Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 40, nº 4, e4302 (2018)
www.scielo.br/rbef
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2018-0007

Teorias de gauge a la Utiyama

Gauge theories a la Utiyama

O. A. Acevedo*[1], R. R. Cuzinatto[1,2], B. M. Pimentel[1], P. J. Pompeia[3]

[1]Universidade Estadual Paulista, Instituto de Física Teórica, São Paulo, SP, Brasil
[2]Universidade Federal de Alfenas, Instituto de Ciência e Tecnologia, Poços de Caldas, MG, Brasil
[3]Instituto Tecnológico de Aeronáutica, Departamento de Física, São José dos Campos, SP, Brasil

Recebido em 10 de Janeiro, 2018. Revisado em 19 de Março, 2018. Aceito em 29 de Março, 2018.

Revisamos a construção da teoria de gauge para os grupos de Lie semi-simples realizada por Utiyama em seu trabalho ***"Interpretação da Interação por Invariância Teórica"*** [1]. Mostramos que para manter a invariância de um sistema de campos $\phi^A(x)$ sob um grupo de transformações a n parâmetros $\epsilon^a(x)$ dependentes do ponto x^μ é necessário introduzir um novo campo ${A^a}_\mu(x)$. Este campo auxiliar interage com ϕ como manifesto pela derivada covariante $\nabla_\mu\phi^A$. Determinamos a lei de transformação de ${A^a}_\mu$ sob o grupo mencionado e calculamos o tensor intensidade de campo $F^a_{\mu\nu}(x)$. Especificamos, ainda, a corrente conservada ${J_a}^\mu$ associada à invariância do sistema completo. Encerramos aplicando a teoria aos casos da partícula carregada em um campo eletromagnético e do potencial de Yang-Mills sob transformações de um campo de spin isotópico; fazemos breves comentários sobre o campo gravitacional como teoria de gauge e sobre a extensão da teoria de Utiyama na situação em que $\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_A\left[{A^a}_\mu; \partial_\nu {A^a}_\mu; \partial_\rho\partial_\nu {A^a}_\mu\right](x)$.
Palavras-chave: teorias de gauge; método de Utiyama

We review the construction of the gauge theory for semi-simple Lie groups by Utiyama in **"Invariant Theoretical Interpretation of Interaction"** [1]. It is shown an auxiliary field $A^a_\mu(x)$ must be introduced in order to keep the system of fields $\phi^A(x)$ invariant under a transformation group depending on n parameters $\epsilon^a(x)$. This auxiliary field interacts with ϕ through the covariant derivative $\nabla_\mu\phi^A$. We determine the transformation law for A^a_μ under the x^μ-dependent Lie group and calculate the field strength $F^a_{\mu\nu}(x)$. Moreover, we specify the conserved current ${J_a}^\mu$ related to the invariance of the complete system. The paper ends with the application of the general theory to the cases of the charged particle in an electromagnetic field and of the Yang-Mills potential under isotopic spin space transformations; we briefly address the matter of the gravitational field as a gauge theory; finally, we comment on the extension of Utiyama's theory for $\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_A\left[{A^a}_\mu; \partial_\nu {A^a}_\mu; \partial_\rho\partial_\nu {A^a}_\mu\right](x)$.
Keywords: gauge theories; Utiyama method

1. Elementos de história na origem da teoria de gauge não-abeliana

As teorias de gauge (ou, em uma tradução menos consagrada, teorias de calibre) são a estrutura formal subjacente às interações fundamentais da natureza. Elas explicam as leis de conservação para sistemas físicos frente a todo um conjunto de transformações. Ademais, estabelecem um cenário comum para o estudo da unificação dos campos. Seu estudo é obrigatório em cursos de eletromagnetismo, física de partículas elementares, geometria diferencial (teoria de fibrados), dentre outros.

A origem das teorias de gauge foi registrada por O'Raifeartaigh na Ref. [2]. Além do aspecto humano do desenvolvimento dessas teorias, o livro de O'Raifeartaigh contém todos os artigos orginais que citamos nesta breve introdução, a qual pode ser entendida como um resumo bem compacto de trechos daquele texto.

Foi Weyl quem introduziu o termo "gauge" em geometria diferencial na época da publicação do seu primeiro artigo no assunto [3]. Nesse artigo, Weyl propôs uma teoria de gravitação em que vetores podiam alterar também o seu comprimento por um transporte paralelo, ou seja, seu tamanho, calibre ou "gauge". Na época, a palavra "gauge" era comum para designar medidas de tamanho, como o da espessura de um trilho de trem.

*Endereço de correspondência: rodrigo.cuzinatto@unifal-mg.edu.br, cuzinatto@gmail.com.

[1]O significado do termos "abeliana" e "não-abeliana" ficará claro na Seção 3. Ela diz respeito ao grau de complexidade das transformações com respeito às quais a teoria física (estabelecida pela densidade lagrangiana de um dado campo ϕ) é invariante. Uma teoria abeliana está associada a um grupo mais simples, e portanto mais restritivo, de transformações.

[2]Yang também preparou um "Abstract" para um encontro da AMS em Washington, em abril de 1954, que foi publicado como: C. N. Yang and R. L. Mills, *Isotopic Spin Conservation and a Generalized Gauge Invariance*, Phys. Rev. **95**, 631 (1954).

O primeiro trabalho em teoria de gauge não-abeliana[1] é aquele devido a Yang e Mills[2] [4], embora eles tenham tido inspiração em outros trabalhos e outras pessoas tenham derivado independentemente os mesmos resultados.

A ideia de Yang e Mills era tornar local a simetria de isospin das interações fortes de uma maneira análoga ao procedimento de Weyl que, em seu artigo de 1929 [5], derivara o eletromagnetismo (uma teoria de gauge abeliana) a partir da prescrição de acoplamento mínimo ao fazer local (dependente da coordenada x) a liberdade de escolha de fase na teoria espinorial. A teoria espinorial é invariante por uma transformação de fase,

$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{i\alpha}\psi(x), \qquad \alpha = constante.$$

Weyl sugeriu que essa transformação poderia ser generalizada para uma transformação local

$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x), \qquad \alpha = \alpha(x).$$

A invariância da teoria por este grupo abeliano de transformação exige, então, que a derivada ordinária seja substituída por uma derivada covariante $\partial_\mu \to \nabla_\mu = \partial_\mu + A_\mu$ cuja quantidade A_μ é identificada com o campo eletromagnético. Incidentalmente, A_μ é um campo de massa nula como veremos no final da seção 3.2.

Para localizar a simetria de isospin, Yang e Mills introduziram o campo de gauge B^a_μ criando a teoria de gauge para o $SU(2)$ que ficou conhecida como Teoria de Yang-Mills [4]. A publicação deste trabalho foi adiada porque os autores esbarraram no problema da massa associada a este novo campo. Seria B_μ não-massivo, assim como A_μ? Eles decidiram enviar o artigo para publicação apenas quando perceberam que esse problema não seria resolvido em um curto período.

Pauli estava ciente deste problema, tanto que insistiu veementemente em perguntar a Yang, durante um seminário em Princeton: "Qual é a massa deste campo B_μ?", ao ponto de Yang interromper seu seminário [6]. Este só seria retomado depois da intervenção apaziguadora de Oppenheimer.[3] A irritação de Pauli pode ser entendida: ele havia encontrado o tensor de campo $F^a_{\mu\nu}$ da teoria de Yang-Mills por uma outra abordagem (redução dimensional em geometria diferencial) mas não publicara este resultado provavelmente porque não resolvera o problema da massa.

Paralelamente ao desenvolvimento de Yang e Mills, Ronald Shaw em Cambridge teve um *insight* ao ver um *preprint* de Schwinger: percebeu que o grupo de gauge do eletromagnetismo $U(1)$ apresentado na sua forma real bidimensional $SO(2)$ poderia ser generalizado para o $SU(2)$. Isso o levou a resultados essencialmente iguais aos da teoria de Yang-Mills embora sob uma motivação diferente. Shaw também confrontou com o problema da massa do campo B_μ: ele acreditava que sua massa deveria ser nula, mas Abdus Salam, seu orientador, o advertira sobre a não trivialidade do problema. Este fato e a ocupação com a escrituração da tese de doutorado adiaram a divulgação dos resultados para 1955 em *"O Problema dos Tipos de Partículas e Outras Contribuições à Teoria de Partículas Elementares"*[4], parte II, cap. III — cf. Ref. [7].

Ao mesmo tempo em que Shaw fazia seu trabalho sobre teoria de gauge não-abeliana, Utiyama se preparava para uma visita a Princeton trazendo consigo um estudo da relação entre a gravitação na formulação de tetradas e o eletromagnetismo via conexão. Embora não faça referência explícita em seu artigo, o desenvolvimento geral de Utiyama segue de perto o procedimento que Weyl adotou para o eletromagnetismo. Utiyama constrói a teoria de gauge para todos os grupos de Lie semi-simples, mas ao chegar aos EUA lê o *preprint* de Yang e Mills e engaveta seu *paper* dada a semelhança dos trabalhos. Ao perceber que a teoria de Yang-Mills considerava apenas o grupo $SU(2)$, Utiyama publica seus resultados, que incluem o caso gravitacional, mas isso não ocorre antes de 1956 [1]. A mágoa de Utiyama é ver as teorias de gauge não-abelianas serem chamadas de Teorias de Yang-Mills sem a mais leve menção ao seu nome, a pessoa que desenvolveu a formulação geral da teoria de gauge. É essa formulação que apresentaremos detalhadamente a partir de agora.

2. Diretrizes da abordagem de Utiyama

Gostaríamos de entender a relação entre a teoria de campos em interação e a exigência de invariância da densidade lagrangiana associada a esses campos sob transformações a parâmetros dependentes do ponto (transformações de gauge). Para isso vamos estabelecer o seguinte programa.

Considere-se um sistema de campos $\phi^A(x)$ com $A = 1, 2, ...$ rotulando os campos de matéria inicialmente sem interação. O ponto de partida é a densidade lagrangiana $\mathcal{L}_M = \mathcal{L}_M\left[\phi^A; \partial_\mu\phi^A\right]$ tomada como conhecida e invariante sob um grupo de transformação G_n (de Lie) dependente de n parâmetros ϵ^c. Aqui ϵ^c são constantes com respeito às coordenadas x; por isso, G_n é dito grupo global.

Suponha que o referido grupo G_n seja substituído por um grupo $G_{\infty n}$ mais geral no sentido que os parâmetros ϵ^c são trocados por um conjunto de funções arbitrárias $\epsilon^c(x)$. Por isso, $G_{\infty n}$ é dito grupo local. Considere-se, ainda, que a densidade lagrangiana $\mathcal{L}_M = \mathcal{L}_M\left[\phi^A; \partial_\mu\phi^A\right]$ permaneça invariante por este grupo mais geral $G_{\infty n}$ através da introdução necessária de um novo campo $A(x)$. O campo auxiliar $A(x)$ será doravante chamado campo compensador ou potencial de gauge.

Tentaremos responder as seguintes perguntas, que serão nossas diretrizes:

[3]Esse episódio é descrito por Yang em seus *Selected Papers*, nossa referência [6]. Nós usamos os trechos disponíveis no capítulo 8 de [2].
[4]Uma reprodução de excertos pertinentes aparece no capítulo 9 da Ref. [2].

 DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2018-0007

1. Que tipo de campo $A(x)$ deve ser introduzido para garantir a invariância local sob $G_{\infty n}$ (mantendo, simultaneamente, a invariância frente à transformação global G_n)?
2. Como este campo $A(x)$ se transforma sob o grupo local $G_{\infty n}$?
3. Que forma toma a *interação* entre o campo $A(x)$ e o campo original $\phi^A(x)$? Dito de outra forma, qual é a relação/prescrição matemática conectando o potencial de gauge $A(x)$ e o campo de matéria $\phi^A(x)$? Ou ainda, como podemos determinar a nova densidade lagrangiana $\mathcal{L}'_M[\phi; A] \equiv \mathcal{L}_{M+\text{int}}$ modificada a partir da densidade lagrangiana original $\mathcal{L}_M\left[\phi^A; \partial_\mu \phi^A\right]$ para incluir a contribuição do potencial de gauge $A(x)$?
4. Quais são as características da densidade lagrangiana $\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_A[A; \partial A]$ para o potencial de gauge livre? Que tipo de equações de campo são permitidas para A?
5. Constrói-se a densidade lagrangiana total $\mathcal{L}_T$ combinando a densidade lagrangiana de matéria em interação, $\mathcal{L}_{M+\text{int}}$, àquela associada ao campo compensador, $\mathcal{L}_A$. Quais as consequências de se impor a invariância de $\mathcal{L}_T$ sob o grupo de transformação $G_{\infty n}$? Em particular, isso leva a alguma lei de conservação [8]?

Responderemos essas perguntas na seção 3, traçando um quadro geral que será investigado para dois casos nas seções seguintes. Em 4 tratamos o caso de campos carregados eletricamente em interação com o campo eletromagnético e na seção 5 estudamos o campo de Yang-Mills no contexto de transformações de um campo de spin isotópico.

Na seção 6 citamos o trabalho de Kibble [9] sobre invariância de Poincaré e o campo gravitacional. Em 7 elencamos alguns resultados de um trabalho [10] que extendeu o de Utiyama para densidades lagrangianas do tipo $\mathcal{L}_A\left[A; \partial A; \partial^2 A\right]$ para o potencial de gauge.

3. Teoria geral

3.1. Invariância local, o campo A e a prescrição de acoplamento mínimo

Considere-se um conjunto de campos de matéria livres $\phi^A(x)$, $(A = 1, 2, ..., N)$ definidos em uma região Ω do espaço-tempo, com a densidade lagrangiana de primeira ordem

$$\mathcal{L}_M(x) = \mathcal{L}_M\left[\phi^A; \partial_\mu \phi^A\right](x), \qquad \partial_\mu \phi^A \equiv \frac{\partial \phi^A}{\partial x^\mu},$$

e cuja equação de campo é

$$\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \phi^A} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial\left(\partial_\mu \phi^A\right)} = 0. \qquad (1)$$

Postulemos que a integral de ação,

$$S[\phi] = \int_\Omega d^4x \mathcal{L}_M(x),$$

seja invariante sob a seguinte transformação infinitesimal:[5]

$$\begin{aligned}
&\phi^A \to \phi^A + \delta\phi^A, \\
&\delta\phi^A = \epsilon^a I_{(a)}{}^A{}_B \phi^B, \\
&\epsilon^a = \textit{parâmetro infinitesimal independente de} \\
&x\ (a = 1, 2, ..., n), \\
&I_{(a)}{}^A{}_B = \textit{coeficiente constante.}
\end{aligned} \qquad (2)$$

Ademais, assumimos a transformação (2) como correspondente a um grupo de Lie G_n dependente dos n parâmetros ϵ^a e com geradores $I_{(a)}$ na representação dos campos ϕ^A. A forma funcional de $\delta\phi^A$ é uma combinação bilinear de ϵ^a e ϕ^B, ou seja, é escolhida como linear nessas duas quantidades.

Deve haver um conjunto de constantes $f_a{}^b{}_c$ independentes da representação chamadas "constantes de estrutura", que são definidas pelas relações de comutação dos geradores $I_{(a)}$,

$$\left[I_{(a)}, I_{(b)}\right]^A{}_B = I_{(a)}{}^A{}_C I_{(b)}{}^C{}_B - I_{(b)}{}^A{}_C I_{(a)}{}^C{}_B = f_a{}^c{}_b I_{(c)}{}^A{}_B. \qquad (3)$$

Tais constantes satisfazem uma regra de ciclicidade

$$f_a{}^m{}_b f_m{}^l{}_c + f_b{}^m{}_c f_m{}^l{}_a + f_c{}^m{}_a f_m{}^l{}_b = 0, \qquad (4)$$

resultado que segue da identidade de Jacobi,[6]

$$\begin{aligned}
\left[\left[I_{(a)}, I_{(b)}\right], I_{(c)}\right] \quad &+ \quad \left[\left[I_{(b)}, I_{(c)}\right], I_{(a)}\right] \\
&+ \quad \left[\left[I_{(c)}, I_{(a)}\right], I_{(b)}\right] = 0,
\end{aligned} \qquad (5)$$

e têm propriedade de antissimetria

$$f_a{}^c{}_b = -f_b{}^c{}_a, \qquad (6)$$

vinda da própria definição do comutador (3).

O grupo G_n é dito abeliano se as suas constantes de estrutura são nulas, $f_a{}^c{}_b = 0$, e os seus geradores de transformações $I_{(a)}{}^A{}_B$ comutam, cf. Eq. (3). Caso contrário, se $f_a{}^c{}_b \neq 0$, o grupo de Lie é denominado não-abeliano.

