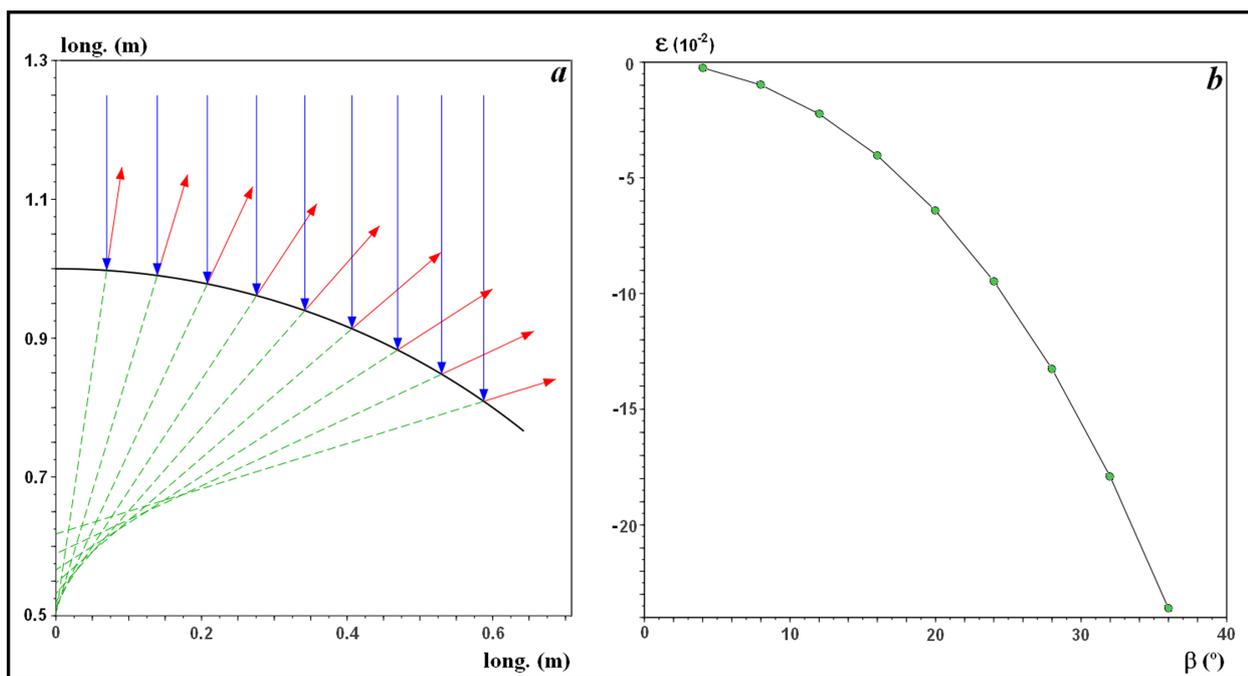


Figura 6: Espejo convexo: a) Trazado de rayos. b) Error de enfoque en función de  $\beta$ .

más pequeñas que su distancia focal. El error aumenta cada vez más (en valor absoluto) cuanto más alejado del eje óptico incide cada rayo, es decir, las distancias entre el espejo y los puntos de convergencia son cada vez más pequeñas. Este aumento del error no es lineal, sino más pronunciado: los puntos de la Fig. 5b están uniformemente espaciados en la variable  $\beta$ , pero la diferencia de ordenadas entre dos puntos consecutivos es progresivamente mayor a medida que  $\beta$  aumenta. Así, por ejemplo,

como muestra la gráfica 5b, para una distancia angular  $\beta$  de  $12^\circ$ , el error de enfoque es menor al 3%, para  $24^\circ$  es cercano al 10%, mientras que para  $36^\circ$  es casi de un 24%.

### 5.1.2. Espejos convexos

La Fig. 6a representa un espejo convexo de radio de curvatura  $R = 1$  m, cuyo foco está situado a 0.5 m sobre

