

# Aplicação do Problema Restrito de Três Corpos no estudo do movimento de astros do sistema solar

Application of the Restricted Three Bodies Problem in the study of the move the objects of the solar system

Gabriel da Silva Macedo<sup>1</sup>, Artur Justiniano Roberto Junior<sup>\*1</sup> 

<sup>1</sup>Universidade Federal de Alfenas, Departamento de Física, Alfenas, MG, Brasil

Recebido em 21 de Março, 2018. Revisado em 18 de Maio, 2018. Aceito em 25 de Maio, 2018.

Após uma revisão na literatura vimos que o Problema Restrito de Três Corpos (PRTC) é um tema com algumas publicações voltadas, principalmente, para a resolução do problema matemático, com muito poucas aplicações em situações reais e contextualizadas. Além disso, ao analisarmos alguns livros textos de mecânica clássica utilizados nos cursos de física, observamos que o PRTC não é desenvolvido e explorado didaticamente. Apoiados nessas análises o nosso objetivo neste trabalho é apresentar, desenvolver e aplicar o PRTC para simular as órbitas de dois astros do sistema solar: a do asteroide troiano da Terra, 2010 TK7, e a libração de Plutão devido a Netuno. Para resolver as equações diferenciais do PRTC utilizamos o método de Cauchy em um código escrito na linguagem de programação Python. Nos dois casos estudados conseguimos verificar as trajetórias, valores e comportamentos orbitais dos astros. Por isso, entendemos que o PRTC pode ser aplicado para simular o movimento de diversos astros do sistema solar e, conseqüentemente, ser utilizado como um recurso pedagógico para contextualizar conceitos de mecânica celeste e dinâmica orbital. Uma vez que ele se relaciona com o estudo das equações diferenciais, com a gravitação universal e com os métodos numéricos.

**Palavras-chave:** Mecânica celeste, Problema restrito dos três corpos, Ensino de astronomia

After a review in the literature we have seen that the Restricted Three-Body Problem (RTBP) is a topic with some publications focused, primarily, on resolution of the mathematical problem, with very few application in real and contextualized situations. In addition, in analyzing textbooks of classical mechanics we observed that the RTBP is not developed and didactically explored. Based on this facts, our objective in this work is to present, develop and apply the RTBP to simulate the orbits of two objects in the solar system : motion of Earth-trojan asteroid 2010 TK7 and libration of pluto due to Neptune. To solve differential equations of RTBP we uses the cauchy method in a code written in the Python programming language. With this work we hope to demonstrate that the study of the RTBP can be used to contextualize some concepts of celestial mechanics and orbital dynamics. Since it is related to the study of differential equations, with universal gravitation and numerical methods.

**Keywords:** Celestial mechanics, Restricted problem of the three bodies, Teaching of astronomy

## 1. Introdução

A mecânica celeste é o ramo da Astronomia que estuda os movimentos dos corpos celestes sob a influência da gravidade. Seus fundamentos foram estabelecidos a partir do século XVII mas ela é bem mais antiga e está ligada as observações e registros das posições dos astros em seu deslocamento diário na abóbada celeste [1].

Johannes Kepler (1571-1630) foi quem formulou as três leis que descrevem o movimento dos planetas e as publicou no livro, “*Harmonice Mundi*” em 1619 [1]. A demonstração matemática dessas leis foi feita por Isaac Newton (1643-1727) na sua obra “*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*” [2], marcando o início do desenvolvimento da mecânica celeste moderna. Nessa obra Newton formulou o principal problema da mecânica

celeste, o problema de N corpos. Esse problema pode ser descrito da seguinte forma: dado um sistema com N massas puntiformes, ou seja, pontos de massas que têm seus movimentos governados por gravitação mútua e também dados suas condições iniciais, posição e velocidade, o que se deseja é saber sua posição e velocidade em um instante futuro. Para fazer isso é necessário resolver as Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's) que governam o movimento dos N corpos. Trata-se de problema extremamente complexo e que não possui uma solução analítica fechada. Uma solução desse tipo só é encontrada quando  $N = 2$ . Nesse caso, trata-se do problema de 2 corpos, também conhecido como Problema de Kepler [3], em homenagem a esse cientista.

Já o problema de três corpos ( $N = 3$ ) é considerado um dos problemas mais importantes da mecânica celeste e tem sido estudado tanto analiticamente quanto numeri-

\*Endereço de correspondência: [arturjustiniano@gmail.com](mailto:arturjustiniano@gmail.com).

camente a vários séculos. O primeiro a fazê-lo foi Newton ao resolver o problema de dois corpos para o movimento da Lua ao redor da Terra e considerar os efeitos do Sol sobre o sistema [2]. Entretanto, desde essa época esse problema continua sem uma solução geral analítica e fechada [4, 5].

Um caso especial desse problema é o Problema Restrito de Três Corpos (PRCT) [6, 7]. Trata-se de uma simplificação do problema geral de três corpos e que é de grande interesse científico porque ele pode ser utilizado em diversas aplicações práticas como na astronomia e na astronáutica. Como por exemplo as que serão apresentadas nesse artigo.

O nosso interesse em estudar o PRCT vem do fato de que esse assunto está diretamente relacionado aos conteúdos da disciplina mecânica clássica dos cursos de graduação em física. Trata-se de um tópico do assunto mecânica celeste. Entretanto, ao analisar alguns livros textos que são utilizados nessa disciplina [3, 8–10] notamos que o PRCT é poucas vezes citado e quase nunca desenvolvido didaticamente. Quando é, observamos que o enfoque maior está no desenvolvimento matemático do problema e não na sua aplicação e contextualização. Esse fato pode ser visto, por exemplo, nos artigos publicados neste periódico [4, 11].

Nesse artigo nós vamos apresentar e desenvolver matematicamente o PRCT buscando o aprimoramento da transposição didática do problema, em seguida vamos mostrar que ele pode ser utilizado para descrever o movimento do asteroide troiano da Terra e a libração de Plutão, como exemplos de aplicação contextualizada.