Admitindo que a ação $S[\phi]$ é invariante pela transformação infinitesimal no campo (2) em qualquer domínio

[5] Assumimos a convenção de soma de Einstein ao longo de todo o texto: índices que aparecem repetidos em uma mesma expressão devem ser somados sobre todos os valores que eles podem assumir. Assim, por exemplo, o objeto $\delta\phi^A = \epsilon^a I_{(a)}{}^A{}_B \phi^B$ tem duas somas implícitas: uma no índice a, outra em B. À guisa de ilustração, vamos explicitar apenas a soma no indice $B = 1, ..., N$; temos: $\delta\phi^A = \epsilon^a I_{(a)}{}^A{}_1 \phi^1 + \epsilon^a I_{(a)}{}^A{}_2 \phi^2 + ... + \epsilon^a I_{(a)}{}^A{}_N \phi^N$.

[6] Note-se que $\left[\left[I_{(a)}, I_{(b)}\right], I_{(c)}\right] = f_a{}^m{}_b \left[I_{(m)}, I_{(c)}\right] = f_a{}^m{}_b f_m{}^l{}_c$ e portanto a soma no primeiro membro de (5) fica como dado em (4).

Ω do espaço-tempo,[7]

$$\delta\mathcal{L}_M = \frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial\phi^A}\delta\phi^A + \frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial\left(\partial_\mu\phi^A\right)}\delta\left(\partial_\mu\phi^A\right) = 0, \qquad (7)$$

o que deve ser válido para qualquer ponto do espaço-tempo, e mais, esta relação independe do comportamento de ϕ^A e $\partial_\mu\phi^A$: $\delta\mathcal{L}_M = 0$ qualquer que seja o caráter do campo (escalar, vetorial, fermiônico, etc.). Levando em conta que os ϵ^a são independentes (uns dos outros para cada valor de a) e diferentes de zero,

$$\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial\phi^A}I_{(a)}{}^A{}_B\phi^B + \frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial\left(\partial_\mu\phi^A\right)}I_{(a)}{}^A{}_B\partial_\mu\phi^B = 0. \qquad (8)$$

Para escrever (8) assumimos lícita a troca da ordem na operação variação δ pela derivação ordinária ∂. A consistência deste ato está garantida uma vez que a variação δ é tomada apenas na forma do campo. Dito de outra forma, as transformações de gauge na lei (2) não afetam as coordenadas sendo, por essa mesma razão, chamadas transformações internas.

Reescrevemos (7) usando a regra de Leibniz,

$$\left[\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial\phi^A} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial\left(\partial_\mu\phi^A\right)}\right]\delta\phi^A + \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial\left(\partial_\mu\phi^A\right)}\delta\phi^A\right] = 0.$$

A equação de campo (1) deve ser satisfeita e isto leva ao anulamento do primeiro termo e a uma corrente conservada, qual seja,

$$\partial_\mu J^\mu_{\ a} = 0, \qquad J^\mu_{\ a} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial\left(\partial_\mu\phi^A\right)}I_{(a)}{}^A{}_B\phi^B. \qquad (9)$$

Isso completa o estudo do segundo parágrafo na seção 2.

Agora, tomemos como generalização do grupo G_n discutido acima a seguinte transformação infinitesimal com parâmetros dependentes do ponto – grupo $G_{\infty n}$:

$$\begin{aligned}
&\delta\phi^A(x) = \epsilon^a(x)I_{(a)}{}^A{}_B\phi^B,\\
&\quad I_{(a)}{}^A{}_B = \textit{coeficiente constante}, \qquad (10)\\
&\quad \epsilon^a(x) = \textit{função arbitrária infinitesimal}\ (a = 1,2,...,n).
\end{aligned}$$

Neste caso,

$$\begin{aligned}
\delta\left(\partial_\mu\phi^A\right) &= \partial_\mu\left(\delta\phi^A\right) = \epsilon^a(x)I_{(a)}{}^A{}_B\left(\partial_\mu\phi^B\right)\\
&+ \partial_\mu\epsilon^a(x)I_{(a)}{}^A{}_B\phi^B \qquad (11)
\end{aligned}$$

e a variação da densidade lagrangiana é:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}_M &= \frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial\phi^A}\delta\phi^A + \frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial\left(\partial_\mu\phi^A\right)}\delta\left(\partial_\mu\phi^A\right) =\\
&= \left[\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial\phi^A}I_{(a)}{}^A{}_B\phi^B + \frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial\left(\partial_\mu\phi^A\right)}I_{(a)}{}^A{}_B\partial_\mu\phi^B\right]\epsilon^a\\
&+ \left[\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial\left(\partial_\mu\phi^A\right)}I_{(a)}{}^A{}_B\phi^B\right]\partial_\mu\epsilon^a.
\end{aligned}$$

O termo em ϵ^a é nulo sob a hipótese de que (8) continue válida mesmo que $\epsilon^a = \epsilon^a(x)$ e consequentemente

$$\delta\mathcal{L}_M = \frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial\left(\partial_\mu\phi^A\right)}I_{(a)}{}^A{}_B\phi^B\partial_\mu\epsilon^a. \qquad (12)$$

Vemos, então, que a variação $\delta\mathcal{L}_M$ com respeito ao grupo de movimentos mais geral $G_{\infty n}$ não se anula: $\mathcal{L}_M\left[\phi^A;\partial_\mu\phi^A\right]$ carrega sempre um termo cinético, os geradores $I_{(a)}{}^A{}_B$ são não-nulos para que existam transformações, as derivadas de $\epsilon^a(x)$ são não nulas por hipótese.

Uma forma de preservar a invariância da densidade lagrangiana $\mathcal{L}_M$ sob (10), forçando $\delta\mathcal{L}_M \equiv 0$, é introduzir um novo conjunto de campos

$$A'^J(x), \qquad J = 1,2,...,M,$$

que se transforme como[8]

$$\delta A'^J(x) = \epsilon^a(x)U_{(a)}{}^J{}_K A'^K + \frac{1}{g}C^J{}_a^\mu\partial_\mu\epsilon^a(x), \qquad (13)$$

na esperança de que este procedimento cancele o segundo membro de (12). De fato, o segundo termo no lado direito do *ansatz* para $\delta A'^J$ vai com $\partial_\mu\epsilon^a(x)$, mesmo fator que aparece em (12). Na Eq. (13), g é um parâmetro que caracteriza a intensidade da dependência dos campos compensadores A'^J com as derivadas dos parâmetros e os coeficientes U e C são constantes a serem determinadas. Fazendo isto, teremos começado a responder as questões listadas na seção anterior. Note ainda que os índices J, K do coeficiente U e o índice J de C são da mesma natureza que o campo A', enquanto que o índice μ de C tem caráter vetorial (por estar contraído com o índice μ da derivada). O número de componentes do campo A'^J, i.e. o intervalo de valores assumidos pelo indice J, será determinado a seguir sob a exigência de invariância da teoria.

Ao inserir o campo auxiliar A' na teoria, passamos à nova densidade lagrangiana

$$\mathcal{L}'_M(x) = \mathcal{L}'_M\left[\phi^A;\partial_\mu\phi^A;A'^J\right](x). \qquad (14)$$

[7]Nossa notação para derivação parcial é simplificada: como $\mathcal{L}_M(\phi^A,\partial_\mu\phi^A)$ deveríamos escrever $\left.\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial\phi^A}\right|_{\partial\phi=const}$ e $\left.\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial\left(\partial_\mu\phi^A\right)}\right|_{\phi=const}$, indicando que ao tomarmos a derivada da função com respeito a uma variável a outra deve manter-se constante. Entretanto, evitamos esse cuidado para não carregar o texto.

[8]Note-se que $\delta A'^J$ é uma combinação bilinear de ϵ^a e A'^K. Esta é, por sua vez, combinada linearmente com $\partial_\mu\epsilon^a$.

[9]De fato, essa hipótese de simplicidade é o que garante a prescrição de acoplamento mínimo introduzida mais adiante — cf. Eq. (32). Termos contendo derivadas do campo de calibre (como no caso da interação de Pauli) podem ocorrer de modo compatível com a invariância de gauge.

Não há necessidade de inserir a dependência da derivada do conjunto de campos compensadores, $\partial_\mu A'^J$, em $\mathcal{L}'_M(x)$ pois a mesma não aparece na forma da lei de transformação (13) proposta para $A'^J(x)$. Equivalentemente, diz-se que a ausência de $\partial_\mu A'^J$em (14) é assumida como hipótese simplificadora.[9]

Postulemos que a ação construída a partir de $\mathcal{L}'_M$,

$$S'[\phi; A] = \int_\Omega d^4x \mathcal{L}'_M(x),$$

seja invariante sob a transformação (13). Isto significa que

$$\delta\mathcal{L}'_M = \frac{\partial\mathcal{L}'_M}{\partial\phi^A}\delta\phi^A + \frac{\partial\mathcal{L}'_M}{\partial(\partial_\mu\phi^A)}\delta\left(\partial_\mu\phi^A\right) + \frac{\partial\mathcal{L}'_M}{\partial A'^J}\delta A'^J = 0.$$

Substituindo as leis de transformação dos campos, Eqs. (10), (11) e (13), e reunindo os termos em $\epsilon^a(x)$ e $\partial_\mu\epsilon^a(x)$:

$$\epsilon^a\left[\frac{\partial\mathcal{L}'_M}{\partial\phi^A}I_{(a)}{}^A{}_B\phi^B + \frac{\partial\mathcal{L}'_M}{\partial(\partial_\mu\phi^A)}I_{(a)}{}^A{}_B\partial_\mu\phi^B + \frac{\partial\mathcal{L}'_M}{\partial A'^J}U_{(a)}{}^J{}_K A'^K\right] + \partial_\mu\epsilon^a\left[\frac{\partial\mathcal{L}'_M}{\partial(\partial_\mu\phi^A)}I_{(a)}{}^A{}_B\phi^B + \frac{1}{g}\frac{\partial\mathcal{L}'_M}{\partial A'^J}C^J{}_a^\mu\right] = 0.$$

Lembramos que as funções $\epsilon^a(x)$ são arbitrárias e isto nos permite escolhê-las de maneira que $\epsilon^a(x)$ e suas derivadas $\partial_\mu\epsilon^a(x)$ sejam independentes. Pondo de outra forma, não existe razão *a priori* para estabelecer uma relação de dependência entre $\epsilon^a(x)$ e suas derivadas. Sendo assim, cada coeficiente de ϵ^a e $\partial_\mu\epsilon^a$ deve anular-se independentemente, gerando o sistema de *equações hierárquicas* funcionais para o sistema $\mathcal{L}'_M(\phi, \partial\phi, A')$:

$$\frac{\partial\mathcal{L}'_M}{\partial\phi^A}I_{(a)}{}^A{}_B\phi^B + \frac{\partial\mathcal{L}'_M}{\partial(\partial_\mu\phi^A)}I_{(a)}{}^A{}_B\partial_\mu\phi^B + \frac{\partial\mathcal{L}'_M}{\partial A'^J}U_{(a)}{}^J{}_K A'^K = 0, \tag{15}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}'_M}{\partial(\partial_\mu\phi^A)}I_{(a)}{}^A{}_B\phi^B + \frac{1}{g}\frac{\partial\mathcal{L}'_M}{\partial A'^J}C^J{}_a^\mu = 0. \tag{16}$$

No caso do grupo de gauge global ($\epsilon^a = constante$) a Eq. (16) não aparece e a Eq. (15) tem o mesmo significado da condição de invariância de gauge global (8). Em verdade, (15) reduz-se à (8) quando $\mathcal{L}'_M$ passa à $\mathcal{L}_M$, para a qual $\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial A'^J} = 0$.

Lembramos que os diversos índices no sistema de equações {(15),(16)} assumem os valores: $J = 1, ..., M$ (índice de contagem para o número de componentes do potencial de gauge A'); $\mu = 0, 1, 2, 3$ (índice rotulando as coordenadas do espaço-tempo quadri-dimensional); $a = 1, ..., n$ (índice de contagem do número de parâmetros da transformação de gauge ϵ). Assim, a Eq. (16) pode ser posta na forma matricial:

$$\frac{1}{g}\begin{pmatrix} C^1 & \cdots & C^M \end{pmatrix}_{4n\times M}\begin{pmatrix} \frac{\partial\mathcal{L}'_M}{\partial A'^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial\mathcal{L}'_M}{\partial A'^M}\end{pmatrix}_{M\times 1} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial\mathcal{L}'_M}{\partial(\partial_0\phi^A)}I_{(1)}{}^A{}_B\phi^B \\ \vdots \\ \frac{\partial\mathcal{L}'_M}{\partial(\partial_3\phi^A)}I_{(n)}{}^A{}_B\phi^B\end{pmatrix}_{4n\times 1}, \tag{17}$$

onde cada C^J é uma coluna com $4n$ elementos $C^J{}_a^\mu$.

Para que a nova densidade lagrangiana $\mathcal{L}'_M(\phi, \partial\phi, A')$ possa ser determinada univocamente, em virtude de (17), exige-se que a matriz $[C]_{4n\times M}$ seja quadrada e inversível (não-singular). Da primeira dessas condições, obtém-se que o número de novos campos A'^J que deve ser agregado à teoria original é:

$$M = 4n,$$

o que significa que são necessários quatro campos auxiliares para cada parâmetro de transformação, ou equivalentemente, um campo auxiliar de quatro componentes para cada parâmetro. Da condição de inversibilidade (não-singularidade) de $[C]_{4n\times M}$ depreendemos a existência da matriz inversa $\left[C^{-1}\right]_{M\times 4n}$ com elementos $\left(C^{-1}\right)^a_{\mu\ J}$ onde agora J denota a linha e o par (μ, a) a coluna. Por definição, essas matrizes satisfazem

$$\left[C^{-1}\right]_{M\times 4n}[C]_{4n\times M} = I_{M\times M},$$
$$[C]_{4n\times M}\left[C^{-1}\right]_{M\times 4n} = I_{4n\times 4n},$$

onde e.g. $I_{M\times M}$ é a matriz identidade $M\times M$. Em termos das componentes de matriz:

$$C^J{}_a^\mu\left(C^{-1}\right)^a_{\mu\ K} = \delta^J_K\,, \qquad \left(C^{-1}\right)^a_{\mu\ J}C^J{}_b^\nu = \delta^a_b\delta^\nu_\mu. \tag{18}$$

Defina-se o *potencial de gauge* $A^a{}_\mu(x)$ correspondente ao parâmetro $\epsilon^a(x)$ em termos desses elementos de matriz e de A'^J:

$$A^a{}_\mu(x) \equiv \left(C^{-1}\right)^a_{\mu\ J}A'^J(x). \tag{19}$$

Já que o índice $\mu = 0, ..., 3$ de C é um índice vetorial, $A^a_{\ \mu}(x)$ é de natureza vetorial. Isso explica a terminologia potencial-vetor usado para $A^a_{\ \mu}$, por exemplo, no caso eletromagnético. Note-se que o objeto $A^a_{\ \mu}$ é equivalente a A'^J no sentido que essas quantidades são uma combinação linear uma da outra. A conveniência de $A^a_{\ \mu}$ é exibir um índice de espaço-tempo e um índice de espaço interno (associado à álgebra do grupo de Lie).

Da Eq. (19),

$$A'^J = C^J{}_a{}^\mu A^a{}_\mu; \tag{20}$$

então

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial A^a{}_\mu} &= \frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial A'^J}\frac{\partial A'^J}{\partial A^a{}_\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial A'^J}\frac{\partial}{\partial A^a{}_\mu}\left(C^J{}_b{}^\nu A^b{}_\nu\right)\\ &= \frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial A'^J}C^J{}_b{}^\nu \delta^b{}_a \delta^\mu{}_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial A'^J}C^J{}_a{}^\mu,\end{aligned}$$

com o que reescrevemos a segunda das equações hierárquicas, Eq. (16):

$$\frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial\left(\partial_\mu \phi^A\right)} I_{(a)}{}^A{}_B \phi^B + \frac{1}{g}\frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial A^a{}_\mu} = 0. \tag{21}$$

Esta equação é satisfeita se a dependência de $\mathcal{L}'_M$ em $\partial_\mu \phi^A$ e $A^a{}_\mu$ ocorrer através da combinação

$$\nabla_\mu \phi^A \equiv \partial_\mu \phi^A - g A^a{}_\mu I_{(a)}{}^A{}_B \phi^B \tag{22}$$

ou

$$\nabla_\mu \phi^A = \partial_\mu \phi^A - g I_{(a)}{}^A{}_B \phi^B \left(C^{-1}\right)^a{}_\mu{}_J A'^J. \tag{23}$$

Por motivos que serão apresentados adiante, o objeto na Eq. (22) é denominado **derivada covariante**. Ademais, a forma de (22) sugere que a constante g é uma medida da *intensidade* com que o campo de gauge $A^a{}_\mu$ **interage** com o campo de matéria ϕ^B, ambos os quais aparecem no segundo termo do lado direito da equação; por essa razão, g é chamada *constante de acoplamento*.