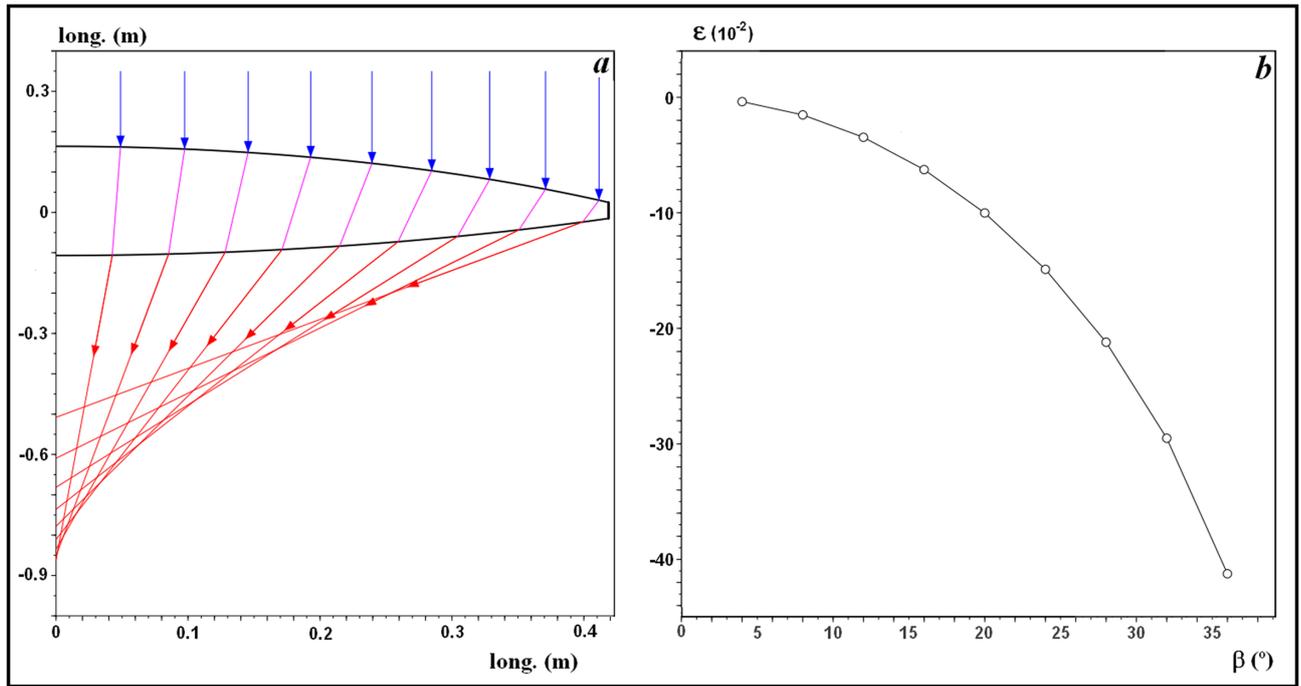


Figura 7: Lente convergente: a) Trazado de rayos. b) Error de enfoque en función de  $\beta$ .