## 2. O problema de três corpos

O problema dos três corpos pode ser descrito da seguinte forma: dados três corpos de massa  $m_1, m_2$  e  $m_3$  que se movem sobre mútua atração gravitacional e sabendo suas condições iniciais, posição( $r$ ) e velocidade( $\dot{r}$ ), o que se deseja é determinar os valores dessas grandezas no tempo futuro.

As EDO's que descrevem o movimento do problema de três corpos são:

$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -Gm_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} - Gm_3 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^3}, \quad (1)$$

$$\frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = -Gm_3 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} - Gm_1 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \quad (2)$$

e

$$\frac{d^2 \vec{r}_3}{dt^2} = -Gm_1 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} - Gm_2 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^3}. \quad (3)$$

Onde  $G$  é a constante gravitacional,  $\vec{r}_i$  e  $\ddot{\vec{r}}_i$  são os vetores posição e aceleração dos corpos.

## 3. O problema restrito de três corpos

Euler, em 1772, foi o primeiro a propor uma reformulação do problema de três corpos. Mais tarde essa reformulação foi nomeada por Henri Poincaré (1854-1912) como Problema Restrito de Três Corpos [6]. Nesse problema os corpos  $m_1$  e  $m_2$  são chamados de primárias e o que se busca é estudar o movimento do terceiro corpo,  $m_3$ . Uma particularidade do PRCT está no fato de que  $m_1$  e  $m_2 \gg m_3$ .

De uma forma geral o PRCT tem as seguintes restrições:

1. A massa do terceiro corpo é considerada nula.
2. As órbitas das primárias são círculos ao redor do centro de gravidade do sistema.
3. O terceiro corpo se move no plano orbital das primárias.

A primeira restrição implica que o terceiro corpo não exerce influência gravitacional nas órbitas das primárias. Portanto, as órbitas das primárias podem ser determinadas como se o terceiro corpo estivesse ausente, o problema geral de dois corpos. A segunda restrição simplifica o problema, uma vez que as órbitas circulares possuem um raio constante e velocidade angular constante. Por fim, a última restrição implica uma importante simplificação matemática, já que agora a descrição completa do problema se torna bidimensional.

Com essas restrições as equações 1, 2 e 3 podem ser escritas da seguinte forma:

$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -Gm_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}, \quad (4)$$

$$\frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = -Gm_1 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \quad (5)$$

e

$$\frac{d^2 \vec{r}_3}{dt^2} = -Gm_1 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} - Gm_2 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^3}. \quad (6)$$

Como pode ser visto nas equações acima, no PRCT ocorre o desacoplamento das equações (1),(2) e (3) pois é possível determinar o movimento das primárias e depois estudar o movimento do terceiro corpo.

Neste trabalho nós optamos por trabalhar com o PRCT circular que é mais simples do que o PRCT elíptico. A principal diferença entre eles está no fato de que no segundo, as órbitas das primárias em torno do centro de gravidade do sistema são elípticas. Característica que tem implicações importantes na descrição matemática do problema, já que, neste caso,  $r_1$  e  $r_2$  não são constantes e o problema fica mais complexo. Para os leitores interessados no PRCT elíptico recomendamos a leitura das referências [5, 6]

### 3.1. A descrição matemática do PRCT

Vamos supor aqui que as órbitas circulares de  $m_1$  e  $m_2$  tenham raios  $b$  e  $a$ , com origem no centro de gravidade

do sistema, como mostra a Fig. 1. Nesta figura  $X - Y$  é o sistema de coordenadas inercial e  $\bar{x} - \bar{y}$  é o sistema em que as primárias giram com velocidade angular  $\omega$ .

No sistema inercial vamos definir as coordenadas das primárias por  $(X_1, Y_1)$  e  $(X_2, Y_2)$  e de  $m_3$  por  $(X, Y)$ . Neste sistema as equações de movimento orbital das primárias são:

$$X_1 = b \cos(\omega t); \quad Y_1 = b \sin(\omega t) \quad (7)$$

$$X_2 = -a \cos(\omega t) \quad Y_2 = -a \sin(\omega t). \quad (8)$$

Já as equações de movimento de  $m_3$  são:

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = -G \left[ \frac{m_1(X - b \cos(\omega t))}{r_{13}^3} + \frac{m_2(X + a \cos(\omega t))}{r_{23}^3} \right] \quad (9)$$

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} = -G \left[ \frac{m_1(Y - b \sin(\omega t))}{r_{13}^3} + \frac{m_2(Y + a \sin(\omega t))}{r_{23}^3} \right]. \quad (10)$$

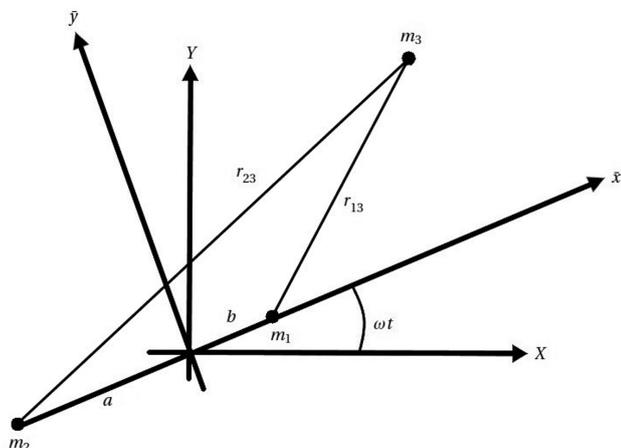
Onde:

$$r_{13} = \sqrt{(X - X_1)^2 + (Y - Y_1)^2} = \sqrt{(X - b \cos(\omega t))^2 + (Y - b \sin(\omega t))^2} \quad (11)$$

e

$$r_{23} = \sqrt{(X - X_2)^2 + (Y - Y_2)^2} = \sqrt{(X + a \cos(\omega t))^2 + (Y + a \sin(\omega t))^2}. \quad (12)$$

Estas são as equações de movimento de  $m_3$  no sistema fixo de referência. Vamos agora transportá-las para o sistema de referência não inercial (que gira junto com  $m_1$  e  $m_2$ ). Isso nos dá a vantagem da eliminação explícita do tempo, já que no referencial girante as posições de  $m_1$  e  $m_2$  permanecem fixas.