Comentário *Consideremos uma função $f(x,y)$ que satisfaz a*

$$\frac{\partial f}{\partial x} + a\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Podemos verificar, por simples substituição, que qualquer função diferenciável da forma $f(x,y) = h(y - ax)$ verifica a equação acima. De fato, nomeie o argumento de h como $u \equiv y - ax$; segue que

$$\frac{\partial f}{\partial x} + a\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + a\frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial u}\left[-a + a\right] = 0.$$

Este mesmo tipo de construção é usada quando se estuda a equação de onda propagando-se na direção z e com velocidade v,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0,$$

cuja solução pode ser qualquer função do tipo $f(z,t) = h(z \pm vt)$. Esta é a *solução de D'Abembert.*

O argumento do **Comentário** anterior motiva, justifica de forma qualitativa, o resultado (22).[10] Note-se como a proposta (22) realmente verifica (21) se, agora,

$$\mathcal{L}'_M\left[\phi^A; \partial_\mu \phi^A; A^a{}_\mu\right] = \mathcal{L}''_M\left[\phi^A; \nabla_\mu \phi^A\right]. \tag{24}$$

Pela regra de Leibniz, encontre-se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial\left(\partial_\mu \phi^A\right)} &= \frac{\partial \mathcal{L}''_M}{\partial\left(\nabla_\nu \phi^B\right)}\frac{\partial\left(\nabla_\nu \phi^B\right)}{\partial\left(\partial_\mu \phi^A\right)} =\\ &= \frac{\partial \mathcal{L}''_M}{\partial\left(\nabla_\nu \phi^B\right)}\delta^B{}_A \delta^\mu{}_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}''_M}{\partial\left(\nabla_\mu \phi^A\right)};\end{aligned}$$

em seguida, avalie-se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial A^a{}_\mu} &= \frac{\partial \mathcal{L}''_M}{\partial\left(\nabla_\nu \phi^B\right)}\frac{\partial\left(\nabla_\nu \phi^B\right)}{\partial A^a{}_\mu} =\\ &= \frac{\partial \mathcal{L}''_M}{\partial\left(\nabla_\nu \phi^B\right)}\frac{\partial}{\partial A^a{}_\mu}\left[-g A^b{}_\nu I_{(b)}{}^B{}_C \phi^C\right] =\\ &= -g\frac{\partial \mathcal{L}''_M}{\partial\left(\nabla_\mu \phi^B\right)} I_{(a)}{}^B{}_C \phi^C.\end{aligned}$$

Então, o primeiro membro de (21) é:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial\left(\partial_\mu \phi^A\right)} I_{(a)}{}^A{}_B \phi^B + \frac{1}{g}\frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial A^a{}_\mu} =\\ &= \frac{\partial \mathcal{L}''_M}{\partial\left(\nabla_\mu \phi^A\right)} I_{(a)}{}^A{}_B \phi^B - \frac{\partial \mathcal{L}''_M}{\partial\left(\nabla_\mu \phi^B\right)} I_{(a)}{}^B{}_C \phi^C,\end{aligned}$$

que se anula identicamente depois de uma renomeação conveniente dos índices mudos.

[10] Uma forma alternativa, talvez mais dedutiva, de encontrar a Eq. (22) da derivada covariante é admitir que $\mathcal{L}'_M$ depende linearmente de $\partial_\mu \phi^A$ e $A^a{}_\mu$, i.e. através de $f\left(\partial_\mu \phi^A; A^a{}_\mu\right) = \partial_\mu \phi^A + h\left(A^a{}_\mu\right)$. Então, $\frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial\left(\partial_\mu \phi^A\right)} = \frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial h}$ e $\frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial A^a{}_\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial A^a{}_\mu}$. Usando isso em (21) resulta: $I_{(a)}{}^A{}_B \phi^B + \frac{1}{g}\frac{\partial h}{\partial A^a{}_\mu} = 0$; i.e. $h\left(A^a{}_\mu\right) = -g A^a{}_\mu I_{(a)}{}^A{}_B \phi^B$, de modo que o ansatz para $f\left(\partial_\mu \phi^A; A^a{}_\mu\right)$ tem exatamente a forma da Eq. (22).
Há, ainda, um procedimento recursivo para obter (22) a partir de (21). De fato, reescreva-se esta última equação na forma $\frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial A^a{}_\mu} = -g\frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial\left(\partial_\mu \phi^A\right)} I_{(a)}{}^A{}_B \phi^B$. Tomando como primeira aproximação que $\mathcal{L}'_M = \mathcal{L}_M$ e colocando no lado direito da equação anterior, obtemos como primeira correção $-g\frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial\left(\partial_\mu \phi^A\right)} I_{(a)}{}^A{}_B \phi^B A^a{}_\mu$, sob a condição de $\mathcal{L}'_M \to \mathcal{L}_M$ para $A \to 0$. Continuando o procedimento obtemos formalmente a solução $\mathcal{L}'_M = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\frac{\partial^n \mathcal{L}_M}{\partial(\partial\phi)^n}\left(-g I_{(a)} A^a \phi\right)^n$, que é a expansão em série de Taylor de $\mathcal{L}_M(\phi, (\partial - gIA)\,\phi)$, a qual apresenta a dependência (22).

Vamos expressar a lei de transformação (13) para $\delta A'^J$ em termos de $A^a{}_\mu$. Colocando $A'^J = C^J{}_a^{\ \mu} A^a{}_\mu$, Eq. (20), em (13):

$$\delta\left(C^J{}_a^{\ \mu} A^a{}_\mu\right) = U_{(a)}{}^J{}_K \left(C^K{}_b^{\ \mu} A^b{}_\mu\right)\epsilon^a + \frac{1}{g} C^J{}_a^{\ \mu}\partial_\mu \epsilon^a.$$

Atuando os coeficientes constantes $\left(C^{-1}\right)^c{}_{\nu\ J}$ pela esquerda:

$$\begin{aligned}
&\left[\left(C^{-1}\right)^c{}_{\nu\ J} C^J{}_a^{\ \mu}\right]\delta A^a{}_\mu = \\
&= \left[\left(C^{-1}\right)^c{}_{\nu\ J} U_{(a)}{}^J{}_K C^K{}_b^{\ \mu}\right] A^b{}_\mu \epsilon^a + \\
&+ \frac{1}{g}\left[\left(C^{-1}\right)^c{}_{\nu\ J} C^J{}_a^{\ \mu}\right]\partial_\mu \epsilon^a.
\end{aligned}$$

Utilizando (18):

$$\delta^c{}_a \delta^\mu{}_\nu \delta A^a{}_\mu = S_{(a)}{}^{c\ \mu}_{\ \nu\ b} A^b{}_\mu \epsilon^a + \frac{1}{g}\delta^c{}_a \delta^\mu{}_\nu \partial_\mu \epsilon^a,$$

onde definimos

$$S_{(a)}{}^{c\ \mu}_{\ \nu\ b} \equiv \left(C^{-1}\right)^c{}_{\nu\ J} U_{(a)}{}^J{}_K C^K{}_b^{\ \mu}. \tag{25}$$

Logo,

$$\delta A^c{}_\nu = \epsilon^a S_{(a)}{}^{c\ \mu}_{\ \nu\ b} A^b{}_\mu + \frac{1}{g}\partial_\nu \epsilon^c \tag{26}$$

e trocamos o problema de encontrar as constantes $U_{(a)}{}^J{}_K$ e $C^K{}_b^{\ \mu}$ para o de determinar apenas $S_{(a)}{}^{c\ \nu}_{\ \mu\ b}$.

Introduzida $\mathcal{L}''_M\left[\phi^A; \nabla_\mu \phi^A\right]$ — cf. Eq. (24), nosso interesse passa ser o estudo da sua invariância

$$\delta \mathcal{L}''_M = \frac{\partial \mathcal{L}''_M}{\partial \phi^A}\delta\phi^A + \frac{\partial \mathcal{L}''_M}{\partial\left(\nabla_\mu \phi^A\right)}\delta\left(\nabla_\mu \phi^A\right) = 0. \tag{27}$$

Para tanto, calculemos a variação do novo objeto $\nabla_\mu \phi^A$, Eq. (22):

$$\delta\left(\nabla_\mu \phi^A\right) \equiv \delta\left(\partial_\mu \phi^A - g A^a{}_\mu I_{(a)}{}^A{}_B \phi^B\right) = \delta\left(\partial_\mu \phi^A\right) - g\left(\delta A^a{}_\mu\right) I_{(a)}{}^A{}_B \phi^B - g A^a{}_\mu I_{(a)}{}^A{}_B\left(\delta\phi^B\right),$$

já que o operador δ atua como uma derivada. Das leis de transformação de ϕ^A, $\partial_\mu \phi^A$ e $A^a{}_\mu$ – Eqs. (10), (11) e (26),

$$\begin{aligned}
\delta\left(\nabla_\mu \phi^A\right) = {}& \left(\epsilon^a I_{(a)}{}^A{}_B \partial_\mu \phi^B + \partial_\mu \epsilon^a I_{(a)}{}^A{}_B \phi^B\right) - \left(\epsilon^c S_{(c)}{}^{a\ \nu}_{\ \mu\ b} A^b{}_\nu + \partial_\mu \epsilon^a\right) I_{(a)}{}^A{}_B \phi^B + \\
&- A^a{}_\mu I_{(a)}{}^A{}_B\left(\epsilon^b I_{(b)}{}^B{}_C \phi^C\right),
\end{aligned}$$

i.e.,

$$\begin{aligned}
\delta\left(\nabla_\mu \phi^A\right) = {}& \epsilon^a\left[I_{(a)}{}^A{}_B \partial_\mu \phi^B - A^b{}_\mu\left(I_{(b)}{}^A{}_C I_{(a)}{}^C{}_B\right)\phi^B - S_{(a)}{}^{c\ \nu}_{\ \mu\ b} A^b{}_\nu I_{(c)}{}^A{}_B \phi^B\right] + \\
&+ \partial_\mu \epsilon^a\left[I_{(a)}{}^A{}_B \phi^B - I_{(a)}{}^A{}_B \phi^B\right],
\end{aligned}$$

após adequada renomeação dos índices mudos nos termos com $\epsilon^a(x)$. Note-se como os termos com $\partial_\mu \epsilon^a(x)$ anulam-se, exatamente conforme desejávamos ao introduzir o campo A'^J — ou $A^a{}_\mu$ — com a lei de transformação (13) — ou (26).

Vamos usar a relação de comutação (3),

$$-I_{(b)}{}^A{}_C I_{(a)}{}^C{}_B = \left[I_{(a)}, I_{(b)}\right]^A{}_B - I_{(a)}{}^A{}_C I_{(b)}{}^C{}_B = f_a{}^c{}_b I_{(c)}{}^A{}_B - I_{(a)}{}^A{}_C I_{(b)}{}^C{}_B,$$

para os geradores do grupo na última expressão de $\delta\left(\nabla_\mu \phi^A\right)$. Temos:

$$\delta\left(\nabla_\mu \phi^A\right) = \epsilon^a\left[I_{(a)}{}^A{}_B \partial_\mu \phi^B + A^b{}_\mu\left(f_a{}^c{}_b I_{(c)}{}^A{}_B - I_{(a)}{}^A{}_C I_{(b)}{}^C{}_B\right)\phi^B - S_{(a)}{}^{c\ \nu}_{\ \mu\ b} A^b{}_\nu I_{(c)}{}^A{}_B \phi^B\right]$$

ou seja,

$$\delta\left(\nabla_\mu \phi^A\right) = \epsilon^a\left[I_{(a)}{}^A{}_B\left(\partial_\mu \phi^B - A^b{}_\mu I_{(b)}{}^B{}_C \phi^C\right) + \left(f_a{}^c{}_b \delta^\nu{}_\mu - S_{(a)}{}^{c\ \nu}_{\ \mu\ b}\right) A^b{}_\nu I_{(c)}{}^A{}_B \phi^B\right],$$

e, com (22), finalmente,

$$\delta\left(\nabla_\mu \phi^A\right) = \epsilon^a I_{(a)}{}^A{}_B\left(\nabla_\mu \phi^B\right) + \epsilon^a\left(f_a{}^c{}_b \delta^\nu{}_\mu - S_{(a)}{}^{c\ \nu}_{\ \mu\ b}\right) A^b{}_\nu I_{(c)}{}^A{}_B \phi^B. \tag{28}$$

Não fosse pelo último termo em (28), o operador

$$\nabla_\mu = \partial_\mu - gA^a{}_\mu I_{(a)}$$

poderia ser rotulado de *derivada covariante* (de gauge) pois o objeto $\nabla_\mu \phi^A$ teria uma lei de transformação com a mesma forma daquela apresentada por ϕ^A, $\delta\phi^A = \epsilon^a I_{(a)}{}^A{}_B \phi^B$, Eq. (10). Temos argumentos fortes e naturais o suficiente para defender a covariância de ∇_μ e, por conseguinte, o anulamento do último termo em (28). Veremos tais argumentos quando retornarmos ao nosso objetivo inicial de avaliarmos $\delta\mathcal{L}''_M$.

Inserindo (28) em (27):

$$\delta\mathcal{L}''_M = \epsilon^a(x)\left[\frac{\partial\mathcal{L}''_M}{\partial\phi^A} I_{(a)}{}^A{}_B \phi^B + \frac{\partial\mathcal{L}''_M}{\partial(\nabla_\mu\phi^A)} I_{(a)}{}^A{}_B \nabla_\mu\phi^B + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial\mathcal{L}''_M}{\partial(\nabla_\mu\phi^A)}\left(f_a{}^c{}_b\delta^\nu{}_\mu - S_{(a)}{}^c{}_\mu{}^\nu{}_b\right) A^b{}_\nu I_{(c)}{}^A{}_B\phi^B\right] = 0,$$

tendo sido substituída a expressão $\delta\phi^A$. Como esta equação deve valer para todo x e ϵ^a são funções arbitrárias independentes,

$$\frac{\partial\mathcal{L}''_M}{\partial\phi^A} I_{(a)}{}^A{}_B \phi^B + \frac{\partial\mathcal{L}''_M}{\partial(\nabla_\mu\phi^A)} I_{(a)}{}^A{}_B \nabla_\mu\phi^B +$$
$$+ \frac{\partial\mathcal{L}''_M}{\partial(\nabla_\mu\phi^A)}\left(f_a{}^c{}_b\delta^\nu{}_\mu - S_{(a)}{}^c{}_\mu{}^\nu{}_b\right) A^b{}_\nu I_{(c)}{}^A{}_B\phi^B = 0. \quad (29)$$

Perceba a semelhança desta identidade com a equação de movimento análoga, Eq. (8),

$$\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial\phi^A} I_{(a)}{}^A{}_B \phi^B + \frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial(\partial_\mu\phi^A)} I_{(a)}{}^A{}_B \partial_\mu\phi^B = 0, \quad (30)$$

derivada para o caso em que G_n é o grupo de transformações (a ϵ^a constantes) atuando sobre o sistema de campos $\phi^A(x)$ caracterizado pela densidade lagrangiana $\mathcal{L}_M\left[\phi^A; \partial_\mu\phi^A\right]$. Lembre, ainda, que $S_{(a)}{}^c{}_\mu{}^\nu{}_b$ é constante a ser determinada e poderia ser escolhida para anular a segunda linha de (29).

Espera-se que uma teoria mais geral seja capaz de reproduzir os resultados da teoria particular. Conforme esta premissa, os resultados da análise da invariância de $\mathcal{L}_M\left[\phi^A; \partial_\mu\phi^A\right]$ sob ação do grupo de G_n devem ser recuperados em algum limite apropriado dos resultados encontrados pelo estudo da invariância do mesmo sistema $\phi^A(x)$ sob o grupo mais geral $G_{\infty n}$ em que $\epsilon^a = \epsilon^a(x)$.