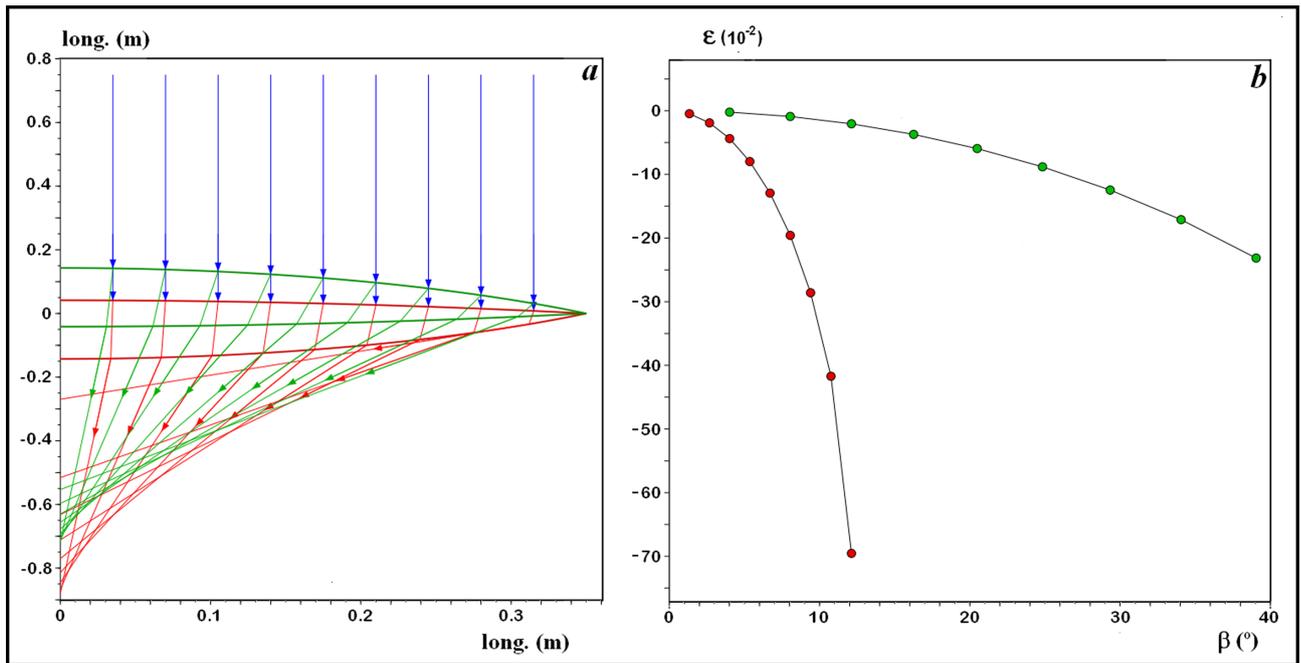


Figura 8: Lente convergente: a) Trazado de rayos con el radio menor hacia arriba (verde) y con el radio mayor hacia arriba (rojo). b) Error de enfoque en función de  $\beta$ , para cada uno de estos casos.

el origen, en el semieje positivo de las ordenadas (por razones de claridad y escala de la figura, el origen de coordenadas, que coincide con el centro de curvatura de la superficie, no se ha representado). También en este caso los rayos incidentes (flechas azules) están espaciados cada  $4^\circ$  en la variable  $\beta$ . Las flechas rojas representan los rayos reflejados, y las líneas de trazos verdes las prolongaciones de los mismos, que tienden a converger en el espacio

virtual interior al espejo. La Fig. 6b muestra que el error de enfoque en función de la distancia angular  $\beta$  tiene un comportamiento idéntico al de la Fig. 5b, aun cuando este espejo es convexo y su radio es distinto del anterior.

Es decir que, salvando la diferencia entre espacios virtuales y reales, a igualdad de  $\beta$ , los espejos presentan el mismo grado de aberración de esfericidad, sin importar

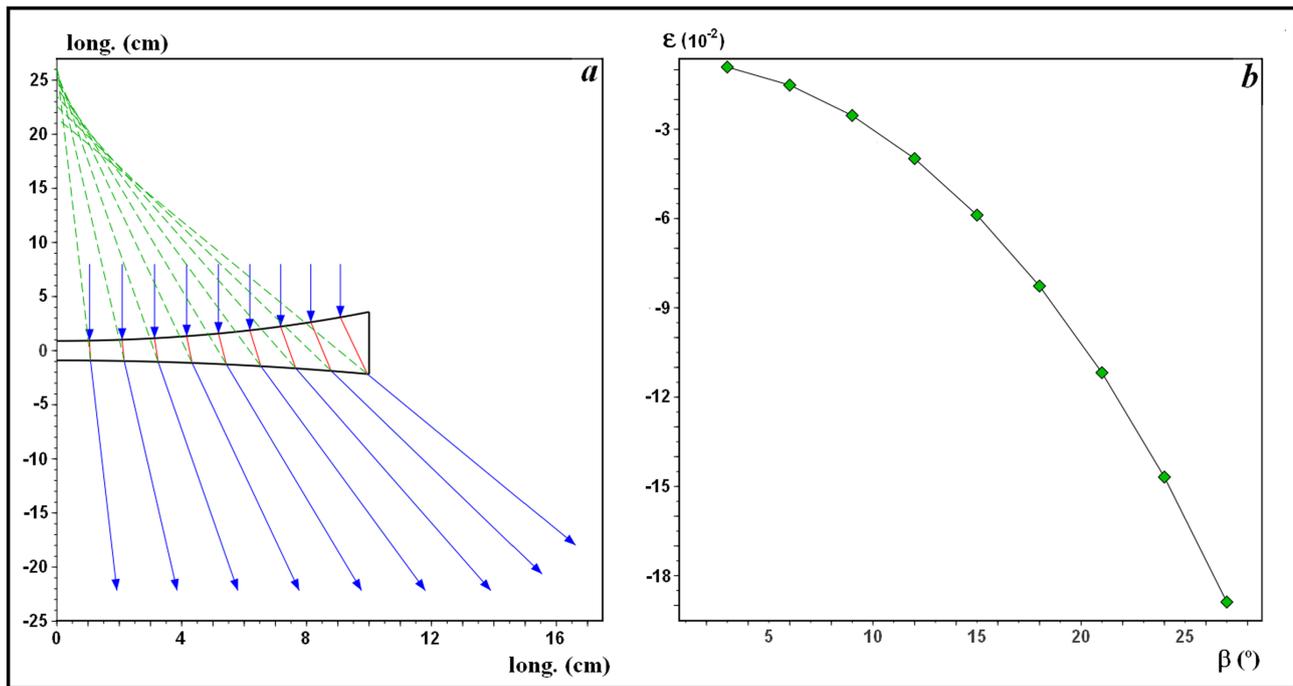


Figura 9: Lente divergente: a) Trazado de rayos. b) Error de enfoque en función de  $\beta$ .