**Figura 1:** Sistemas de coordenadas utilizado para descrever o PRTC.  $X - Y$  é o sistema inercial e  $\bar{x} - \bar{y}$  o não inercial.

Para fazer isso vamos partir das equações de rotação de  $m_3$  entre os sistema de referência,

$$X = \bar{x} \cos(\omega t) - \bar{y} \sin(\omega t) \quad (13)$$

e

$$Y = \bar{x} \sin(\omega t) + \bar{y} \cos(\omega t), \quad (14)$$

e escrevê-las da seguinte forma:

$$Z = z e^{i\omega t}. \quad (15)$$

Onde  $Z$  e  $z$  indicam a posição do corpo  $m_3$  nos dois sistemas de referência e são definidos assim:  $z = \bar{x} + i\bar{y}$  e  $Z = X + iY$ .

A partir dessas definições temos que a segunda derivada de  $Z$  pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} = \left[ \left( \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} - 2\omega \frac{d\bar{y}}{dt} - \bar{x}\omega^2 \right) + i \left( \frac{d^2 \bar{y}}{dt^2} + 2\omega \frac{d\bar{x}}{dt} - \bar{y}\omega^2 \right) \right] e^{i\omega t}. \quad (16)$$

Agora vamos multiplicar a equação 10 por  $i$  e somar com a equação 9. Fazendo isso obtemos a seguinte expressão:

$$\frac{d^2(X + Yi)}{dt^2} = -G \left[ m_1 \left( \frac{X + iY - b(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))}{r_{13}^3} \right) + m_2 \left( \frac{X + iY + a(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))}{r_{23}^3} \right) \right]. \quad (17)$$

A partir da definição de  $Z$  e  $z$  e sabendo que  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  podemos reescrever a expressão acima da seguinte forma:

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} = -G \left[ \left( m_1 \frac{\bar{x} - b}{r_{13}^3} + m_2 \frac{\bar{x} + a}{r_{23}^3} \right) + i \left( m_1 \frac{\bar{y}}{r_{13}^3} + m_2 \frac{\bar{y}}{r_{23}^3} \right) \right] e^{i\omega t}. \quad (18)$$

Ao compararmos as equações 16 e 18 concluímos que:

$$\frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} = -G m_1 \frac{(\bar{x} - b)}{r_{13}^3} - G m_2 \frac{(\bar{x} + a)}{r_{23}^3} + 2\omega \frac{d\bar{y}}{dt} + \bar{x}\omega^2 \quad (19)$$

e

$$\frac{d^2 \bar{y}}{dt^2} = -G \frac{m_1 \bar{y}}{r_{13}^3} - G \frac{m_2 \bar{y}}{r_{23}^3} - 2\omega \frac{d\bar{x}}{dt} + \bar{y}\omega^2. \quad (20)$$

As equações (19) e (20) descrevem o movimento de  $m_3$  no referencial não inercial. Note leitor que aparecem dois termos nas equações de movimento que não existem no referencial inercial (Eq. 9 e 10). Os dois primeiros são conhecidos, trata-se das forças gravitacionais exercidas pelas primárias, já o terceiro termo é a força centrífuga e o quarto a força de Coriolis.

Para simplificar os parâmetros do problema definimos o seguinte sistema de unidades:

**Tabela 1:** Sistema de unidades do PRTC

Grandeza	Valor
Unidade de massa	$m = m_1 + m_2 = 1$
Massa reduzida	$\mu = \frac{m_2}{(m_1+m_2)}$
$m_1$	$1 - \mu$
$m_2$	$\mu$
Unidade de comprimento	$r = a + b = 1$
Unidade de tempo	$\frac{1}{\omega}$
Constante Gravitacional	$G = 1$

1. A unidade de massa passa a ser a soma das massas das primárias  $m = m_1 + m_2 = 1$ . Neste caso optamos por trabalhar com a massa reduzida do sistema  $\mu = \frac{m_2}{(m_1+m_2)}$ . Assim  $m_2 = \mu$  e  $m_1 = 1 - \mu$ .
2. A unidade de comprimento passa a ser a distância entre as primárias,  $a + b = 1$ . Neste caso as coordenadas das primárias são:  $(\mu, 0)$  para  $m_1$  e  $(\mu - 1, 0)$  para  $m_2$ .
3. A velocidade angular passa a ser  $\omega = 1$ . Neste caso a unidade tempo passa a ser  $\frac{1}{\omega}$ .
4. A constante gravitacional passa a ser  $G = 1$ .