A generalização em nosso procedimento consistiu da introdução do campo $A^a{}_\mu$. Faz sentido, pois, considerar o comportamento de $\mathcal{L}''_M$ no limite em que o potencial $A^a{}_\mu$ é nulo. Nessa circunstância é fato que

$$\nabla_\mu\phi^A \to \partial_\mu\phi^A \qquad \left(A^a{}_\mu \to 0\right)$$

[vide (22)] e portanto,

$$\mathcal{L}''_M\left[\phi^A; \nabla_\mu\phi^A\right] \to \mathcal{L}''_M\left[\phi^A; \partial_\mu\phi^A\right] =$$
$$= \mathcal{L}'_M\left[\phi^A; \partial_\mu\phi^A; A^a{}_\mu \to 0\right] = \mathcal{L}_M\left[\phi^A; \partial_\mu\phi^A\right],$$

i.e., voltamos às variáveis iniciais de descrição do sistema: ϕ e $\partial_\mu\phi$. Dada a identificação entre $\nabla\phi$ e $\partial\phi$ para $A^a{}_\mu \to 0$, esta relação pode ser posta na forma ainda mais sugestiva:

$$\mathcal{L}''_M\left[\phi^A; \nabla_\mu\phi^A\right] = \mathcal{L}_M\left[\phi^A; \nabla_\mu\phi^A\right] \qquad \left(A^a{}_\mu \to 0\right). \quad (31)$$

Se estendermos esta identificação além do limite mencionado obtemos uma ***prescrição de acoplamento mínimo***:[11] ao introduzir o campo $A^a{}_\mu$ a interagir com ϕ^A devemos substituir a derivada ordinária $\partial_\mu\phi^A$ na densidade lagrangiana de partida $\mathcal{L}_M\left[\phi^A; \partial_\mu\phi^A\right]$ pelo objeto $\nabla_\mu\phi^A$. Dizendo ainda de outra forma, a “interpretação teórica da interação” é a prescrição:

$$\partial_\mu\phi^A \quad \overset{\text{int}}{\to} \nabla_\mu\phi^A \Rightarrow \mathcal{L}_{M+\text{int}}\left[\phi^A; \nabla_\mu\phi^A\right] \equiv$$
$$\equiv \mathcal{L}''_M\left[\phi^A; \nabla_\mu\phi^A\right] = \mathcal{L}_M\left[\phi^A; \nabla_\mu\phi^A\right]. \quad (32)$$

A importância desta prescrição é, nada menos que, a fixação de covariância de $\nabla_\mu\phi^A$. Em verdade, aplicando a regra $\partial_\mu \to \nabla_\mu$ à (30), segue:

$$\frac{\partial\mathcal{L}_{M+\text{int}}}{\partial\phi^A} I_{(a)}{}^A{}_B \phi^B + \frac{\partial\mathcal{L}_{M+\text{int}}}{\partial(\nabla_\mu\phi^A)} I_{(a)}{}^A{}_B \nabla_\mu\phi^B = 0.$$

Substituindo (32) em (29):

$$\frac{\partial\mathcal{L}_{M+\text{int}}}{\partial\phi^A} I_{(a)}{}^A{}_B \phi^B + \frac{\partial\mathcal{L}_{M+\text{int}}}{\partial(\nabla_\mu\phi^A)} I_{(a)}{}^A{}_B \nabla_\mu\phi^B +$$
$$+ \frac{\partial\mathcal{L}_{M+\text{int}}}{\partial(\nabla_\mu\phi^A)}\left(f_a{}^c{}_b\delta^\nu{}_\mu - S_{(a)}{}^c{}_\mu{}^\nu{}_b\right) A^b{}_\nu I_{(c)}{}^A{}_B\phi^B = 0.$$

[11] Qualifica-se “mínimo” o acoplamento em que os campos de matéria ϕ^A interagem (contraem-se) com o potencial de gauge A^a_μ mas não com suas derivadas.

 DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2018-0007

Confrontando as duas últimas equações,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{M+\text{int}}}{\partial \left(\nabla_{\mu}\phi^{A}\right)}\left(f_{a\ b}^{\ c}\delta^{\nu}_{\ \mu} - S_{(a)\ \mu\ b}^{\ \ c\ \nu}\right)A^{b}_{\ \nu}I_{(c)\ B}^{\ \ A}\phi^{B} = 0$$

e os coeficientes $S_{(a)\ \mu\ b}^{\ \ c\ \nu}$ desconhecidos ficam determinados

$$S_{(a)\ \mu\ b}^{\ \ c\ \nu} = f_{a\ b}^{\ c}\delta^{\nu}_{\ \mu}. \tag{33}$$

Ao substituirmos a expressão (33) para S em (28) fica explícito o caráter covariante da derivada $\nabla_{\mu}\phi^{A}$

$$\delta\left(\nabla_{\mu}\phi^{A}\right) = \epsilon^{a}I_{(a)\ B}^{\ \ A}\left(\nabla_{\mu}\phi^{B}\right). \tag{34}$$

Outrossim, a forma da variação do potencial $A^{c}_{\ \nu}$ (26) fica completamente determinada

$$\delta A^{c}_{\ \nu} = \epsilon^{a}f_{a\ b}^{\ c}A^{b}_{\ \nu} + \frac{1}{g}\partial_{\nu}\epsilon^{c}. \tag{35}$$

O tipo de construção aqui apresentado, com a aplicação da prescrição $\partial_{\mu} \to \nabla_{\mu}$, mimetiza a Prescrição do Acoplamento Mínimo que compõe o arcabouço da Relatividade Geral. Nesta teoria o acoplamento mínimo tem a função de estabelecer a interação do campo gravitacional com o campo de matéria. Em analogia a este exemplo, entendemos a substituição da derivada ordinária $\partial\phi$ pela derivada covariante $\nabla\phi$ como uma forma de descrever a *interação* entre o campo ϕ e o descrito por A^{a}_{μ}. E isto motiva a investigação do tipo possível de equação de movimento satisfeita pelo potencial de calibre A^{a}_{μ} e, em nível mais fundamental, qual a densidade lagrangiana associada a este campo. Faremos isto a seguir, na seção 3.2. Antes disso, cabe ainda uma observação sobre a prescrição de acoplamento mínimo (32).

Na argumentação dos parágrafos anteriores consideramos a redução da densidade lagrangiana $\mathcal{L}''_{M}$ que inclui os novos campos à original $\mathcal{L}_{M}$ no limite em que $A^{a}_{\mu} \to 0$. Alternativamente, poderíamos ter concretizado esse limite na constante de acoplamento g que regula a intensidade da interação. Aliás, essa versão é conveniente quando desejamos separar $\mathcal{L}_{M+\text{int}}\left[\phi^{A};\nabla_{\mu}\phi^{A}\right]$ em um setor contendo os termos de matéria livre, $\mathcal{L}_{M}$, e outro com termos de interação, $\mathcal{L}_{\text{int}}$, envolvendo o potencial de gauge:

$$\mathcal{L}_{M+\text{int}} = \mathcal{L}_{M} + \mathcal{L}_{\text{int}}, \tag{36}$$

A separação acima acontece quando substituímos a forma funcional explícita da derivada covariante – Eq. (22) – em $\mathcal{L}_{M+\text{int}}$ e agrupamos os termos contendo apenas as derivadas ordinárias, o qual dará a densidade lagrangiana original $\mathcal{L}_{M}$; os termos restantes constituirão a densidade lagrangiana de interação $\mathcal{L}_{\text{int}}$. Assim, a densidade lagrangiana $\mathcal{L}_{M+\text{int}}$ pode ser expandida em potências da constante de acoplamento:

$$\mathcal{L}_{M+\text{int}} = \mathcal{L}_{M} \underbrace{-g\frac{\partial \mathcal{L}_{M}}{\partial\left(\partial_{\mu}\phi^{A}\right)}I_{(a)\ B}^{\ \ A}\phi^{B}A^{a}_{\mu} + \frac{g^{2}}{2}\frac{\partial^{2}\mathcal{L}_{M}}{\partial\left(\partial_{\mu}\phi^{A}\right)\partial\left(\partial_{\nu}\phi^{C}\right)}I_{(a)\ B}^{\ \ A}I_{(b)\ D}^{\ \ C}\phi^{B}\phi^{D}A^{a}_{\mu}A^{b}_{\ \nu}}_{\mathcal{L}_{\text{int}}}, \tag{37}$$

fato que segue da hipótese de uma teoria em que as equações de Euler-Lagrange são de até segunda ordem, i.e. a dependência de $\mathcal{L}_{M}$ com as derivadas primeiras dos campos de matéria dão-se, no máximo, com termos quadráticos nas ditas derivadas $\partial_{\mu}\phi^{A}$. Ademais, vide-se a Eq. (21). As teorias que possuem derivadas *segundas* de $\mathcal{L}_{M+\text{int}}$ com respeito $\partial_{\mu}\phi^{A}$ nulas, i.e.

$$\frac{\partial^{2}\mathcal{L}_{M}}{\partial\left(\partial_{\mu}\phi^{A}\right)\partial\left(\partial_{\nu}\phi^{C}\right)} = 0,$$

são chamadas de *teorias lineares*; nelas aparece apenas o termo linear na constante de acoplamento g (i.e. o termo em g^{2} de (37) é nulo), e as equação de movimento para os campos é de primeira ordem nas suas derivadas. Essa classe de teorias inclui a de Dirac.

Como resultado principal desta seção, vimos o aparecimento da derivada covariante como uma necessidade para manter a densidade lagrangiana invariante sobre um grupo de transformações locais. Geometricamente, isso é equivalente a atribuir um espaço interno das variáveis do sistema a cada ponto do espaço-tempo. É em cada espaço interno rotulado pelo índice a de $\epsilon^{a}(x)$ que a transformação do grupo acontece; essa transformação é diferente ponto a ponto, mas ela evolui suavente de um ponto a outro, uma vez que as funções $\epsilon^{a}(x)$ são deriváveis. A derivada covariante da teoria de campos de gauge garante a invariância das equações de movimento na passagem de um espaço interno a outro através do termo que carrega o potencial de gauge $A^{a}_{\mu}(x)$. Neste ponto, novamente vemos a semelhança com a Relatividade Geral: a derivada covariante pelo grupo de transformações gerais de coordenadas permite manter as equações físicas invariantes em forma ao passar de um espaço tangente a outro; isso se dá pela presença dos coeficientes da conexão $\Gamma(x)$.

Até aqui, abordamos as questões de 1 a 3 postas na seção 2. A seguir, vamos lidar com o ponto 4 levantado naquela mesma seção.

3.2. Densidade lagrangiana para o potencial A livre

Assumiremos que a densidade lagrangiana $\mathcal{L}_{A}$ do campo auxiliar contém até derivadas de primeira ordem de $A^{a}_{\ \mu}$,[12]

$$\mathcal{L}_{A}\left[A^{a}_{\ \mu};\partial_{\nu}A^{a}_{\ \mu}\right](x), \qquad \partial_{\nu}A^{a}_{\ \mu} \equiv \frac{\partial A^{a}_{\ \mu}}{\partial x^{\nu}}$$

[12] No trabalho [10] faz-se a extensão da teoria para o caso em que $\mathcal{L}_{A} = \mathcal{L}_{A}\left[A^{a}_{\ \mu};\partial_{\nu}A^{a}_{\ \mu};\partial_{\rho}\partial_{\nu}A^{a}_{\ \mu}\right](x)$.

e que esta densidade lagrangiana é invariante pela transformação (35). Então,

$$\delta\mathcal{L}_A \equiv \frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial A^a_{\ \mu}}\delta A^a_{\ \mu} + \frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial\left(\partial_\nu A^a_{\ \mu}\right)}\delta\left(\partial_\nu A^a_{\ \mu}\right) = 0.$$

e, como

$$\begin{aligned}\delta\left(\partial_\nu A^a_{\ \mu}\right) &= \partial_\nu\left(\delta A^a_{\ \mu}\right) = \epsilon^c f_{c\ b}^{\ a}\partial_\nu A^b_{\ \mu} + \partial_\nu\epsilon^c f_{c\ b}^{\ a} A^b_{\ \mu} + \\ &+ \frac{1}{g}\partial_\nu\partial_\mu\epsilon^a,\end{aligned} \tag{38}$$

temos:

$$\delta\mathcal{L}_A \equiv \frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial A^a_{\ \mu}}\left(\epsilon^c f_{c\ b}^{\ a} A^b_{\ \mu} + \frac{1}{g}\partial_\mu\epsilon^a\right) + \frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial\left(\partial_\nu A^a_{\ \mu}\right)}\left(\epsilon^c f_{c\ b}^{\ a}\partial_\nu A^b_{\ \mu} + \partial_\nu\epsilon^c f_{c\ b}^{\ a} A^b_{\ \mu} + \frac{1}{g}\partial_\nu\partial_\mu\epsilon^a\right).$$

Reunindo os termos com ϵ, $\partial\epsilon$ e agora também $\partial^2\epsilon$ escrevemos

$$\begin{aligned}\epsilon^c\left[\frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial A^a_{\ \mu}} f_{c\ b}^{\ a} A^b_{\ \mu} + \frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial\left(\partial_\nu A^a_{\ \mu}\right)} f_{c\ b}^{\ a}\partial_\nu A^b_{\ \mu}\right] + \partial_\nu\epsilon^c\left[\frac{1}{g}\frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial A^c_{\ \nu}} + \frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial\left(\partial_\nu A^a_{\ \mu}\right)} f_{c\ b}^{\ a} A^b_{\ \mu}\right] + \\ + \frac{1}{g}\left[\frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial\left(\partial_\nu A^a_{\ \mu}\right)}\right]\partial_\nu\partial_\mu\epsilon^a = 0,\end{aligned}$$

Como ϵ^a e suas derivadas devem ser independentes, seguem as *equações hierárquicas* para a densidade lagrangiana do potencial de gauge livre:

$$\frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial A^a_{\ \mu}} f_{c\ b}^{\ a} A^b_{\ \mu} + \frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial\left(\partial_\nu A^a_{\ \mu}\right)} f_{c\ b}^{\ a}\partial_\nu A^b_{\ \mu} = 0, \tag{39}$$

$$\frac{1}{g}\frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial A^a_{\ \mu}} + \frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial\left(\partial_\mu A^c_{\ \nu}\right)} f_{a\ b}^{\ c} A^b_{\ \nu} = 0, \tag{40}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial\left(\partial_\nu A^a_{\ \mu}\right)} + \frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial\left(\partial_\mu A^a_{\ \nu}\right)} = 0. \tag{41}$$

Para escrever (41) usamos $\frac{\partial^2\epsilon^a}{\partial x^\nu\partial x^\mu} = \frac{\partial^2\epsilon^a}{\partial x^\mu\partial x^\nu}$, garantindo a simetria de troca $\mu\leftrightarrow\nu$:

$$\frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial\left(\partial_\nu A^a_{\ \mu}\right)}\partial_\nu\partial_\mu\epsilon^a = \frac{1}{2}\frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial\left(\partial_\nu A^a_{\ \mu}\right)}\partial_\nu\partial_\mu\epsilon^a + \frac{1}{2}\frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial\left(\partial_\mu A^a_{\ \nu}\right)}\partial_\mu\partial_\nu\epsilon^a = \frac{1}{2}\partial_\nu\partial_\mu\epsilon^a\left[\frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial\left(\partial_\nu A^a_{\ \mu}\right)} + \frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial\left(\partial_\mu A^a_{\ \nu}\right)}\right].$$

Conforme o argumento do **Comentário** da seção 3.1, a última das equações hierárquicas (41) estabelece que a derivada de $A^a_{\ \mu}$ deve estar contida em $\mathcal{L}_A$ através da combinação

$$A^a_{\ [\mu,\nu]} \equiv \partial_\mu A^a_{\ \nu} - \partial_\nu A^a_{\ \mu}. \tag{42}$$

Em termos deste novo objeto,

$$\mathcal{L}_A\left[A^a_{\ \mu};\partial_\nu A^a_{\ \mu}\right] = \mathcal{L}'_A\left[A^a_{\ \mu};A^a_{\ [\mu,\nu]}\right]$$

e

$$\frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial\left(\partial_\mu A^c_{\ \nu}\right)} = \frac{1}{2}\frac{\partial\mathcal{L}'_A}{\partial A^b_{\ [\rho,\sigma]}}\frac{\partial A^b_{\ [\rho,\sigma]}}{\partial\left(\partial_\mu A^c_{\ \nu}\right)} = \frac{1}{2}\frac{\partial\mathcal{L}'_A}{\partial A^b_{\ [\rho,\sigma]}}\left[\delta^b_{\ c}\delta^\mu_{\ \rho}\delta^\nu_{\ \sigma} - \delta^b_{\ c}\delta^\mu_{\ \sigma}\delta^\nu_{\ \rho}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\mathcal{L}'_A}{\partial A^c_{\ [\mu,\nu]}} - \frac{\partial\mathcal{L}'_A}{\partial A^c_{\ [\nu,\mu]}}\right).$$