el tamaño de su radio ni el hecho de que sean convexos o cóncavos.

## 5.2. Lentes

### 5.2.1. Lentes convergentes

La Fig. 7a representa una lente convergente. El radio de la superficie superior, donde inciden los rayos, es  $R_1 = 0.7$  m; el de la superficie inferior,  $R_2 = 1$  m; y el foco imagen está situado a  $\sim 0,8645$  m por debajo del origen, en el semieje negativo de las ordenadas. El valor cero de las ordenadas corresponde al plano que separa ambas superficies. Los rayos incidentes (flechas azules) están espaciados cada  $4^\circ$  de distancia angular  $\beta$  en la superficie superior.

En la Fig. 7b, que muestra el error de enfoque en función de  $\beta$ , se verifica un comportamiento cualitativo análogo al de los espejos, es decir, errores negativos cuyos valores absolutos presentan un aumento no lineal (distancias de convergencia progresivamente más cercanas a la lente).

En la lente de la Fig. 8a,  $R_1 = 0.5$  m, y  $R_2 = 1.5$  m. Se han superpuesto, para comparación, las gráficas de la lente en dos posiciones: con  $R_1$  hacia arriba, en la dirección de los rayos incidentes (verde), y con  $R_2$  hacia arriba (rojo). El valor cero de las ordenadas corresponde, en ambos casos, al plano que separa los dos casquetes esféricos. El cambio de orientación implica un cambio en la posición del foco imagen: en el primer caso éste está a  $\sim 0.720$  m por debajo del origen, y en el segundo caso a

$\sim 0.885$  m por debajo del origen, en el semieje negativo de las ordenadas.<sup>4</sup>

A fin de comparar el mismo haz de rayos, éstos están igualmente espaciados en longitud lineal, a distancias de 0.035 m entre sí. Obsérvese que las trayectorias de los rayos difieren en cada caso, tanto dentro de la lente como al emerger de ella. Con  $R_1$  hacia arriba (verde) las desviaciones de los rayos, dentro de la lente y al emerger de ella, son relativamente comparables. En cambio, con  $R_2$  hacia arriba (rojo), los rayos sufren una desviación muy leve dentro de la lente y otra muy pronunciada al emerger de ella.

La Fig. 8b muestra que el error de enfoque es menor cuando la superficie de radio menor se orienta hacia la dirección de la luz incidente (puntos verdes). En este caso, la variación relativa del error también es menos pronunciada (más cercana a una variación lineal).

### 5.3. Lentes divergentes

La Fig. 9a muestra una lente divergente bicóncava, de radios  $R_1 = 20$  cm,  $R_2 = 40$  cm, y espesor axial  $e = 0.9$  cm. Su foco imagen está situado en el semieje positivo de las ordenadas, a  $\sim 26.5$  cm sobre el origen, que coincide con el centro de la lente. Las líneas de trazados representan la prolongación de los rayos refractados.

<sup>4</sup> Este cambio en la posición del foco imagen se debe a que el algoritmo empleado en su cálculo depende del orden en que se consideren las superficies y de cómo se ubique la lente en el sistema de coordenadas (Apéndice B). No implica un cambio en las distancias focales de la lente, tal como se definen convencionalmente, en referencia a sus planos principales.

Como puede observarse en ambos paneles, existe un error de enfoque que aumenta con la distancia angular  $\beta$  en forma análoga al de las lentes convergentes, es decir, errores negativos cuyo valor absoluto corresponde a un aumento no lineal (distancias de convergencia progresivamente más cercanas a la lente). También en las lentes divergentes, si se cambia la orientación de la lente, cambia el error de enfoque (este aspecto no se muestra en la figura).