Com esses novos parâmetros as equações de movimento de  $m_3$  passam a ser:

$$\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = -(1 - \mu)\frac{\bar{x} - \mu}{r_{13}^3} - \mu\frac{\bar{x} + 1 - \mu}{r_{23}^3} + \bar{x} + 2\frac{d\bar{y}}{dt} \quad (21)$$

e

$$\frac{d^2\bar{y}}{dt^2} = -(1 - \mu)\frac{\bar{y}}{r_1^3} - \mu\frac{\bar{y}}{r_2^3} + \bar{y} - 2\frac{d\bar{x}}{dt}, \quad (22)$$

onde

$$r_{13} = \sqrt{(\bar{x} - \mu)^2 + \bar{y}^2} \quad (23)$$

e

$$r_{23} = \sqrt{(\bar{x} + 1 - \mu)^2 + \bar{y}^2}. \quad (24)$$

Como pode ser visto as equações de movimento de  $m_3$  são equações diferenciais de segunda ordem. Para resolvê-las numericamente vamos reduzi-las para equações de primeira ordem. Nesse caso, chamaremos  $\frac{d\bar{x}}{dt} = u$  e  $\frac{d\bar{y}}{dt} = v$ . Fazendo isso as equações de movimento de  $m_3$  passam a ser:

$$\frac{du}{dt} = -(1 - \mu)\frac{\bar{x} - \mu}{r_1^3} - \mu\frac{\bar{x} + 1 - \mu}{r_2^3} + \bar{x} + 2v \quad (25)$$

e

$$\frac{dv}{dt} = -(1 - \mu)\frac{\bar{y}}{r_1^3} - \mu\frac{\bar{y}}{r_2^3} + \bar{y} + 2u. \quad (26)$$

Neste trabalho nós utilizamos o método de Cauchy, também conhecido como método do ponto médio, para resolver numericamente essas EDOs. Uma descrição detalhada desse método pode ser encontrada nas referências [12, 13]. Nele, a solução numérica das EDO's é calculada a partir de quatro condições iniciais  $(x(0), y(0), v(0))$

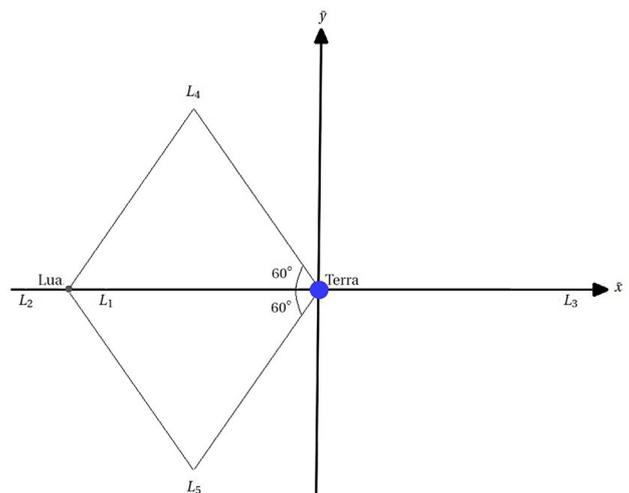
e  $u(0)$ ). Para determinar essas condições nós utilizamos o método de Rabe [14]. No apêndice desse artigo nós apresentamos um código, escrito em Python, para determinar essas condições iniciais e resolve r as EDO's por esse método numérico. Aqui é importante salientar que existem outros métodos, como por exemplo o Runge Kutta [12, 13], que também produz resultados muito bons para a simulação do PRTC.

### 3.2. Pontos de Lagrange

No PRTC existem cinco pontos estacionários, comumente referidos como pontos de Lagrange,<sup>1</sup> onde a força sobre  $m_3$  é zero. Esses pontos existem porque a força gravitacional resultante exercida pelas primárias sobre  $m_3$ , apontada na direção do centro de gravidade do sistema, é balanceada pela força centrífuga que está na mesma direção da anterior mas em sentido contrário.

A Fig. 2 mostra a posição dos pontos de Lagrange para o sistema formado pelas primárias Terra e Lua. Os três pontos colineares ( $L_1, L_2$  e  $L_3$ ) são pontos instáveis para qualquer valor de  $\mu$  e os outros dois ( $L_4$  e  $L_5$ ) são estáveis quando  $\mu < \approx 0.0385208965$  [16]. Os pontos colineares são instáveis porque se um corpo estiver sobre  $L_1, L_2$  ou  $L_3$  e sofrer a ação de uma força externa ele sairá da posição de equilíbrio e não retornará. Já em  $L_4$  ou  $L_5$  o corpo retorna à sua posição de equilíbrio ou librará ao seu redor em uma órbita fechada, como a que veremos na próxima sessão.

As coordenadas dos pontos de Lagrange podem ser obtidas a partir das equações de movimento de  $m_3$ , 21 e 22, quando sua aceleração e velocidade são zero. Nesta situação temos:



**Figura 2:** Ilustração dos Pontos de Lagrange do sistema Terra-Lua.

<sup>1</sup>O primeiro a propor a existência desses pontos foi Euler em 1776 com a indicação da existência dos três pontos colineares,  $L_1, L_2$  e  $L_3$ . Em 1772 Joseph Louis Lagrange previu os pontos  $L_4$  e  $L_5$  e em uma obra posterior, em 1773, ele previu a existência dos cinco pontos [15].

$$-(1 - \mu) \frac{(\bar{x} + \mu)}{r_{13}^3} - \mu \frac{(\bar{x} + 1 - \mu)}{r_{23}^3} + \bar{x} = 0 \quad (27)$$

e

$$-(1 - \mu) \frac{\bar{y}}{r_{13}^3} - \mu \frac{\bar{y}}{r_{23}^3} + y = 0. \quad (28)$$

Quando  $\bar{y} = 0$  as soluções de equilíbrio da equações 27 são as coordenadas de  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$ . Métodos para determinar as coordenadas desses pontos podem ser encontrados nas referências [17, 18]. No apêndice apresentamos um código para calcular essas coordenadas. Como  $L_4$  e  $L_5$  formam um triângulo equilátero com as primárias, temos que  $r_1 = r_2 = 1$ . Por isso as coordenadas de  $L_4$  e  $L_5$  são :