O fator 1/2 nesta expressão foi introduzido para dar cabo da dupla contagem de termos idênticos,[13] termos esses oriundos da contração dos dois objetos antissimétricos $\frac{\partial\mathcal{L}'_A}{\partial A^b_{\ [\rho,\sigma]}}$ e $\frac{\partial A^b_{\ [\rho,\sigma]}}{\partial(\partial_\mu A^c_{\ \nu})}$. Da própria definição (42), $A^a_{\ [\nu,\mu]} = -A^a_{\ [\mu,\nu]}$. Logo, $\frac{\partial\mathcal{L}'_A}{\partial A^c_{\ [\mu,\nu]}} = -\frac{\partial\mathcal{L}'_A}{\partial A^c_{\ [\nu,\mu]}}$ e

$$\frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial\left(\partial_\mu A^c_{\ \nu}\right)} = \frac{\partial\mathcal{L}'_A}{\partial A^c_{\ [\mu,\nu]}} = -\frac{\partial\mathcal{L}'_A}{\partial A^c_{\ [\nu,\mu]}}, \tag{43}$$

com o que realmente verificamos (41),

$$\frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial\left(\partial_\nu A^a_{\ \mu}\right)} + \frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial\left(\partial_\mu A^a_{\ \nu}\right)} = \left(\frac{\partial\mathcal{L}'_A}{\partial A^c_{\ [\nu,\mu]}} - \frac{\partial\mathcal{L}'_A}{\partial A^c_{\ [\nu,\mu]}}\right) = 0,$$

[13] Sejam $\Theta_{\rho\sigma} = -\Theta_{\sigma\rho}$ e $\Omega_{\rho\sigma} = -\Omega_{\sigma\rho}$ dois objetos antissimétricos quaisquer, com $\rho,\sigma = 1,2$. Então, $\Theta_{\rho\rho} = \Omega_{\rho\rho} = 0$ e $\Theta_{\rho\sigma}\Omega^{\rho\sigma} = \Theta_{12}\Omega^{12} + \Theta_{21}\Omega^{21} = \Theta_{12}\Omega^{12} + (-\Theta_{12})\left(-\Omega^{12}\right) = 2\Theta_{12}\Omega^{12}$; o que mostra a dupla contagem em um exemplo trivial.

e reescrevemos (40):

$$\frac{1}{g}\frac{\partial\mathcal{L}'_A}{\partial A^a_{\ \mu}}+\frac{\partial\mathcal{L}'_A}{\partial A^c_{\ [\mu,\nu]}}f_a{}^c{}_b A^b{}_\nu=0. \tag{44}$$

Novamente, o raciocínio do **Comentário** aplicado à (44) motiva a conclusão de que a derivada de $A^a_{\ \mu}$ aparece em $\mathcal{L}'_A$ somente através da combinação

$$F^c{}_{\mu\nu}=A^c{}_{[\mu,\nu]}-gf_a{}^c{}_b A^a{}_\mu A^b{}_\nu$$

ou

$$F^a_{\ \mu\nu}=\partial_\mu A^a{}_\nu-\partial_\nu A^a{}_\mu-gf_b{}^a{}_c A^b{}_\mu A^c{}_\nu. \tag{45}$$

O objeto $F^a_{\ \mu\nu}$, doravante chamado *tensor intensidade de campo*, é antissimétrico nos índices de espaço-tempo, como fica claro ao transferirmos a antissimetria de $f_b{}^a{}_c$ – Eq. (6) – para o par $A^b{}_\mu A^c{}_\nu$ de (45):

$$\begin{aligned}f_b{}^a{}_c A^b{}_\mu A^c{}_\nu&=\frac{1}{2}f_b{}^a{}_c A^b{}_\mu A^c{}_\nu+\frac{1}{2}f_b{}^a{}_c A^b{}_\mu A^c{}_\nu=\frac{1}{2}\left(f_b{}^a{}_c A^b{}_\mu A^c{}_\nu+f_c{}^a{}_b A^c{}_\mu A^b{}_\nu\right)=\\&=\frac{1}{2}\left(f_b{}^a{}_c A^b{}_\mu A^c{}_\nu-f_b{}^a{}_c A^c{}_\mu A^b{}_\nu\right)\end{aligned}$$

e, portanto,

$$F^a_{\ \mu\nu}=\partial_\mu A^a{}_\nu-\partial_\nu A^a{}_\mu-\frac{1}{2}gf_b{}^a{}_c\left(A^b{}_\mu A^c{}_\nu-A^b{}_\nu A^c{}_\mu\right). \tag{46}$$

Tendo definido este novo objeto, passamos a escrever

$$\mathcal{L}'_A\left(A^a{}_\mu,A^a{}_{[\mu,\nu]}\right)=\mathcal{L}''_A\left(A^a{}_\mu,F^a_{\ \mu\nu}\right).$$

Com esta identificação, observamos que $F^a_{\ \mu\nu}$ verifica a segunda das equações hierárquicas na forma (44). Primeiro, obtemos de (45), $F^d_{\ \rho\sigma}=A^d{}_{[\rho,\sigma]}-gf_g{}^d{}_h A^g{}_\rho A^h{}_\sigma$, que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}'_A}{\partial A^a_{\ \mu}}&=\frac{1}{2}\frac{\partial\mathcal{L}''_A}{\partial F^d_{\ \rho\sigma}}\frac{\partial F^d{}_{\rho\sigma}}{\partial A^a_{\ \mu}}=\frac{1}{2}\frac{\partial\mathcal{L}''_A}{\partial F^d_{\ \rho\sigma}}\left[-gf_g{}^d{}_h\left(\delta^g{}_a\delta^\mu{}_\rho A^h{}_\sigma+A^g{}_\rho\delta^h{}_a\delta^\mu{}_\sigma\right)\right]=\\&=-\frac{1}{2}g\left(f_a{}^d{}_h\frac{\partial\mathcal{L}''_A}{\partial F^d_{\ \mu\sigma}}A^h{}_\sigma+f_g{}^d{}_a A^g{}_\rho\frac{\partial\mathcal{L}''_A}{\partial F^d_{\ \rho\mu}}\right)=-\frac{1}{2}g\left(\frac{\partial\mathcal{L}''_A}{\partial F^d_{\ \mu\rho}}f_a{}^d{}_g A^g{}_\rho+\frac{\partial\mathcal{L}''_A}{\partial F^d_{\ \rho\mu}}f_g{}^d{}_a A^g{}_\rho\right),\end{aligned}$$

onde, mais uma vez, inserimos 1/2 para eliminar contagem de termos repetidos. Como $f_g{}^d{}_a=-f_a{}^d{}_g$ mas também $F^d_{\ \rho\mu}=-F^d_{\ \mu\rho}$:

$$\frac{\partial\mathcal{L}'_A}{\partial A^a_{\ \mu}}=-g\frac{\partial\mathcal{L}''_A}{\partial F^d_{\ \mu\rho}}f_a{}^d{}_g A^g{}_\rho. \tag{47}$$

Depois, calculamos:

$$\frac{\partial\mathcal{L}'_A}{\partial A^c_{\ [\mu,\nu]}}=\frac{\partial\mathcal{L}''_A}{\partial F^d_{\ \rho\sigma}}\frac{\partial F^d{}_{\rho\sigma}}{\partial A^c_{\ [\mu,\nu]}}=\frac{\partial\mathcal{L}''_A}{\partial F^d_{\ \rho\sigma}}\left(\delta^d{}_c\delta^\mu{}_\rho\delta^\nu{}_\sigma\right)=\frac{\partial\mathcal{L}''_A}{\partial F^c_{\ \mu\nu}}. \tag{48}$$

Com (47) e (48) reexpressamos o primeiro membro de (44):

$$\frac{1}{g}\frac{\partial\mathcal{L}'_A}{\partial A^a_{\ \mu}}+\frac{\partial\mathcal{L}'_A}{\partial A^c_{\ [\mu,\nu]}}f_a{}^c{}_b A^b{}_\nu=0,$$

$$\frac{1}{g}\frac{\partial\mathcal{L}'_A}{\partial A^a_{\ \mu}}+\frac{\partial\mathcal{L}'_A}{\partial A^c_{\ [\mu,\nu]}}f_a{}^c{}_b A^b{}_\nu=-\frac{\partial\mathcal{L}''_A}{\partial F^c_{\ \mu\nu}}f_a{}^c{}_b A^b{}_\nu+\frac{\partial\mathcal{L}''_A}{\partial F^c_{\ \mu\nu}}f_a{}^c{}_b A^b{}_\nu=0,$$

como deveria ser.

Neste ponto coloca-se a pergunta: como transforma-se o tensor intensidade de campo sob $G_{\infty n}$? Responderemos esta pergunta ao encontrarmos $\delta F^a_{\ \mu\nu}$. De (45):

$$\delta F^a_{\ \mu\nu}=\delta\left(\partial_\mu A^a{}_\nu\right)-\delta\left(\partial_\nu A^a{}_\mu\right)-gf_b{}^a{}_c\left(\delta A^b{}_\mu\right)A^c{}_\nu-gf_b{}^a{}_c A^b{}_\mu\left(\delta A^c{}_\nu\right).$$

Substituindo (35) e (38) para $\delta A^a{}_\mu$ e $\delta\left(\partial_\mu A^a{}_\nu\right)$:

$$\begin{aligned}\delta F^a_{\ \mu\nu}&=\epsilon^c f_c{}^a{}_b\partial_\mu A^b{}_\nu+\partial_\mu\epsilon^c f_c{}^a{}_b A^b{}_\nu+\frac{1}{g}\partial_\mu\partial_\nu\epsilon^a-\left(\epsilon^c f_c{}^a{}_b\partial_\nu A^b{}_\mu+\partial_\nu\epsilon^c f_c{}^a{}_b A^b{}_\mu+\frac{1}{g}\partial_\nu\partial_\mu\epsilon^a\right)+\\&\quad-gf_b{}^a{}_c\left(\epsilon^d f_d{}^b{}_g A^g{}_\mu+\frac{1}{g}\partial_\mu\epsilon^b\right)A^c{}_\nu-gf_b{}^a{}_c A^b{}_\mu\left(\epsilon^d f_d{}^c{}_g A^g{}_\nu+\frac{1}{g}\partial_\nu\epsilon^c\right).\end{aligned}$$

Como $\partial_\mu\partial_\nu\epsilon^a = \partial_\nu\partial_\mu\epsilon^a$, resta-nos

$$\begin{aligned}\delta F^a_{\ \mu\nu} = \epsilon^d\left[f_{d\ b}^{\ a}\left(\partial_\mu A^b_{\ \nu} - \partial_\nu A^b_{\ \mu}\right) - g f_{b\ c}^{\ a} f_{d\ g}^{\ b} A^g_{\ \mu} A^c_{\ \nu} - g f_{b\ c}^{\ a} f_{d\ g}^{\ c} A^b_{\ \mu} A^g_{\ \nu}\right] + \\ + \partial_\mu\epsilon^c\left(f_{c\ b}^{\ a} - f_{c\ b}^{\ a}\right) A^b_{\ \nu} - \partial_\nu\epsilon^c\left(f_{c\ b}^{\ a} + f_{b\ c}^{\ a}\right) A^b_{\ \mu},\end{aligned}$$

que obtivemos ao reunir os termos com ϵ e aqueles com $\partial\epsilon$, após renomeações adequadas dos índices mudos. Note como os termos em $\partial\epsilon$ anulam-se: o primeiro deles imediatamente e o segundo depois de usarmos a antissimetria dos $f_{b\ c}^{\ a}$, Eq. (6). Então,

$$\begin{aligned}\delta F^a_{\ \mu\nu} &= \epsilon^d\left[f_{d\ b}^{\ a} A^b_{\ [\mu,\nu]} - g f_{b\ c}^{\ a} f_{d\ g}^{\ b} A^g_{\ \mu} A^c_{\ \nu} - g f_{g\ b}^{\ a} f_{d\ c}^{\ b} A^g_{\ \mu} A^c_{\ \nu}\right] = \\ &= \epsilon^d\left[f_{d\ b}^{\ a} A^b_{\ [\mu,\nu]} - g\left(f_{d\ g}^{\ b} f_{b\ c}^{\ a} - f_{d\ c}^{\ b} f_{b\ g}^{\ a}\right) A^g_{\ \mu} A^c_{\ \nu}\right].\end{aligned}$$

Utilizando a ciclicidade dos $f_{b\ c}^{\ a}$ estabelecida em (4), $f_{d\ c}^{\ b} f_{b\ g}^{\ a} = -f_{c\ g}^{\ b} f_{b\ d}^{\ a} - f_{g\ d}^{\ b} f_{b\ c}^{\ a}$,

$$\delta F^a_{\ \mu\nu} = \epsilon^d\left[f_{d\ b}^{\ a} A^b_{\ [\mu,\nu]} - g\left(f_{d\ g}^{\ b} f_{b\ c}^{\ a} + f_{c\ g}^{\ b} f_{b\ d}^{\ a} + f_{g\ d}^{\ b} f_{b\ c}^{\ a}\right) A^g_{\ \mu} A^c_{\ \nu}\right].$$

O primeiro e o terceiro termos cancelam-se levando a

$$\delta F^a_{\ \mu\nu} = \epsilon^d f_{d\ b}^{\ a}\left[A^b_{\ [\mu,\nu]} - g f_{g\ c}^{\ b} A^g_{\ \mu} A^c_{\ \nu}\right],$$

i.e., cf. (45),

$$\delta F^a_{\ \mu\nu} = \epsilon^c f_{c\ b}^{\ a} F^b_{\ \mu\nu} \tag{49}$$

e portanto as n quantidades $F^1_{\ \mu\nu}, F^2_{\ \mu\nu}, ...F^n_{\ \mu\nu}$, transformam-se co-gradientemente à transformação de ϕ: a variação δF tem a mesma forma que $\delta\phi$ com os coeficientes de estrutura da álgebra $f_{c\ b}^{\ a}$ no lugar dos geradores da transformação $I_{(a)\ B}^{\ \ A}$ – compare (10) e (49). Para observar isso explicitamente, definam-se n matrizes quadradas $M_{(c)}$ de ordem $n \times n$ e componentes

$$M_{(c)\ b}^{\ \ a} = f_{c\ b}^{\ a}.$$

Então,

$$\begin{aligned}\left[M_{(a)}, M_{(b)}\right]^c_{\ d} &= M_{(a)\ e}^{\ \ c} M_{(b)\ d}^{\ \ e} - M_{(b)\ e}^{\ \ c} M_{(c)\ d}^{\ \ e} \\ &= f_{a\ e}^{\ c} f_{b\ d}^{\ e} + f_{b\ e}^{\ c} f_{d\ a}^{\ e} = f_{d\ e}^{\ c} f_{a\ b}^{\ e} = f_{a\ b}^{\ e} M_{(e)\ d}^{\ \ c},\end{aligned} \tag{50}$$

onde usamos antissimetria de $f_{a\ d}^{\ e}$ nos indices inferiores e a identidade de Jacobi (4). O resultado (50) mostra que $M_{(c)}$ seguem a mesma algebra (3) das matrizes $I_{(c)}$. Logo, as matrizes $M_{(c)}$ constituem uma representação do grupo G_n, a qual é chamada regular ou *representação adjunta* do grupo.