## 6. Discusión y conclusiones

- A lo largo de nuestra experiencia docente, hemos comprobado que muchos textos de física destinados al nivel secundario y al ciclo básico universitario exponen sus contenidos tratando de reducir a un mínimo los formalismos matemáticos. Este criterio también es adoptado por muchos docentes de estos niveles, porque consideran que estos formalismos implican, para los estudiantes, una exigencia extra que no reporta mayor claridad conceptual, y por tanto estos docentes imparten herramientas matemáticas destinadas sólo a la resolución de problemas.

Este criterio, dentro de ciertos límites, puede ser apropiado para algunos contenidos de física; pero en muchos otros creemos que es necesario profundizar algunos aspectos matemáticos que van más allá de las herramientas operativas. Tal es el caso del tema de este trabajo, donde hemos profundizado en cuestiones tales como el análisis geométrico y trigonométrico de diagramas de reflexión y refracción (Figs. 1–4), desarrollos en serie de funciones trigonométricas (Ecs. (4) y (5)), trazado preciso de rayos ópticos y cálculo del error de enfoque (Figs. 5–9 y Ec. (6)).

Estos detalles matemáticos no se presentan como objetivos operativos sino como recursos didácticos para que, bajo la guía del docente, el estudiante desarrolle su sentido crítico y adquiera una mayor claridad conceptual sobre cuestiones que ofrecen dificultad o pueden inducir a confusión. Creemos que este tipo de recursos puede facilitar que el estudiante comprenda cuestiones como “qué se entiende por *ángulo pequeño*”, qué error se comete cuando el ángulo no es tan pequeño”, “cuál es el ámbito de validez de la *proposición de  $\alpha$ pequeño*”, “por qué es preferible la caracterización de los rayos paraxiales como *cercanos al eje óptico*”, “cuál es la trayectoria de los rayos no paraxiales”, etc.

- Consideramos que los criterios docentes deben ser objeto de constante revisión, en especial, en lo que atañe al nivel de matemática necesario para un dado tema de física (según el estadio curricular en que se imparta) y la actualización de recursos didácticos. En particular, debe tenerse presente que en algunas ramas de la física –como la óptica geométrica, que nos ocupa– los recursos computacionales han avanzado y se han popularizado tanto, que es posible encontrar programas accesibles e incluso sitios de internet donde interactivamente, en

forma gratuita, se puede usar herramientas de diseño y trazado de rayos en sistemas ópticos.

- Las principales conclusiones que pueden extraerse de las Figs. 5–9 son las siguientes:

a) La aberración de esfericidad depende esencialmente de la distancia angular  $\beta$  y esta dependencia no es lineal sino más pronunciada, es decir, las variaciones relativas del error de enfoque aumentan con  $\beta$ . En todos los casos, los errores relativos de enfoque son negativos, indicando que las imágenes aberradas se acercan más al sistema óptico cuando  $\beta$  aumenta.

b) No existe una diferencia taxativa entre rayos “paraxiales” y “no paraxiales”. No existe algo tal como un rango de distancia donde se cumplen las ecuaciones simplificadas de la óptica. Excepto el rayo que incide sobre el eje óptico, todos los demás tienen distintos grados de error de enfoque y, por tanto, de aberración de esfericidad. En todo caso, lo que se puede definir es un rango de distancia angular al eje óptico en el cual la aberración de esfericidad sea despreciable dentro de un dado error.

c) Los espejos cóncavos y convexos, a igualdad de distancia angular, presentan exactamente el mismo grado de aberración de esfericidad (Figs. 5 y 6), sin importar cuál sea su radio de curvatura.

d) En una lente con dos radios distintos, la aberración de esfericidad depende de su orientación (Fig. 8). Al respecto, Hetch (2017) [24] señala que el grado de aberración de esfericidad es menor cuando las desviaciones que sufren los rayos, en cada una de las superficies de la lente, son comparables entre sí. Esto concuerda totalmente con nuestros resultados, los cuales evidencian que si los rayos sufren desviaciones comparables dentro de la lente y al emerger de ella, los valores del error de enfoque son menores y la variación relativa de los mismos es más suave.

e) Las lentes divergentes (Fig. 9) presentan el mismo comportamiento cualitativo que las convergentes, en el sentido de que las imágenes aberradas están más cerca de la lente que su foco imagen. Esto conlleva que la ubicación de las imágenes se da en lados opuestos de los focos, tal como lo afirma Hetch (2017) [24], atribuyéndole por este motivo signo positivo a la aberración en las lentes convergentes, y negativo en las divergentes. Obsérvese, en el trazado de los rayos, que en las lentes convergentes las imágenes aberradas están por encima del foco, en tanto que en la divergente están por debajo del mismo. No obstante, los errores de enfoque son siempre negativos porque en ambos casos las imágenes aberradas están más cerca de la lente que su foco imagen.