$$L_4 : \bar{x} = \mu - 0.5; \bar{y} = \text{sen}60^\circ \quad (29)$$

$$L_5 : \bar{x} = \mu - 0.5; \bar{y} = -\text{sen}60^\circ. \quad (30)$$

Como exemplos da relevância de se estudar os pontos de Lagrange podemos citar o telescópio SOHO [19], que faz observações do Sol estacionado em  $L_1$ , a investigação da face oculta da lua quando um satélite é estacionado em  $L_2$  [5], o telescópio James Webb(JWST), no  $L_2$  do sistema Sol-Terra, que substituirá o telescópio espacial Hubble, e a utilização de  $L_4$  e  $L_5$  do sistema Terra-Lua para abrigar estações espaciais [17]. A vantagem de colocar um satélite em um dos pontos de Lagrange é que ele permanece estacionário em relação ao referencial não inercial das primárias. Por exemplo, o SOHO, em  $L_1$ , está preso em uma órbita na linha Sol-Terra e direcionado para o Sol o tempo todo. O mesmo acontece quando um satélite é estacionado em  $L_2$  do sistema Terra-Lua. Nesse caso é possível observar a face oculta da Lua o tempo todo, ou, como no caso do JWST, observar o universo sem se preocupar com a radiação do Sol e da Terra. Mais exemplos de objetos naturais e artificiais nos pontos de Lagrange podem ser vistos na tabela 1 da referência [17]. Além dessas áreas há também o interesse na determinação e análise da estabilidade desses pontos quando são estudados os objetos menores do sistema solar, planetas anões e os asteroides [14, 18, 21], e também o estudo da troca de material pelo ponto  $L_1$  em sistemas estelares binários [20].

#### 4. Aplicação 1: Determinação da órbita de 2010 TK7

Os troianos são asteroides que possuem órbitas que libram em torno do ponto  $L_4$  ou  $L_5$  (Fig. 3). Eles foram previstos por Lagrange em 1772 mas o primeiro só foi descoberto em 1906 por Max Wolf [21]. Trata-se do asteroide 588 Achilles. Atualmente são conhecidos diversos asteroides troianos, por exemplo os associados a Marte, Júpiter e Netuno [22–24].

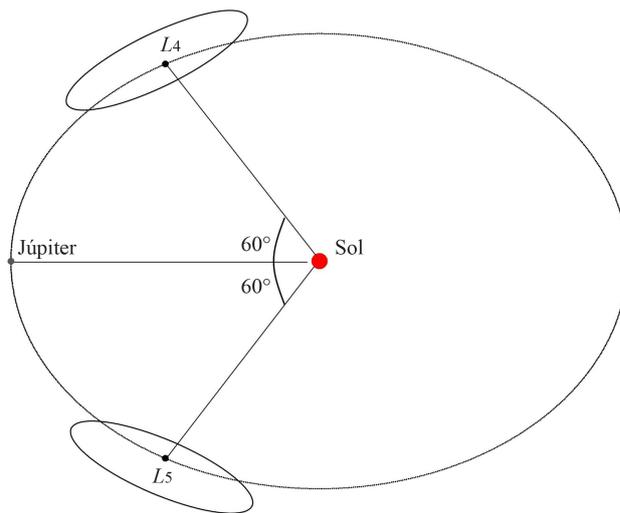


Figura 3: Composição das órbitas dos asteroides troianos do sistema Sol-Júpiter em  $L_4$  e  $L_5$ .

A existência de troianos nesses planetas levantou a questão de se esses objetos não deveriam existir também no sistema Sol-Terra. Weissman e Wetherill (1974) [25] fizeram um estudo teórico e simularam a existência desses objetos para esse sistema. Entretanto, só em 2010 após a análise de observações no infravermelho feitas pelo satélite WISE é que foi descoberto o primeiro asteroide troiano do sistema Sol-Terra. Trata-se do objeto denominado 2010 TK7 em uma órbita confinada em torno de  $L_4$  (órbita do tipo girino) e com um período de 365.3947 dias [26]. Ou seja, uma ressonância de movimento médio do tipo 1:1 com a Terra.

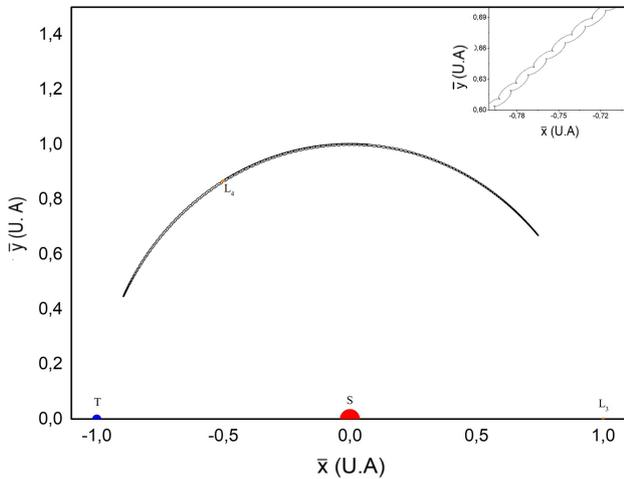
Para traçar a órbita de 2010 TK7 a partir do PRTC nós utilizamos o sistema de unidades definido na sessão 3.1. Na tabela (2) apresentamos os parâmetros determinados a partir das massas das primárias, Sol (de  $1.988 \times 10^{30} kg$ ) e Terra ( $5.973332 \times 10^{24} kg$ ), o período orbital do sistema (365.2425 dias) e as condições iniciais de 2010 TK7, determinadas pelo o método de Rabe e utilizadas na simulação.

A Fig. 4 é a órbita de 2010 TK7 traçada a partir das equações 27 e 28 com os parâmetros da tabela 1. Trata-se de uma órbita fechada ao redor do ponto  $L_4$ , com período de 395 anos, e que vai desde próximo da Terra até próximo do ponto  $L_3$ . No detalhe é possível observar a libração alongada superposta aos loops de curto período, os laços epicíclicos. Comportamento previsto de acontecer na órbita de asteroides troianos [27] e foi que foi observado em 2010 TK7 por Conor e colaboradores [26].