Falta analisarmos a primeira das equações hierárquicas, Eq. (39), em termos de F. Substituindo (40) em (39) segue que:

$$\left(-g\frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial\left(\partial_\mu A^d_{\ \nu}\right)} f_{a\ g}^{\ d} A^g_{\ \nu}\right) f_{c\ b}^{\ a} A^b_{\ \mu} + \frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial\left(\partial_\nu A^a_{\ \mu}\right)} f_{c\ b}^{\ a}\partial_\nu A^b_{\ \mu} \equiv 0,$$

ou

$$-g\frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial\left(\partial_\nu A^a_{\ \mu}\right)} f_{c\ b}^{\ d} f_{d\ g}^{\ a} A^g_{\ \mu} A^b_{\ \nu} + \frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial\left(\partial_\nu A^a_{\ \mu}\right)} f_{c\ b}^{\ a}\partial_\nu A^b_{\ \mu} \equiv 0.$$

Usando (43) e (48), i.e.,

$$\frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial\left(\partial_\nu A^a_{\ \mu}\right)} = -\frac{\partial\mathcal{L}'_A}{\partial A^a_{\ [\mu,\nu]}} = -\frac{\partial\mathcal{L}''_A}{\partial F^a_{\ \mu\nu}}, \tag{51}$$

avaliamos

$$g\frac{\partial\mathcal{L}''_A}{\partial F^a_{\ \mu\nu}} f_{c\ b}^{\ d} f_{d\ g}^{\ a} A^g_{\ \mu} A^b_{\ \nu} + g\frac{\partial\mathcal{L}''_A}{\partial F^a_{\ \nu\mu}} f_{c\ b}^{\ d} f_{d\ g}^{\ a} A^g_{\ \nu} A^b_{\ \mu} - \frac{\partial\mathcal{L}''_A}{\partial F^a_{\ \mu\nu}} f_{c\ b}^{\ a}\partial_\nu A^b_{\ \mu} - \frac{\partial\mathcal{L}''_A}{\partial F^a_{\ \nu\mu}} f_{c\ b}^{\ a}\partial_\mu A^b_{\ \nu} \equiv 0.$$

Da antissimetria de F, resulta:

$$\frac{\partial\mathcal{L}''_A}{\partial F^a_{\ \mu\nu}}\left[g f_{c\ b}^{\ d} f_{d\ g}^{\ a} A^g_{\ \mu} A^b_{\ \nu} - g f_{c\ g}^{\ d} f_{d\ b}^{\ a} A^b_{\ \nu} A^g_{\ \mu} + f_{c\ b}^{\ a}\left(\partial_\mu A^b_{\ \nu} - \partial_\nu A^b_{\ \mu}\right)\right] \equiv 0,$$

em cujo segundo termo realizamos mudanças nos índices mudos da álgebra. Continuando,

$$\frac{\partial \mathcal{L}''_A}{\partial F^a_{\ \mu\nu}} \left[g \left(f_{c\ b}^{\ d} f_{d\ g}^{\ a} - f_{c\ g}^{\ d} f_{d\ b}^{\ a} \right) A^g_{\ \mu} A^b_{\ \nu} + f_{c\ b}^{\ a} A^b_{\ [\mu,\nu]} \right] \equiv 0.$$

Agora, recorremos à ciclicidade dos $f_{b\ c}^{\ a}$, propriedade (4), para escrever $f_{c\ g}^{\ d} f_{d\ b}^{\ a} = -f_{g\ b}^{\ d} f_{d\ c}^{\ a} - f_{b\ c}^{\ d} f_{d\ g}^{\ a}$ e

$$\frac{\partial \mathcal{L}''_A}{\partial F^a_{\ \mu\nu}} \left[g \left(f_{c\ b}^{\ d} f_{d\ g}^{\ a} + f_{g\ b}^{\ d} f_{d\ c}^{\ a} + f_{b\ c}^{\ d} f_{d\ g}^{\ a} \right) A^g_{\ \mu} A^b_{\ \nu} + f_{c\ d}^{\ a} A^d_{\ [\mu,\nu]} \right] \equiv 0.$$

O primeiro termo entre parênteses cancela o terceiro devido à propriedade de antissimetria (6), $f_{c\ b}^{\ d} = -f_{b\ c}^{\ d}$. Ficamos com

$$\frac{\partial \mathcal{L}''_A}{\partial F^a_{\ \mu\nu}} f_{c\ b}^{\ a} \left[A^b_{\ [\mu,\nu]} - g f_{g\ d}^{\ b} A^g_{\ \mu} A^d_{\ \nu} \right] \equiv 0,$$

onde reconhecemos F, Eq. (45). Finalmente, obtemos a Eq. (39) na forma

$$\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial F^a_{\ \mu\nu}} f_{c\ b}^{\ a} F^b_{\ \mu\nu} \equiv 0, \tag{52}$$

uma *condição sobre a densidade lagrangiana* $\mathcal{L}_A$. Nesta condição já usamos o fato da descrição do sistema de campos A por $\mathcal{L}_A$ ser equivalente à descrição do mesmo sistema de acordo com $\mathcal{L}'_A$ ou $\mathcal{L}''_A$, i.e.,

$$\mathcal{L}_A(A^a_{\ \mu}, \partial_\nu A^a_{\ \mu}) = \mathcal{L}''_A \left(A^a_{\ \mu}, F^a_{\ \mu\nu} \right). \tag{53}$$

Daí também segue a identidade

$$\delta \mathcal{L}_A \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial A^a_{\ \mu}} \delta A^a_{\ \mu} + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial F^a_{\ \mu\nu}} \delta F^a_{\ \mu\nu} = 0,$$

na qual se insere (35) e (49),

$$\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial A^a_{\ \mu}} \left(\epsilon^c f_{c\ b}^{\ a} A^b_{\ \mu} + \frac{1}{g} \partial_\mu \epsilon^a \right) + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial F^a_{\ \mu\nu}} \left(\epsilon^c f_{c\ b}^{\ a} F^b_{\ \mu\nu} \right) = 0,$$

para concluir,

$$\epsilon^c \left(\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial A^a_{\ \mu}} f_{c\ b}^{\ a} A^b_{\ \mu} + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial F^a_{\ \mu\nu}} f_{c\ b}^{\ a} F^b_{\ \mu\nu} \right) + \partial_\mu \epsilon^a \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial A^a_{\ \mu}} \right) = 0,$$

e da independência dos ϵ e $\partial\epsilon$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial A^a_{\ \mu}} = 0 \tag{54}$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial A^a_{\ \mu}} f_{c\ b}^{\ a} A^b_{\ \mu} + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial F^a_{\ \mu\nu}} f_{c\ b}^{\ a} F^b_{\ \mu\nu} = 0.$$

A segunda dessas equações é redundante pois já sabíamos da condição (52) que o segundo termo é nulo. A Eq. (54) informa-nos que $\mathcal{L}_A$ deve ser uma função somente de F,

$$\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_A \left(F^a_{\ \mu\nu} \right),$$

satisfazendo (52) e respeitando a lei de transformação (49).

A Eq. (54) também representa um forte vínculo às teorias de gauge. De fato, ele implica que termos do tipo $m^2 A^\mu A_\mu$ (onde m é uma constante) eventualmente presentes em $\mathcal{L}_A$ violam a invariância de gauge da teoria:[14] nesse caso, claramente, $\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial A_\mu} \propto m^2 A^\mu$ é não-nulo para m diferente de zero. Acontece que termos como esse são aqueles que dão massa ao potencial de gauge; em verdade, o parâmetro m é entendido como a massa de A. Portanto, é preciso $m = 0$ para satisfazer (54), o que significa dizer que os campos de gauge devem ser não-massivos na teoria geral de Utiyama.

[14] A invariância de gauge de uma teoria com termos do tipo $m^2 A^\mu A_\mu$ pode ser restauradas *a la* Stueckelberg [11]. Ademais, a lagrangiana de Maxwell-Chern-Simons (veja e.g. o review [12]) constitui uma teoria de gauge topologicamente massiva, embora ela seja bem definida apenas em espaços de dimensão ímpar, em particular, em $(2+1)$-dimensões (duas dimensões espaciais e uma temporal) [13].

3.3. Densidade lagrangiana total: campos em interação

Nas seções 3.1 e 3.2 respondemos as perguntas de 1 a 4 da seção 2: para manter a invariância do sistema de campos $\phi^A(x)$ sob um grupo de transformações $G_{\infty n}$ a n funções arbitrárias $\epsilon^a(x)$ é necessário introduzir um campo auxiliar $A^a{}_\mu(x)$ que respeita a lei de transformação $\delta A^c{}_\nu = \epsilon^a f_a{}^c{}_b A^b{}_\nu + \frac{1}{g}\partial_\nu \epsilon^c$ sob $G_{\infty n}$ e interage com o campo original através da prescrição de acoplamento mínimo em que a derivada ordinária $\partial_\mu \phi^A$ é substituída pela derivada covariante $\nabla_\mu \phi^A \equiv \partial_\mu \phi^A - g A^a{}_\mu I_{(a)}{}^A{}_B \phi^B$ na densidade lagrangiana de partida: $\mathcal{L}_M\left(\phi^A, \partial_\mu \phi^A\right) \rightarrow \mathcal{L}_M\left(\phi^A, \nabla_\mu \phi^A\right)$. O tipo de equações de movimento permitido para o potencial de gauge $A^a{}_\mu$ é aquele derivado da densidade lagrangiana $\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_A\left(F^a{}_{\mu\nu}\right)$, em que está presente o campo de gauge $F^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a{}_\nu - \partial_\nu A^a{}_\mu - g f_b{}^a{}_c A^b{}_\mu A^c{}_\nu$ que se transforma co-gradientemente à transformação de ϕ^A.

O quadro geral está, pois, concluído. Porém, há ainda um estudo a ser feito: E. Noether ensina-nos que a toda simetria (invariância) corresponde uma lei de conservação[15] [14]. Qual seria a corrente conservada do sistema total, composto dos campo $\phi^A(x)$ e $A^a{}_\mu(x)$? Essa é a questão 5 da seção 2. Vejamos.

A densidade lagrangiana total é

$$\mathcal{L}_T = \mathcal{L}_T\left[\phi^A; \partial_\mu \phi^A; A^a{}_\mu; \partial_\nu A^a{}_\mu\right] = \mathcal{L}_{M+\text{int}}\left[\phi^A; \nabla_\mu \phi^A\right] + \mathcal{L}_A\left[F^a{}_{\mu\nu}\right], \tag{55}$$

cuja variação deve anular-se:

$$\delta \mathcal{L}_T \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial A^a{}_\mu}\delta A^a{}_\mu + \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial\left(\partial_\nu A^a{}_\mu\right)}\delta\left(\partial_\nu A^a{}_\mu\right) + \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial \phi^A}\delta \phi^A + \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial\left(\partial_\mu \phi^A\right)}\delta\left(\partial_\mu \phi^A\right) = 0.$$

Usando $[\delta, \partial] = 0$ e a regra de Leibniz, podemos reescrever esta expressão na forma

$$\begin{aligned}\delta \mathcal{L}_T = {} & \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial A^a{}_\mu}\delta A^a{}_\mu + \partial_\nu\left(\frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial\left(\partial_\nu A^a{}_\mu\right)}\delta A^a{}_\mu\right) - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial\left(\partial_\nu A^a{}_\mu\right)}\delta A^a{}_\mu + \\ & + \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial \phi^A}\delta \phi^A + \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial\left(\partial_\mu \phi^A\right)}\delta \phi^A\right) - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial\left(\partial_\mu \phi^A\right)}\delta \phi^A,\end{aligned}$$

ou, reunindo os termos adequadamente:

$$\delta \mathcal{L}_T = \frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A^a{}_\mu}\delta A^a{}_\mu + \frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta \phi^A}\delta \phi^A + \partial_\mu\left\{\frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial\left(\partial_\mu A^a{}_\nu\right)}\delta A^a{}_\nu + \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial\left(\partial_\mu \phi^A\right)}\delta \phi^A\right\}, \tag{56}$$

onde utilizamos as abreviações

$$\frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A^a{}_\mu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial A^a{}_\mu} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial\left(\partial_\nu A^a{}_\mu\right)}, \tag{57}$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta \phi^A} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial \phi^A} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial\left(\partial_\mu \phi^A\right)}. \tag{58}$$

Substituir a forma explícita da lei de transformação de $A^a{}_\mu$, $\delta A^a{}_\mu = \epsilon^c f_c{}^a{}_b A^b{}_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu \epsilon^a$ no primeiro termo de (56) dá:

$$\frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A^a{}_\mu}\delta A^a{}_\mu = \epsilon^c \frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A^a{}_\mu} f_c{}^a{}_b A^b{}_\mu - \frac{1}{g}\epsilon^a \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A^a{}_\mu} + \frac{1}{g}\partial_\mu\left(\epsilon^a \frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A^a{}_\mu}\right).$$

Observe, também, que, de (55), segue

$$\frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial\left(\partial_\mu \phi^A\right)} = \frac{\partial \mathcal{L}_{M+\text{int}}}{\partial\left(\nabla_\mu \phi^A\right)}, \tag{59}$$

e,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial\left(\partial_\mu A^a{}_\nu\right)} = \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial\left(\partial_\mu A^a{}_\nu\right)} = \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial F^a{}_{\mu\nu}}, \tag{60}$$

tendo-se em conta (51) e identidade entre $\mathcal{L}_A$ e $\mathcal{L}''_A$ – vide por exemplo a interpretação da Eq. (53).

[15] Uma tradução para o inglês é devida a M.A. Tavel que apareceu como *Invariant Variation Problems* em Transport Theory and Statistical Physics, **1** (3), 183-207 (1971).

Com estes três últimos resultados, (56) fica:

$$\delta\mathcal{L}_T = \frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta\phi^A}\delta\phi^A + \epsilon^c\frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta A^a_{\ \mu}}f_{c\ b}^{\ a}A^b_{\ \mu} - \frac{1}{g}\epsilon^a\partial_\mu\frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta A^a_{\ \mu}} + \\ +\partial_\mu\left\{\frac{\partial\mathcal{L}_{M+\text{int}}}{\partial\left(\nabla_\mu\phi^A\right)}\delta\phi^A + \frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial F^a_{\ \mu\nu}}\delta A^a_{\ \nu} + \frac{1}{g}\epsilon^a\frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta A^a_{\ \mu}}\right\} = 0. \tag{61}$$

Essa equação pode ser compactada sob as definições:

$$K \equiv \frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta\phi^A}\delta\phi^A + \epsilon^c\frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta A^a_{\ \mu}}f_{c\ b}^{\ a}A^b_{\ \mu} - \frac{1}{g}\epsilon^a\partial_\mu\frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta A^a_{\ \mu}} \tag{62}$$

e

$$V^\mu \equiv \frac{\partial\mathcal{L}_{M+\text{int}}}{\partial\left(\nabla_\mu\phi^A\right)}\delta\phi^A + \frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial F^a_{\ \mu\nu}}\delta A^a_{\ \nu} + \frac{1}{g}\epsilon^a\frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta A^a_{\ \mu}}. \tag{63}$$

Com isso, a Eq. (61) resulta em

$$K + \partial_\mu V^\mu = 0. \tag{64}$$

Nesta forma, a equação está pronta para ser integrada na região Ω do espaço-tempo onde os campos estão definidos:

$$\int_\Omega K d^4x + \int_\Omega \left(\partial_\mu V^\mu\right) d^4x = 0. \tag{65}$$

O segundo termo pode ser reescrito: o teorema de Ostrogradski-Gauss [15] garante que a integral da divergência de V^μ no volume Ω é igual à integral de superfície ao longo da fronteira $\partial\Omega$ deste mesmo volume, i.e.

$$\int_\Omega \left(\partial_\mu V^\mu\right) d^4x = \oint_{\partial\Omega} V^\mu d\sigma_\mu, \tag{66}$$

sendo $d\sigma_\mu$ um elemento de superfície orientado em $\partial\Omega$. A integral do lado direito de (66) é o mesmo que

$$\oint_{\partial\Omega} V^\mu d\sigma_\mu = \oint_{\partial\Omega} d\sigma_\mu\epsilon^a\left[\frac{\partial\mathcal{L}_{M+\text{int}}}{\partial\left(\nabla_\mu\phi^A\right)}I_{(a)\ B}^{\ \ A}\phi^B + \frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial F^c_{\ \mu\nu}}f_{a\ b}^{\ c}A^b_{\ \nu} + \frac{1}{g}\frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta A^a_{\ \mu}}\right] + \frac{1}{g}\oint_{\partial\Omega} d\sigma_\mu\left(\partial_\nu\epsilon^a\right)\frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial F^a_{\ \mu\nu}},$$

onde usamos a definição (63) e as formas funcionais de $\delta\phi^A$ e $\delta A^a_{\ \nu}$ – Eqs. (10) e (35). Agora as funções independentes $\epsilon^a\left(x\right)$ e $\partial_\nu\epsilon^a\left(x\right)$ são escolhidas de tal forma a ambas se anularem identicamente na fronteira $\partial\Omega$ onde a integral de superfície está sendo calculada. Isso é perfeitamente consistente com os métodos do cálculo variacional e leva ao anulamento das duas integrais do lado direito da expressão acima. Como resultado:

$$\oint_{\partial\Omega} V^\mu d\sigma_\mu = 0. \tag{67}$$

Usando (67) em (66) e o resultado desta substituição de volta na relação (65), tem-se:

$$\int_\Omega K d^4x = 0. \tag{68}$$

Essa identidade deve ser válida qualquer que seja o volume Ω escolhido arbitrariamente no domínio dos campos de matéria e de gauge. Por isso, a Eq. (68) só pode ser válida caso o integrando seja identicamente nulo:

$$K = 0. \tag{69}$$

Com (69), a Eq. (64) dá:

$$\partial_\mu V^\mu = 0. \tag{70}$$

Pelas definições (62) e (63), as duas últimas equações são o mesmo que:

$$\frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta\phi^A}\delta\phi^A + \epsilon^b\frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta A^a_{\ \mu}}f_{b\ c}^{\ a}A^c_{\ \mu} - \frac{1}{g}\epsilon^a\partial_\mu\frac{\delta\mathcal{L}_T}{\delta A^a_{\ \mu}} = 0, \tag{71}$$

$$\partial_\mu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}_{M+\mathrm{int}}}{\partial \left(\nabla_\mu \phi^A\right)} \delta\phi^A + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial F^a_{\ \mu\nu}} \delta A^a_{\ \nu} + \frac{1}{g}\epsilon^a \frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A^a_{\ \mu}} \right\} = 0. \tag{72}$$