## Material suplementario

El siguiente material suplementario está disponible en línea:

Apéndice A - Ejemplo de graficación a escala de una lente

Apéndice B - Ejemplo de cálculo de la posición del foco imagen de una lente

Apéndice C - Explicación cualitativa del cálculo de las trayectorias de los rayos y del error de enfoque para una lente

Apéndice D - Programa desarrollado en Scilab para calcular y graficar el error de enfoque de una lente

## Referencias

- [1] J. Salinas y J. Sandoval, *Revista de Enseñanza de la Física* **12**, 23 (1999).
- [2] I. Galili and A. Hazan, *International Journal of Science Education* **22**, 57 (2000).
- [3] J. Gil Llinás, *Preconcepciones y Errores Conceptuales en Óptica. Propuesta y Validación de un Modelo de Enseñanza Basado en la Teoría de la Elaboración de Reigluth y Stein*. Tesis Doctoral, Universidad de Extremadura, 2003.
- [4] I. Lucero, S. Concari y R. Pozzo, *Investigações em Ensino de Ciências* **11**, 85 (2006).
- [5] A. Carcavilla y M.L. Puey, *Alambique: Didáctica de las Ciencias Experimentales* **35**, 17 (2003)
- [6] J. Velasco y L. Buteler, *Enseñanza de las Ciencias* **35**, 161 (2017).
- [7] P.K. Tao, *International Journal of Science Education* **26**, 1171 (2004).
- [8] V. Heckler, M.F. Oliveira Saraiva, K.S. Oliveira Filho, *Rev. Bras. Ensino Fís.* **29**, 267 (2007).
- [9] D. Rodriguez, D. Mena y C. Rubio, *Tecnología, Ciencia, Educación* **24**, 127 (2009).
- [10] S.A. Chirino, N.P. Rodríguez y G.A. Rodríguez, *Rev. Enseñanza Fís.* **27**, No. Extra, 37 (2015).
- [11] H.A. Kofman, *Revista Argentina de Enseñanza de la Ingeniería* **12**, n. 21, p. 29 (2011).
- [12] R. Lang da Silveira e F. Axt, *Rev. Bras. Ensino Fís.* **28**, 421 (2006).
- [13] N. Pionorio, J.J. Rodrigues Jr. e A.C. Bertuola, *Rev. Bras. Ensino Fís.* **30**, 3315 (2008).
- [14] N. Carlin, E.M. Szanto, F.O. Jorge, F.A. Souza, I.H. Bechtold e W.A. Seale, *Rev. Bras. Ensino Fís.* **29**, 299 (2007).
- [15] J.P.C. Southall, *Mirrors Prisms and Lenses* (The Macmillan Company, Nueva York, 1933), 3<sup>a</sup> ed., p. 515.
- [16] D.C. O'Shea and M.E. Harrigan, in: *Handbook of Optics Vol.1*, editado por M. Bass (McGraw-Hill, Nueva York, 1995), 2<sup>a</sup>ed., p. 33.2-33.4.
- [17] J.M. Geary, in: *Introduction to Lens Design* (Willmann-Bell Inc., Richmond, 2002), p. 68-71.
- [18] D.S. Goodman, in: *Handbook of Optics Vol.1*, editado por M. Bass (McGraw-Hill, Nueva York, 1995), 2<sup>a</sup>ed., p. 1.41-1.46.
- [19] C.E. Gutiérrez, in: *Fully Nonlinear PDEs in Real and Complex Geometry and Optics*, editado por C.E. Gutiérrez y E. Lanconelli (Springer, Suiza, 2014), p. 101-103.
- [20] E. Hetch, *Optics* (Pearson Education Ltd, Harlow, 2017), 5<sup>th</sup> ed., p. 160-162.
- [21] G. Woan, *The Cambridge Handbook of Physics Formulas* (Cambridge University, Cambridge Press, 2000), p. 29.
- [22] R.D. Guenther, *Modern Optics* (John Wiley and Sons Inc., Hoboken, 1990), p. 138-139.
- [23] F.A. Jenkins and H.E. White, *Fundamentals of Optics*(McGraw-Hill, Nueva York, 2001), p.149-162, 4<sup>th</sup> ed.
- [24] E. Hetch, Op. cit., p. 268.