Quando comparamos essa simulação com a dos descobridores do asteroide notamos que, apesar de termos utilizado a aproximação do PRTC e um método numérico modesto para simular a órbita de 2010 TK7, nosso resultado se assemelha muito com o daquele artigo, que utilizou um método numérico muito mais sofisticado, o integrador simplético variável [28]. Esse tipo de integrador é uma ferramenta computacional muito poderosa

**Tabela 2:** Parâmetros orbitais do PRTC do sistema Sol-Terra e condições iniciais de 2010 TK7 utilizadas para simular a sua órbita

Parâmetro	Valor
$\mu$	0.000003002505
$m_1 = (1 - \mu)$	0.999996997495
$m_2 = \mu$	0.000003002505
$m_1(x, y)$	$(\mu, 0)$
$m_2(x, y)$	$(\mu - 1, 0)$
$\omega = \frac{2\pi}{P}$	$1.990 \times 10^{-7} \frac{rad}{s}$
unid. tempo = $\frac{1}{\omega}$	$5.024 \times 10^6 s$
unid. massa $m = m_1 + m_2$	$1.998 \times 10^{30} kg$
unid. dist. = $G(m_1 + m_2) = r^3\omega^2$	$r = 1.002 A.U$
$x(0)$	0.500446997495
$y(0)$	0.866804826648
$u(0)$	0.000587109356
$v(0)$	0.000338356144

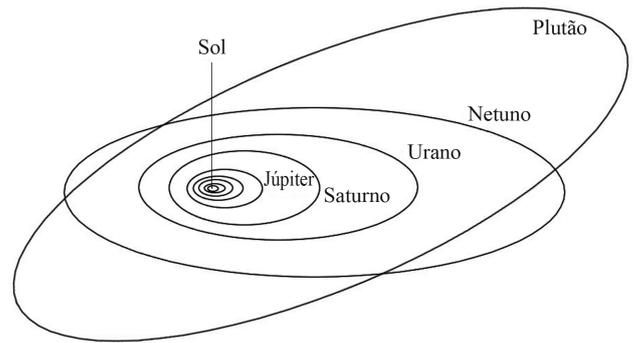


**Figura 4:** Órbita tipo girino do asteroide troiano 2010 TK7. Como a unidade de tempo do sistema Sol-Terra é 0,16 anos, com o  $\Delta t = 0,05$  foram necessárias 49375 interações para reproduzir uma libração completa, 395 anos. No canto superior direito a ampliação de um pedaço da órbita mostra os laços epicíclicos.

para modelar sistemas dinâmicos por um longo intervalo de tempo, fornecendo informações dinâmicas globais, tais como, pontos de equilíbrio e regiões de instabilidade, que o nosso modelo não é capaz de reproduzir.

### 5. Aplicação II: Libração de Plutão

Plutão é um planeta anão que possui uma configuração orbital diferente dos planetas do sistema solar. Sua excentricidade orbital ( $e = 0,2488$ ) e sua inclinação orbital em relação ao plano da eclíptica ( $i = 17,1417^\circ$ ) são muito superiores a dos planetas, que possuem órbitas quase circulares ao redor do Sol e próximas do plano da eclíptica (Figura 5). Devido a essa excentricidade, no periélio Plutão fica mais próximo do Sol do que Netuno,



**Figura 5:** Visão superior das órbitas dos planetas e de Plutão.

no entanto, o valor elevado de  $i$  faz com ele passe bem acima da órbita de Netuno, cerca de 8 UA.

Mesmo assim é de se imaginar que Plutão possa em algum momento colidir com Netuno, uma vez que a perturbação gravitacional desse planeta poderia alterar aspectos da órbita de Plutão ao longo de milhões de anos, tornando possível uma colisão. Entretanto, isso não acontece porque existe uma ressonância orbital <sup>1</sup> 3:2 entre as órbitas desses planetas ( $P_N = 165$  anos e  $P_P = 248$  anos). Isto é, a cada três órbitas que Netuno faz ao redor do Sol, Plutão faz duas. Em 1965 Cohen e Hubbard [29] propuseram que essa ressonância assegura que a distância mínima entre Plutão e Netuno, no periélio, sempre será superior a 18 UA, eliminando assim, por milhões de anos, a possibilidade a colisão entre eles. Essa previsão foi confirmada em 1971 por Williams e Benson [30].

Esses autores mostraram que devido a ressonância orbital 3:2 o periélio de Plutão libra com uma amplitude de  $76^\circ$  em um período de cerca de 20.000 anos. Essa libração ocorre porque há uma troca de momento angular entre Netuno e Plutão, fazendo esse planeta anão oscilar entre uma órbita mais alta, quando ganha momento angular orbital e mais baixa quando perde.

Nós utilizamos o PRTC para simular essa libração e o comportamento da órbita de Plutão, relativa ao sistema de referência Sol-Netuno (primárias). Podemos utilizar o PRTC porque a massa de Plutão é desprezível em relação as massas das primárias. Neste caso nós utilizamos o sistema de unidades definido na sessão 3.1 para simular a órbita. Na tabela (3) apresentamos os parâmetros determinados a partir das massas das primárias, Sol ( $1.988 \times 10^{30} kg$ ) e Netuno ( $1.024 \times 10^{26} kg$ ), e o período orbital do sistema (165 anos). Além disso, as condições iniciais de Plutão que foram utilizadas no método de Cauchy.