Explicitando as variações de (72),

$$\partial_\mu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}_{M+\mathrm{int}}}{\partial \left(\nabla_\mu \phi^A\right)} \left[\epsilon^a I_{(a)}{}^A{}_B \phi^B\right] + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial F^a_{\ \mu\nu}} \left(\epsilon^c f_c{}^a{}_b A^b{}_\nu + \frac{1}{g}\partial_\nu \epsilon^a\right) + \frac{1}{g}\epsilon^a \frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A^a_{\ \mu}} \right\} = 0,$$

ou

$$\begin{aligned}\partial_\mu \epsilon^a \frac{\partial \mathcal{L}_{M+\mathrm{int}}}{\partial \nabla_\mu \phi^A} I_{(a)}{}^A{}_B \phi^B + \epsilon^a \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{M+\mathrm{int}}}{\partial \nabla_\mu \phi^A} I_{(a)}{}^A{}_B \phi^B \right) + \\ + \partial_\mu \epsilon^c \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial F^a_{\ \mu\nu}} f_c{}^a{}_b A^b{}_\nu + \epsilon^c \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial F^a_{\ \mu\nu}} f_c{}^a{}_b A^b{}_\nu \right) + \\ + \frac{1}{g}\partial_\mu \partial_\nu \epsilon^a \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial F^a_{\ \mu\nu}} + \frac{1}{g}\partial_\nu \epsilon^a \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial F^a_{\ \mu\nu}} \right) + \frac{1}{g}\partial_\mu \epsilon^a \frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A^a_{\ \mu}} + \frac{1}{g}\epsilon^a \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A^a_{\ \mu}} \right) = 0\end{aligned}$$

e separando os termos em ϵ, $\partial\epsilon$ e $\partial^2\epsilon$,

$$\begin{aligned}\epsilon^a\ \partial_\mu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}_{M+\mathrm{int}}}{\partial \nabla_\mu \phi^A} I_{(a)}{}^A{}_B \phi^B + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial F^c_{\ \mu\nu}} f_a{}^c{}_b A^b{}_\nu + \frac{1}{g}\frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A^a_{\ \mu}} \right\} + \\ + \partial_\mu \epsilon^a \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{M+\mathrm{int}}}{\partial \nabla_\mu \phi^A} I_{(a)}{}^A{}_B \phi^B + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial F^c_{\ \mu\nu}} f_a{}^c{}_b A^b{}_\nu + \frac{1}{g}\partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial F^a_{\ \nu\mu}} + \frac{1}{g}\frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A^a_{\ \mu}} \right) + \\ + \partial_\mu \partial_\nu \epsilon^a \left(\frac{1}{g}\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial F^a_{\ \mu\nu}} \right) = 0.\end{aligned}$$

Toda informação vem dos dois primeiros termos já que o último termo é identicamente nulo: $\partial_\mu \partial_\nu \epsilon^a$ é objeto simétrico em μ e ν enquanto $F^a_{\ \mu\nu}$ é antissimétrico nestes índices. De fato,

$$\partial_\mu \partial_\nu \epsilon^a \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial F^a_{\ \mu\nu}} = \frac{1}{2}\partial_\mu \partial_\nu \epsilon^a \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial F^a_{\ \mu\nu}} + \frac{1}{2}\partial_\nu \partial_\mu \epsilon^a \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial F^a_{\ \nu\mu}} = \frac{1}{2}\partial_\mu \partial_\nu \epsilon^a \left(\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial F^a_{\ \mu\nu}} - \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial F^a_{\ \mu\nu}} \right) = 0.$$

Assim, da independência de ϵ e $\partial\epsilon$,

$$\partial_\mu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}_{M+\mathrm{int}}}{\partial \nabla_\mu \phi^A} I_{(a)}{}^A{}_B \phi^B + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial F^b_{\ \mu\nu}} f_a{}^b{}_c A^c{}_\nu + \frac{1}{g}\frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A^a_{\ \mu}} \right\} = 0, \tag{73}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}_{M+\mathrm{int}}}{\partial \nabla_\mu \phi^A} I_{(a)}{}^A{}_B \phi^B \quad &+ \quad \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial F^b_{\ \mu\nu}} f_a{}^b{}_c A^c{}_\nu + \frac{1}{g}\partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial F^a_{\ \nu\mu}} \\ &+ \quad \frac{1}{g}\frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A^a_{\ \mu}} = 0.\end{aligned} \tag{74}$$

Inserindo (57),

$$\frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A^a_{\ \mu}} = \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial A^a_{\ \mu}} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial \left(\partial_\nu A^a_{\ \mu}\right)} = \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial A^a_{\ \mu}} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial F^a_{\ \nu\mu}},$$

cujo último termo segue da Eq. (60), em (74) resulta:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{M+\mathrm{int}}}{\partial \nabla_\mu \phi^A} I_{(a)}{}^A{}_B \phi^B + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial F^b_{\ \mu\nu}} f_a{}^b{}_c A^c{}_\nu + \frac{1}{g}\frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial A^a_{\ \mu}} = 0. \tag{75}$$

Definamos:

$$J^\mu_a \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial A^a_{\ \mu}}. \tag{76}$$

Substituindo no termo volumétrico (75) encontramos

$$J^\mu_a = -g\left(\frac{\partial \mathcal{L}_{M+\mathrm{int}}}{\partial \nabla_\mu \phi^A} I_{(a)}{}^A{}_B \phi^B + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial F^b_{\ \mu\nu}} f_a{}^b{}_c A^c{}_\nu \right), \tag{77}$$

e pondo este resultado no termo de superfície (73), segue que

$$\partial_\mu J^\mu_a = \partial_\mu \left\{ g\frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A^a_{\ \mu}} \right\}. \tag{78}$$

Se a densidade lagrangiana total $\mathcal{L}_T$ satisfaz a equação de Euler-Lagrange para o potencial de gauge $A^a_{\ \mu}$, i.e.

$$\frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta A^a_{\ \mu}} = 0, \tag{79}$$

então obtemos de (78) a *lei de conservação*

$$\partial_\mu J^\mu_a = 0 \qquad (a = 1, 2, ..., n) \tag{80}$$

da *corrente* J^μ_a definida pela equação (76). Encontramos, dessa forma, uma regra geral para introduzir um novo campo $A^a_{\ \mu}$ de uma maneira bem definida quando existe uma lei de conservação (80) análoga a (9).[16] Note-se que há, em verdade, n leis de conservação: para cada

[16] A corrente conservada em (80) é a mesma que a decorrente da invariância global, ou seja a imposição da simetria de gauge local não fornece uma nova lei de conservação mas estabelece regras para a construção de lagrangianas.

 DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2018-0007

parâmetro de transformação dependente do ponto $\epsilon^a(x)$ existe uma corrente J^μ_a conservada dada por (77). Desta equação, concluímos que a corrente conservada não terá contribuições dos campos de gauge $F^a_{\mu\nu}$ no caso em que o grupo de transformações é abeliano $\left(f_{a\ c}^{\ b}=0\right)$, mas o terá quando o grupo for não-abeliano $\left(f_{a\ c}^{\ b}\neq 0\right)$. Isso significa que os campos de gauge associados a grupo de gauge não-abelianos possuem em si mesmos a carga da interação que mediam; por essa razão, espera-se que as equações de movimento dos campos de gauge deste tipo de teorias sejam não-lineares, com termos de auto-interação.

Com essas considerações, encerramos a teoria geral da seção 3. Nas próximas seções estudaremos alguns exemplos de grupos abeliano e não-abelianos de gauge.

4. Grupo de transformação de fase e o campo eletromagnético

Determinemos o tipo de interação surgida da imposição de invariância do *campo escalar complexo* sob o grupo de *transformação de fase.* Neste contexto, escrevemos (o campo carregado) $\phi^A(x)=\left(\varphi^{\bar{A}}(x),\varphi^{*\bar{A}}(x)\right)$ com $A=1,...,N$ (N inteiro positivo e par), composto por $\varphi^{\bar{A}}(x)$ e seu conjugado $\varphi^{*\bar{A}}(x)$ onde $\bar{A}=1,...,\frac{N}{2}$, transformando-se como

$$\varphi^{\bar{A}}(x)\to e^{i\alpha}\varphi^{\bar{A}}(x),\quad \varphi^{*\bar{A}}(x)\to e^{-i\alpha}\varphi^{*\bar{A}}(x),$$
$$\alpha=\textit{constante real.}$$

A forma infinitesimal $\phi'^A(x)=\phi^A(x)+\delta\phi^A(x)$ dá

$$\delta\varphi^{\bar{A}}(x)=i\alpha\varphi^{\bar{A}}(x),\qquad \delta\varphi^{*\bar{A}}(x)=-i\alpha\varphi^{*\bar{A}}(x),$$

pois $e^x=1+x+\mathcal{O}\left(x^2\right)$, $|x|\ll 1$. Comparando com $\delta\phi^A=\epsilon^a I_{(a)}{}^A{}_B\phi^B$, Eq. (2), identificamos

$$\epsilon^a=\alpha,\qquad\qquad (a=1)$$
$$I_{(a)}{}^{\bar{A}}{}_B=i\delta^{\bar{A}}_B,\qquad I_{(a)}{}^{\left(\frac{N}{2}+\bar{A}\right)}{}_B=-i\delta^{\left(\frac{N}{2}+\bar{A}\right)}{}_B.$$

Como $I_{(a)}$ é zero ou $\pm i$,

$$[I_{(a)},I_{(b)}]^A_{\ B}=0,$$

concluímos de $[I_{(a)},I_{(b)}]^A_{\ B}=f_{a\ b}^{\ c}I_{(c)}{}^A{}_B$, Eq. (3), que a constante de estrutrutura é nula,

$$f_{a\ b}^{\ c}=0;$$

o grupo de transformação de fase a um parâmetro é comutativo – abeliano.

Se fizermos a transformação depender do ponto, $\alpha\to\alpha(x)$, introduzimos um campo vetorial $A^a{}_\mu(x)$, cuja lei de transformação $\delta A^a_{\ \mu}=\epsilon^c f_{c\ b}^{\ a}A^b_{\ \mu}+\frac{1}{g}\partial_\mu\epsilon^a$, Eq. (35), fica

$$\delta A_\mu=\frac{1}{g}\partial_\mu\alpha(x).$$

Com este novo campo, especificamos a derivada covariante $\nabla_\mu\phi^A=\partial_\mu\phi^A-gA^a{}_\mu I_{(a)}{}^A{}_B\phi^B$, Eq. (22), para o caso em questão,

$$\nabla_\mu\phi^A=\begin{cases}\nabla_\mu\varphi^{\bar{A}}=\partial_\mu\varphi^{\bar{A}}-ig\delta^{\bar{A}}_B\phi^B A^a{}_\mu,\\ \quad para\ A=1,...,\frac{N}{2};\quad e\\ \nabla_\mu\varphi^{*\bar{A}}=\partial_\mu\varphi^{*\bar{A}}+ig\delta^{\left(\frac{N}{2}+\bar{A}\right)}{}_B\phi^B A^a{}_\mu,\\ \quad para\ \ A=\left(\frac{N}{2}+1\right),...,N.\end{cases}$$

i.e.,

$$\nabla_\mu\varphi^{\bar{A}}=\partial_\mu\varphi^{\bar{A}}-ig\varphi^{\bar{A}}A^a{}_\mu,\quad \nabla_\mu\varphi^{\bar{A}*}=\partial_\mu\varphi^{\bar{A}*}+ig\varphi^{\bar{A}*}A^a{}_\mu,$$

com a qual, realizamos a prescrição de acoplamento, reescrevendo a densidade lagrangiana:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_M\left[\phi^A;\partial_\mu\phi^A\right]\ &\to\ \mathcal{L}_M\left[\phi^A;\nabla_\mu\phi^A\right]=\\ &=\ \mathcal{L}_M\left[\varphi,\varphi^*;\nabla_\mu\varphi,\nabla_\mu\varphi^*\right].\end{aligned}$$

A densidade lagrangiana $\mathcal{L}_A$ para o campo livre A_μ é

$$\mathcal{L}_A=\mathcal{L}_A(F_{\mu\nu}),$$

onde $F_{\mu\nu}$ é calculado via (45), $F^a_{\ \mu\nu}=\partial_\mu A^a{}_\nu-\partial_\nu A^a{}_\mu-gf_{b\ c}^{\ a}A^b{}_\mu A^c{}_\nu$, e vale

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu.$$

Vemos assim que o campo a ser introduzido ao tratarmos partículas carregadas sob transformações de fase dependentes do ponto é o *campo eletromagnético.*

Por fim, a corrente conservada pelas Eqs. (76) e (77) como

$$J^\mu\equiv -ig\left(\frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial\nabla_\mu\varphi^{\bar{A}}}\varphi^{\bar{A}}-\frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial\nabla_\mu\varphi^{*\bar{A}}}\varphi^{*\bar{A}}\right),$$

que não depende do campo de gauge eletromagnético, conforme adiantado no último parágrafo da seção anterior. O campo eletromagnético não carrega a própria carga de interação que media; não há auto-interação do campo eletromagnético em nível clássico.

5. Grupo de rotação no espaço de spin isotópico e o campo de Yang-Mills

Considere-se o *campo de isospin* a descrever um sistema próton e nêutron:

$$\psi^\alpha=\begin{pmatrix}\psi^1\\ \psi^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\textit{próton}\\ \textit{nêutron}\end{pmatrix}.$$

Tomamos a teoria independente de carga elétrica e a densidade lagrangiana invariante por *rotações no espaço de spin isotópico* tridimensional. Temos:

$$\delta\psi^\alpha=i\epsilon^c\tau_{(c)}{}^\alpha{}_\beta\psi^\beta,\qquad (c=1,2,3)\qquad (81)$$

onde $\tau_{(1)}$, $\tau_{(2)}$, e $\tau_{(3)}$ são as matrizes usuais de isospin – matrizes 2×2 unitárias com determinante igual à identidade, geradores do $SU(2)$.[17] Identificamos

$$I_{(a)}{}^A{}_B\to i\tau_{(c)}{}^\alpha{}_\beta\qquad (\alpha,\beta=1,2),$$

[17] Para uma representação conveniente essas matrizes são as matrizes de Pauli. Neste caso, a Eq. (82) leva a identificarmos $f_{a\ b}^{\ c}$ com o tensor completamente antissimétrico (a menos de constante).

e escrevemos o comutador dos geradores $[I_{(a)}, I_{(b)}]^A{}_B = f_a{}^c{}_b I_{(c)}{}^A{}_B$, na forma

$$[i\tau_{(a)}, i\tau_{(b)}] = f_a{}^c{}_b i\tau_{(c)}. \tag{82}$$

Introduzimos o *campo de Yang-Mills*

$$B^c_\mu(x)$$

quando localizamos a simetria, i.e., ao substituirmos os parâmetros ϵ^c por um conjunto de funções $\epsilon^c(x)$. O caráter de transformação do campo auxiliar $B^c_\mu(x)$ é [vide (35)]:

$$\delta B^c_\mu = \epsilon^a f_a{}^c{}_b B^b{}_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu \epsilon^c,$$

e ele comparece na densidade lagrangiana na composição

$$\nabla_\mu \psi^\alpha = \partial_\mu \psi^\alpha - ig\tau_{(c)}{}^\alpha{}_\beta \psi^\beta B^c{}_\mu$$

[Eq. (22)]. Esta derivada transforma-se covariantemente [resultado (34)]; eis a sua variação:

$$\delta \nabla_\mu \psi^\alpha = i\tau_{(c)}{}^\alpha{}_\beta \epsilon^c \nabla_\mu \psi^\beta.$$

A derivada de $B^c_\mu(x)$ pode aparecer na densidade lagrangiana $\mathcal{L}_A$ do campo de Yang-Mills apenas através da combinação denominada tensor intensidade de campo,

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu B^a{}_\nu - \partial_\nu B^a{}_\mu - \frac{g}{2} f_b{}^a{}_c \left(B^b{}_\mu B^c{}_\nu - B^c{}_\mu B^b{}_\nu \right)$$

[conforme (46)]. E a equação

$$\delta F^a_{\mu\nu} = \epsilon^c f_c{}^a{}_b F^b{}_{\mu\nu}$$

[Eq. (49)] mostra que $F^a_{\mu\nu}$ tranforma-se pelo grupo de rotação como um vetor, ou seja, o spin isotópico do campo B é a unidade.

A expressão para a “corrente” tem a forma:

$$J^\mu_a = \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial B^a{}_\mu} = -g \left(\frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial \nabla_\mu \psi^\alpha} i\tau_{(a)}{}^\alpha{}_\beta \psi^\beta + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial F^b{}_{\mu\nu}} f_a{}^b{}_c B^c{}_\nu \right).$$

Aqui, o segundo e último termo, revela a presença de auto-interação.