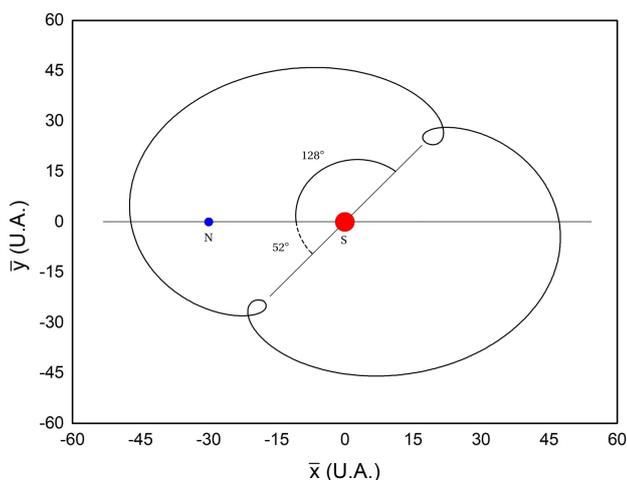
<sup>1</sup>Ressonância orbital é um fenômeno que ocorre quando dois ou mais corpos, em órbita, exercem influência gravitacional mútua. Isso faz com que o movimento médio dos corpos, por exemplo, os de Netuno e Plutão, fiquem relacionados pela razão dos seus períodos orbitais. No caso desses planetas, 3:2, porque a cada três órbitas que Netuno ( $P_N = 165$  anos) faz ao redor do Sol, Plutão ( $P_P = 248$  anos) faz duas.

**Tabela 3:** Parâmetros orbitais do PRTC do sistema Sol-Netuno e condições iniciais de Plutão utilizadas para simular a sua órbita.

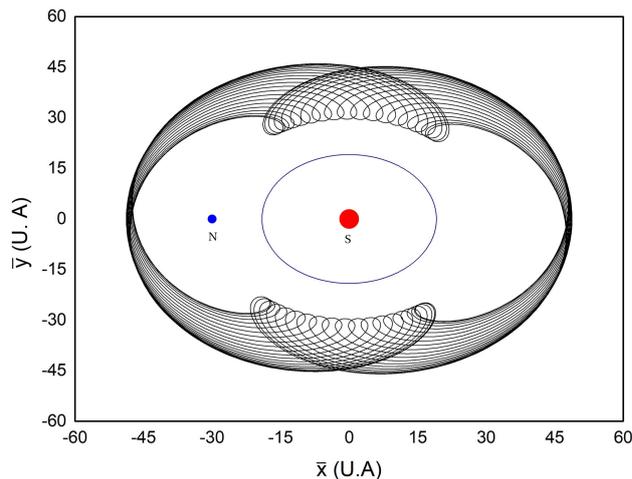
Parâmetro	Valor
$\mu$	0.00005250000
$m_1 = (1 - \mu)$	0.99994750000
$m_2 = \mu$	0.00005250000
$m_1(x, y)$	$(\mu, 0)$
$m_2(x, y)$	$(\mu - 1, 0)$
$\omega = \frac{2\pi}{P}$	$1.203 \times 10^{-9} \frac{rad}{s}$
unid. tempo = $\frac{1}{\omega}$	$8.314 \times 10^8 s$
unid. massa $m = m_1 + m_2$	$1.998 \times 10^{30} kg$
unid. dist. = $G(m_1 + m_2) = r^3 \omega^2$	$r = 30.15 A.U$
$x(0)$	-0.60739559520
$y(0)$	-0.77749682650
$u(0)$	0.10833422340
$v(0)$	-0.08463997159

A Fig. 6 mostra duas revoluções de Plutão, 496 anos, ao redor do sistema Sol - Netuno. Como pode ser visto, no periélio Plutão está a uma distância angular mínima de  $52^\circ$  e máxima de  $128^\circ$  em relação a Netuno, o que corresponde a uma distância superior a 18 UA.

A Fig. 7 é a figura anterior após uma libração completa de Plutão, cerca de 20.297 anos. Como se trata de um movimento periódico, pode-se afirmar que no periélio a distância entre Plutão e Netuno permanece superior a 18 AU, como previsto por Cohen e Hubbard [29]. A distância mínima entre Plutão e Netuno, cerca de 17 UA, ocorre quando esse planeta anão está no afélio, aproximadamente a 49.000 UA do Sol. Além disso, podemos observar que a menor distância entre Plutão e o Sol ocorre quando este planeta anão está a  $90^\circ$  de Netuno. Na figura é possível observar que esse menor periélio ocorre quando Plutão passa a cerca de 29.5 UA do Sol,



**Figura 6:** Duas órbitas completas de Plutão no sistema de referência Sol-Netuno. As marcações mostram a distância angular mínima e a máxima entre Plutão e Netuno quando esse planeta anão está no periélio.



**Figura 7:** Uma libração completa da órbita de Plutão no sistema de referência Sol-Netuno e a órbita de Urano nesse sistema de referência. Como a unidade de tempo do sistema Sol-Netuno é 26,36 anos, com o  $\Delta t = 0,05$  foram necessárias 15400 interações para reproduzir uma libração completa, 20.297 anos.

penetrando assim na órbita de Netuno. Por fim, ao observarmos a órbita de Urano relativa ao sistema Sol-Netuno vemos que a distância mínima entre Plutão e esse planeta é de 11 UA, muito menor do que a distância em relação a Netuno.

Os resultados obtidos na simulação da órbita de Plutão com o PRTC estão de acordo com os da literatura [29–31] e nos mostra que é possível estimar diversos valores relevantes a respeito desse planeta anão, sem precisar considerar a perturbação gravitacional dos demais corpos do sistema solar, o problema de N corpos, muito mais complicado e que requer um código numérico muito mais sofisticado.

### 6. Conclusão

O objetivo desse trabalho foi apresentar, desenvolver didaticamente e aplicar o PRTC para simular as órbitas de dois astros do sistema solar, para mostrar que o estudo desse assunto pode ir além do desenvolvimento matemático do problema, que também é importante. Além disso, procuramos mostrar a relação entre o PRTC e a existência dos pontos de Lagrange. Reunimos todos esses assuntos em um código numérico, escrito na linguagem de programação Python e que está no apêndice desse trabalho, para simular a órbita do asteroide troiano da Terra 2010 TK7 e a órbita de Plutão, relativa ao sistema de referência Sol-Netuno. Ambos como exemplos de aplicação contextualizada do PRTC. Nos dois casos estudados conseguimos verificar as trajetórias, valores de grandezas e comportamentos orbitais dos astros, já bem conhecidas em virtude de trabalhos de pesquisa avançados e que utilização técnicas computacionais muito mais sofisticadas. Por isso, entendemos que esses resultados validam os procedimentos adotados nesse trabalho como

um instrumento pedagógico que pode ser utilizado no ensino do PRTC.