6. Grupo de Lorentz homogêneo e o campo gravitacional

O trabalho de Utiyama [1] não se encerra com a análise dos campos eletromagnético e de Yang-Mills, conforme mencionado na seção 1. De fato, há uma extensa discussão sobre o campo gravitacional como teoria de gauge para campos (tensoriais e espinorias) sob ação do grupo de Lorentz homogêneo. Exatamente por ter realizado este último estudo, Utiyama decide publicar seus resultados a despeito do trabalho original de Yang-Mills, convencendo-se da generalidade de seu tratamento.

A teoria de gauge para a gravitação, porém, não é definitiva e as controvérsias surgem pouco tempo após a publicação do artigo “Interpretação da Interação por Invariância Teórica” de Utiyama. O artigo de Kibble [9] surge com a proposta de extender o seu trabalho, descrevendo interação gravitacional a partir do grupo de Poincaré (ou grupo de Lorentz completo). No mesmo artigo, Kibble critica a abordagem de Utiyama ao caso gravitacional porque este introduz, em adição ao espaço-tempo de Minkowski, uma variedade curva de forma *ad hoc*: o efeito da interação não surge naturalmente mas é imposta de princípio. Todavia o método estabelecido é eficiente – seus resultados são consistentes;[18]tanto que Kibble propõe uma correção de método mas não de conteúdo. Ele mostra que se pode evitar a introdução artificial do espaço-tempo curvo tomando variações completas, não só na forma funcional do sistema de campos mas também no ponto do espaço-tempo.

O fato é: para a interação gravitacional há que se considerar duas classes distintas de simetrias. A primeira é invariância do sistema de campos sob o *grupo de transformações de Lorentz* (ou de Poincaré). A segunda é a invariância pelo *grupo de transformações gerais de coordenadas*, exigida pelo Princípio de Covariância Geral. O primeiro tipo, as transformações de gauge dos campos, é comum a todas as interações fundamentais. A segunda categoria é o que torna a gravitação tão particular: só ela comporta a universalidade. Talvez por isso, não possamos rotular a gravitação como uma teoria de gauge genuína.

7. Teoria de gauge de segunda ordem

Na seção 3.2 discutimos que as equações de campo permitidas para $A^a{}_\mu$ seriam aquelas determinadas a partir de $\mathcal{L}_A(F)$ sendo F da forma $F^c_{\mu\nu} = A^c{}_{[\mu,\nu]} - gf_a{}^c{}_b A^a{}_\mu A^b{}_\nu$. Essas conclusões tiveram como ponto de partida a hipótese de que a densidade lagrangiana $\mathcal{L}_A$ depende somente do potencial $A^a{}_\mu$ e suas derivadas de primeira ordem $\partial_\nu A^a{}_\mu$: $\mathcal{L}_A(x) = \mathcal{L}_A\left[A^a{}_\mu; \partial_\nu A^a{}_\mu\right](x)$. Quais seriam as alterações na teoria geral de Utiyama engendradas pela generalização $\mathcal{L}_A(x) = \mathcal{L}_A\left[A^a{}_\mu; \partial_\nu A^a{}_\mu; \partial_\rho\partial_\nu A^a{}_\mu\right](x)$? Essa foi a motivação inicial para o trabalho [10].

Os autores de [10] preservaram o roteiro estabelecido por Utiyama e efetuaram os cálculos da seção 3.2 para a densidade lagrangiana de segunda ordem. A menos de algumas sutilezas de procedimento e considerável esforço algébrico foram obtidos alguns resultados interessantes:

1. Além do tensor intensidade de campo $F^a{}_{\mu\nu}$ é necessário introduzir um novo tensor $G^a{}_{\mu\nu\rho}$ para garantir a invariância da teoria sob o grupo de transformações (10) e (35), i.e., $\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_A\left[F^a{}_{\rho\sigma}; G^a{}_{\beta\rho\sigma}\right]$. Este

[18] Utiyama deriva a conexão $\Gamma_{\nu\mu}{}^\rho$ do espaço-tempo curvo em função do potencial de gauge A^{ik}_μ e do campo de tetradas $e^i{}_\mu$ (introduzido *a priori* com o espaço cuvo). O tensor de curvatura de Riemann $R^\alpha{}_{\lambda\mu\nu}$ é, por sua vez, determinado em termos do tensor intensidade de campo $F^{kl}{}_{\mu\nu}$.

novo tensor é

$$G^a{}_{\beta\rho\sigma} = \partial_\beta F^a{}_{\rho\sigma} - A^b{}_\beta f_b{}^a{}_c F^c{}_{\rho\sigma} = D^a{}_{c\beta} F^c{}_{\rho\sigma},$$

uma derivada covariante de $F^a{}_{\rho\sigma}$.[19]

2. O objeto $G^a{}_{\beta\rho\sigma}$ transforma-se co-gradientemente, como $F^a{}_{\rho\sigma}$ — vide Eq. (49):

$$\delta G^a{}_{\beta\rho\sigma} = \epsilon^b f_b{}^a{}_c G^c{}_{\beta\rho\sigma}.$$

3. $G^a{}_{\beta\rho\sigma}$ satisfaz a propriedade de ciclicidade e isso leva, de maneira dedutiva, a uma identidade de Bianchi para os $F^a{}_{\rho\sigma}$:

$$\begin{aligned} G^a{}_{\beta\rho\sigma} + G^a{}_{\rho\sigma\beta} + G^a{}_{\sigma\beta\rho} &= D^a{}_{c\beta} F^c{}_{\rho\sigma} + D^a{}_{c\rho} F^c{}_{\sigma\beta} + \\ &+ D^a{}_{c\sigma} F^c{}_{\beta\rho} \equiv 0. \end{aligned}$$

4. A condição sobre a densidade lagrangiana $\mathcal{L}_A \left[F^a{}_{\rho\sigma}; G^a{}_{\beta\rho\sigma}\right]$ toma a forma

$$\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial F^a{}_{\mu\nu}} f_c{}^a{}_b F^b{}_{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial G^a{}_{\beta\rho\sigma}} f_c{}^a{}_b G^b{}_{\beta\rho\sigma} \equiv 0,$$

uma extensão natural de (52).

5. A corrente *a la* Utiyama $J_c{}^\nu = \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial A^c{}_\nu}$ não é conservada. Porém, é possível construir uma corrente conservada dada por:

$$\bar{J}_c{}^\nu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial A^c{}_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial \left(\partial_\mu A^c{}_\nu\right)}.$$

Ambas apresentam termos topológicos, i.e. aqueles cujo divergente é identicamente nulo. Note como tanto $J_c{}^\nu$ quanto $\bar{J}_c{}^\nu$ exibem partes dos termos na equação de Euler-Lagrange para $A^a{}_\mu$ a partir de $\mathcal{L}_T$.

6. A aplicação da teoria de gauge de segunda ordem ao grupo $U(1)$ leva à densidade lagrangiana da *Eletrodinâmica Generalizada* de Podolsky [16],

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_A &= -\tfrac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + a^2 \partial^\beta F_{\rho\beta} \partial_\lambda F^{\rho\lambda}, \\ &\qquad (a = \textit{constante}), \end{aligned}$$

que provamos ser a única possível construída a partir de termos quadráticos em $F_{\rho\sigma}$ e termos quadráticos em $\partial_\lambda F_{\rho\sigma}$ (i.e. quadráticos em $G_{\lambda\rho\sigma}$).

7. O caso não-abeliano foi estudado para o grupo $SU(N)$: mostrou-se que a densidade lagrangiana efetiva de Alekseev-Arbusov-Baikov para o regime infra-vermelho [17] pode ser classificada como uma teoria de gauge de segunda ordem.

Em um trabalho subsequente – Ref. [18], o caso gravitacional (não-abeliano, para o grupo de Lorentz homogêneo) foi abordado e todas as densidades lagrangianas quadráticas em $F^a{}_{\rho\sigma}$ e $G^a{}_{\beta\rho\sigma}$ construídas. Mais recentemente, o artigo [19] considerou a eletrodinâmica de Podolsky em espaços curvos; em particular, analisou-se a influência dos fótons massivos previstos por essa teoria sobre alguns aspectos da física de buracos negros.

Tudo isso destaca a importância do trabalho de Utiyama e seu caráter seminal.

8. Comentários finais

Neste trabalho honramos o artigo **"Interpretação da Interação por Invariância Teórica"** de Ryoyu Utiyama [1] com uma detalhada análise de seu desenvolvimento geral, resultados e alguns desdobramentos. Vimos como o princípio de gauge relacionado a propriedades de simetria de um sistema físico está associada ao aparecimento de um campo mediador de interação $A_\mu(x)$. Esse campo mediador, ou potencial de gauge, foi primeiro identificado no eletromagnetismo como consequência imediata das simetrias admitidas pelo campos elétrico $\mathbf{E}(x)$ e magnético $\mathbf{B}(x)$. O que surpreende é o fato de outras interações fundamentais partilharem essa mesma propriedade: o trabalho de Utiyama mostra isso de forma sistemática e numa construção a partir de primeiros princípios.

Na linguagem da física moderna, um sistema físico é descrito a partir da teoria de campos clássicos em que os entes fundamentais são densidades lagrangianas de campos de matéria. O princípio de gauge lida com o comportamento deste sistema físico perante certas classes de transformações. Em verdade, a ideia básica da simetria de gauge é: se um sistema é invariante com respeito a um grupo G de transformações contínuas independentes do ponto, então ele permanece invariante quando esse grupo é feito local, i.e. quando $G \to G(x)$, desde que as derivadas ordinárias de espaço-tempo ∂_μ sejam substituídas por derivadas covariantes ∇_μ. As derivadas covariantes assumem a forma $\nabla_\mu = \partial_\mu + A_\mu(x)$ em que $A_\mu(x)$ são campos vetorias que residem na álgebra de Lie do grupo rígido G e se transformam de tal maneira a garantir que ∇_μ transforme-se covariantemente com respeito a $G(x)$. Isto significa que *a imposição de simetria local força a introdução de $A_\mu(x)$ e determina a forma como esses campos vetoriais interagem entre si e com os campos de matéria originais.* Acontece que esses campos auxiliares $A_\mu(x)$ são reconhecidos como os campos de radiação das interações fundamentais: eles são o potencial engendrando campo eletromagnético, como dissemos no primeiro parágrafo desta seção e mostramos na seção 4; são os mésons vetorias massivos $Z^0, W^\pm$ das interações fracas[20]; são os campos de cor gluônicos A^c_μ

[19] A rigor, G é derivada co-gradiente de F – daí o símbolo $D^a{}_{c\beta}$ – já que os $f_b{}^a{}_c$ aparecem no lugar dos geradores $I_{(a)}{}^A{}_B$ de $\nabla_\mu \phi^A \equiv \partial_\mu \phi^A - g A^a{}_\mu I_{(a)}{}^A{}_B \phi^B$. Pode-se evitar essa diferença de nomenclatura se postularmos que a forma do operador ∇_μ (com $I_{(a)}{}^A{}_B$ ou $f_b{}^a{}_c$) depende da natureza do objeto sobre o qual atua.

[20] Vide, todavia, os comentários que encerram a seção 3.2.

[21] A menos das sutilezas mencionadas no final da seção 6.

das interações fortes – cf. seção 5; são as conexões Γ_μ que equipam a variedade do espaço curvo da interação gravitacional[21].

Por um lado, o princípio de gauge de Weyl, Yang-Mills, Shaw, Utiyama parece ser um substrato comum a todas as interações fundamentais. Por outro lado, os desenvolvimentos da geometria diferencial até a primeira metade do século XX por nomes como Levi-Civita, Cartan, Hodge, Chern mostraram que o princípio de gauge poderia ser abarcado pela teoria de fibrados [2]: neste contexto $G(x)$ poderia ser identificado como seções dos fibrados principais e os campos de radiação $A_\mu(x)$ – portadores de tanto apelo fenomenológico – seriam associados às conexões matemáticas. Isso levou a crer na possibilidade de *geometrização de todas as interações fundamentais*. E as teorias de gauge seriam a rota para a conclusão bem sucedida dessa tarefa tão apelativa aos físicos teóricos que, desde Einstein, sonham com a *unificação das forças*. Hoje está claro que a execução dessa tarefa é mais desafiadora e sua conclusão pode não se dar apenas no bojo das teorias de gauge. No entanto, a importância das teorias de gauge não é por isso abalada, e esse manuscrito é apenas mais um movimento no sentido de propagá-las.

Também pretendemos fazer justiça ao trabalho de Utiyama, ainda hoje amplamente desconhecido ou subestimado pela comunidade, conforme adverte a Ref. [20]. Não é verdade que o trabalho de Utiyama apenas estende àquele devido à Yang e Mills [4]. De fato, a dita extensão acontece, já que a abordagem de Utiyama permite construir a teoria de gauge para qualquer grupo de Lie, e não apenas para o grupo $SU(2)$, incluindo a interação gravitacional no processo. Para além disso, porém, sabemos que Utiyama desenvolveu sua teoria simultaneamente ao trabalho de Yang-Mills [2], embora a tenha publicado apenas em 1956 enquanto que Yang e Mills o fizeram em 1954. O ponto não é questionar a prioridade e a originalidade de Yang e Mills, mas exaltar o *tour de force* que representa a contribuição de Utiyama, o qual pode, com justiça, ser considerado o co-criador das teorias de gauge não-abelianas.

Agradecimento

RRC é grato ao IFT-UNESP pela hospitalidade durante a escrituração deste trabalho. OAA e BMP agradecem ao CNPq pelo apoio financeiro total e parcial, respectivamente. Os autores são gratos ao referee, cujos comentários esclarecedores aparecem inclusive nas notas de rodapé 9, 14 e 16.

Referências

[1] R. Utiyama, *Invariant Theoretical Interpretation of Interaction*, Phys. Rev. **101**, 1597 (1956).

[2] L. O'Raifeartaigh, *The Dawning of Gauge Theory*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1997.

[3] H. Weyl, *Gravitation and Electricity*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Berlin, 465 (1918). Usamos a versão disponível na Ref. [2].

[4] C. N. Yang and R. L. Mills, *Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance*, Phys. Rev. **96**, 191 (1954).

[5] H. Weyl, *Elektron und Gravitation*, Zeit. f. Physik **330**, 56 (1929). Uma tradução para o inglês aparece no capítulo 5 da Ref. [2].

[6] C. N. Yang, *Selected Papers with Commentary*, Freeman, New York, 1983.

[7] R. Shaw, *The Problem of Particle Types and Other Contributions to the Theory of Elementary Particles*, PhD thesis, part II, chapter III, University of Cambridge, 1955.

[8] R. Aldrovandi and J. G. Pereira, *Notes for a Course on Classical Fields*, March-June 2004, disponível em *<http://www.ift.unesp.br/users/jpereira/ClassiFields.pdf>*, acesso em 10/04/2018.

[9] T. W. B. Kibble, *Lorentz Invariance and the Gravitational Field*, Journal of Mathematical Physics **2**, 212 (1961).

[10] R. R. Cuzinatto, C. A. M. de Melo and P. J. Pompeia, *Second Order Gauge Theory*, Annals of Physics **322**, 1211 (2007).

[11] H. Ruegg and M. Ruiz-Altaba, *The Stueckelberg Field*, Int. J. Mod. Phys. **A19**, 3265 (2004).

[12] G. V. Dunne, *Aspects of Chern-Simons Theory*, Les Houches Lectures 1998 [arXiv:hep-th/9902115].

[13] J. Zanelli, *Introductory Lectures on Chern-Simons Theories*, AIP Conf. Proc. **1420**, 11 (2012).

[14] E. Noether, *Invariante Variationsprobleme*, Nachr. d. König. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math-Phys. Klasse, 235-257 (1918).

[15] V. de Sabbata and M. Gasperini, *Introduction to Gravitation*, World Scientific, Singapure, 1985.

[16] B. Podolski, *A Generalized Eletrodynamics. Part I – Non-Quantum*, Phys. Rev. **62**, 68 (1942).

[17] A.I. Alekseev, B.A. Arbuzov and V.A. Baikov, *Infrared asymptotic behavior of gluon Green's functions in quantum chromodynamics*, Theor. Math. Phys. **52**, 739 (1982).

[18] R. R. Cuzinatto, C. A. M. de Melo, L. G. Medeiros and P. J. Pompeia, *Gauge formulation for higher order gravity*, Eur. Phys. J. C **53**, 99 (2008).

[19] R. R. Cuzinatto, C. A. M. de Melo, L. G. Medeiros, B. M. Pimentel and P. J. Pompeia, *Bopp-Podolsky black holes and the no-hair theorem*, Eur. Phys. J. C **78**, 43 (2018).

[20] J. M. Gracia-Bondia, [arXiv:0808.2853 [hep-th]] (2010).