Para além dos resultados obtidos aqui neste trabalho, defendemos, inclusive, que esse assunto seja mais explorado na disciplina de mecânica clássica, pelo fato de entendermos que ele tem um caráter interdisciplinar. Isto porque o PRTC se relaciona com o estudo das equações diferenciais, com a gravitação universal e com os métodos numéricos. Conteúdos presentes no estudo dos movimentos dos astros do sistema solar e dos satélites artificiais, assuntos que costumam despertar grande interesse dos estudantes.

Nesse sentido, deixamos aqui como sugestão o estudo de duas aplicações do PRTC para o sistema Sol - Júpiter. Primeiro a simulação da órbita de um asteroide troiano em torno de  $L_4$ , cujas condições iniciais são :  $x(0) = -0.524046125$ ,  $y(0) = 0.909326674$ ,  $u(0) = 0.0646761399$  e  $v(0) = 0.0367068277$ . Segundo a simulação da órbita do asteroide Hilda, que libra no sistema Sol-Júpiter com um período de 270 anos. As condições iniciais de Hilda são :  $x(0) = -0.4952265404$ ,  $y(0) = -0.4163448036$ ,  $u(0) = 0.4389046359$  e  $v(0) = -0.5230661767$ . As duas aplicações podem ser testadas com os códigos que disponibilizamos no apêndice deste trabalho.

## Material Suplementar

O seguinte material suplementar está disponível online:  
Apêndice

## Referências

- [1] A.S.T. Pires, *Evolução das idéias da física* (Livraria da Física, São Paulo, 2011) 2ª ed.
- [2] <http://astro.if.ufrgs.br/newton/principia.pdf>, acessado em 18/05/2018.
- [3] J.B. Marion e S.T. Thornton, *Dinâmica clássica de partículas e Sistema* (Cengage Learning, São Paulo, 2014) 1ª ed.
- [4] E. Figueiredo e A.S. Castro, Rev. Bras. Ens. Fis. **23**, 289 (2001).
- [5] A.F.B.A. Prado, *Trajatórias Espaciais e Manobras Assistidas por Gravidade* (INPE, São José dos Campos, 2001).
- [6] R.F. Prazeres, *Métodos Clássicos e Qualitativos no Estudo do Problema dos Três Corpos*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro (2010).
- [7] V. Szebehely, *Theory of Orbits: The Restricted Problem of Three Bodies* (Academic Press, New York, 1967)
- [8] H. Goldstein, C.P. Poole e J.L. Safko, *Classical mechanics* (Addison-Wesley, New York, 2000), 3ª ed.
- [9] A.O. Lopes, *Introdução à mecânica clássica* (Edusp, São Paulo, 2006).
- [10] K.R. Symon, *Mechanics* (Addison-Wesley, 1960 ), 2ª ed.
- [11] F.A.C. Martins e M. Zanotello, Rev. Bras. Ens. Fis. **40**, e2310 (2018).
- [12] P. Hellings, *Astrophysics with a PC: An Introduction to Computational Astrophysics* (Willmann-Bell, Richmond, 1994).
- [13] S.C. Chapra, *Métodos Numéricos Aplicados com MATLAB para Engenheiros e Cientistas* (AMGH, Porto Alegre, 2013) 3ª ed.
- [14] E. Rabe, Astron. Astronomical Journal **66**, 500 (1961).
- [15] <http://www.spaceacademy.net.au/library/notes/.htm>, acessado em 18/05/2018.
- [16] F.J.T. Salazar, C.F. Melo, E.E.N. Macau e O.C. Winter. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy **114**, 201 (2012).
- [17] E.C.F. Fortes e F.A.M. Kolland, Rev. Bras. Ens. Fis. **40**, e3306 (2018).
- [18] J. Worthington, *A Study of the Planar Circular Restricted Three Body Problem and the Vanishing Twist*. Tese de Doutorado, University of Sydney, 2012.
- [19] <https://sohowww.nascom.nasa.gov/home.html>, acessado em 18/05/2018.
- [20] C. Hellier, *Cataclysmic Variables Stars: How and why they vary* (Spring, New York, 2001).
- [21] S. Diniega, K.M. Sayanagi, J. Balcerski, B. Carande, R.A.D. Silva, A.A. Fraeman, S.D. Guzewich, J. Hudson, A.L. Nahm, S.P. McIntyre et al. Planetary and Space Science **76**, 68 (2013).
- [22] <http://www.skyandtelescope.com/astronomy-news/mars-trojans-possible-source-found/>, acessado em 18/05/2018.
- [23] <https://home.dtm.ciw.edu/users/sheppard/L5trojan/>, acessado em 18/05/2018.
- [24] <https://www.nasa.gov/content/goddard/lucy-the-first-mission-to-jupiter-s-trojans>, acessado em 18/05/2018.
- [25] P.R. Weissman e G.W. Wetherill, Periodic Astronomical Journal **79**, 404 (1974).
- [26] M. Connors, P. Wiegert e C. Veillet, Nature **475**, 481 (2011).
- [27] R.G. Stacey e M. Connors, Planetary and Space Science **56**, 358 (2008).
- [28] E. C. Nogueira, Revista TECCEN **2**, 21 (2009).
- [29] C.J. Cohen e E.C. Hubbard, Astronomical Journal **70**, 10 (1965).
- [30] J.G. Williams e G.S. Benson, Astronomical Journal **76**, 167 (1971).
- [31] Y. Kozai, Astronomical Journal **67**, 591 (1962).