Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 41, nº 3, e20180217 (2019)
www.scielo.br/rbef
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2018-0217

Artigos Gerais
Licença Creative Commons

Um Novo Método para o Cálculo do Propagador da Eletrodinâmica

A New Method to get the Propagator of Electrodynamics

Flávio P. Cruz[1], José A. Santos[*1], Victor J. V. Otoya[1]

[1]Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sudeste de Minas Gerais, Juiz de Fora, MG, Brasil

Recebido em 26 de Julho, 2018. Revisado em 05 de Novembro, 2018. Aceito em 07 de Novembro, 2018.

Neste artigo oferecemos um novo método para a obtenção do propagador da Eletrodinâmica. Para atingir esse objetivo faremos uso de alguns teoremas importantes da álgebra linear tais como o teorema de Cayley-Hamilton e alguns teoremas relacionados a operadores de projeção; fornecendo desta maneira uma aplicação da teoria de subespaços lineares na teoria quântica de campos.
Palavras-chave: álgebra linear, teorema de Cayley-Hamilton, eletrodinâmica

In this article we offer a new method to obtain the Propagator of Electrodynamics. In order to achieve this goal we will use some important theorems of linear algebra such as the Cayley-Hamilton theorem and some theorems related to projection operators; thus providing an application of linear subspace theory in quantum field theory.
Keywords: linear algebra, Cayley-Hamilton's Theorem, electrodynamics

1. Introdução

Na Teoria Quântica de Campos (TQC) o cálculo do propagador é essencial para o desenvolvimento perturbativo na obtenção de seções de choque [1–4], assim como também para elucidar a natureza das excitações que surgem na interação entre partículas e campos [5–7]. Por essa razão, torna-se importante o conhecimento de diferentes métodos para calcular estes propagadores.

Neste trabalho apresentamos um método alternativo para o cálculo de propagadores, e o aplicamos para o caso da Eletrodinâmica. O método proposto é uma aplicação do Teorema de Cayley-Hamilton, no entanto, o conceito de projetores, e sua estreita relação com decomposição em soma direta, é muito útil no caso da Eletrodinâmica; fornecendo desta forma uma aplicação da Álgebra Linear [8–10] à TQC.

Iniciaremos apresentando o problema na seção (2) exemplificado pelo caso da Eletrodinâmica, tomando como ponto de partida a Lagrangiana e obtendo as equações de campo correspondente em termos do operador de onda. Na seção seguinte (3) faremos uma breve revisão de alguns conceitos e teoremas da Álgebra Linear, cujas demonstrações se encontram no Apêndice. Isto nos permite introduzir o método e apresentar suas implicações imediatas, além da sua aplicação. Dando continuidade, solucionaremos o problema para um operador de onda geral em (4); finalmente, em (5) aplicaremos o método para a obtenção do propagador da Eletrodinâmica.

2. Definição do Problema

Partiremos da Lagrangiana da Eletrodinâmica

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A^\mu)^2 - J_\mu A^\mu,$$

sendo A^μ o potencial vetor, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ o tensor do campo eletromagnético e J_μ uma corrente externa. O termo de fixação de calibre, com o parâmetro α, deve ser incluído para que seja possível realizar o cálculo do propagador. De fato, como será mostrado, sem este termo o operador de onda não seria inversível.

Podemos reescrevê-la como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}A^\mu \mathcal{O}_{\mu\nu} A^\nu - J_\mu A^\mu,$$

onde $\mathcal{O}_{\mu\nu}$ é o operador de onda, dado por

$$\mathcal{O}_{\mu\nu} = \Box\eta_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu + \frac{1}{\alpha}\partial_\mu\partial_\nu.$$

As equações de campo se escrevem da forma

$$\mathcal{O}_{\mu\nu}A^\nu = J_\mu, \tag{1}$$

cuja solução é dada por

$$A^\nu(x) = A^\nu_h(x) + \int \frac{d^4y}{(2\pi)^4} G^\nu{}_\mu(x-y) J^\mu(y),$$

em que A^ν_h é a solução da equação homogênea associada a (1) e $G^\nu{}_\mu$ são as funções de Green do operador de onda, isto é, são as soluções do seguinte sistema de equações

$$\mathcal{O}^\mu{}_\nu\, G^\nu{}_\beta(x-y) = \delta^\mu{}_\beta\, \delta(x-y). \tag{2}$$

*Endereço de correspondência: joseamanciods@gmail.com.

Copyright by Sociedade Brasileira de Física. Printed in Brazil.

Para solucionar (2) usamos as transformadas de Fourier

$$G^{\nu}{}_{\mu}(x) = \int e^{ip\cdot x}\widetilde{G}^{\nu}{}_{\mu}(p)dp,$$

$$\delta(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{ip\cdot(x-y)}dp,$$

que ao serem substituídas em (2) nos fornece uma equação algébrica, cuja solução será dada pela inversão do operador de onda no espaço de momentos, dado por

$$M^{\mu}{}_{\nu}(p) = -p^2\left(\delta^{\mu}_{\nu} - \frac{p^{\mu}p_{\nu}}{p^2}\right) - \frac{p^2}{\alpha}\frac{p^{\mu}p_{\nu}}{p^2},$$

ou, em termos dos operadores transverso T e longitudinal L,

$$M^{\mu}{}_{\nu}(p) = -p^2T^{\mu}{}_{\nu}(p) - \frac{p^2}{\alpha}L^{\mu}{}_{\nu}(p). \tag{3}$$

Portanto, o cálculo das funções de Green se reduz basicamente ao problema de inversão de (3), sendo portanto o objetivo deste trabalho.

Para isso precisamos entender algumas definições matemáticas e um pouco mais sobre projetores.

3. Formalismo Matemático

Como vimos, a obtenção das funções de Green se reduz à inversão de operadores lineares, sendo portanto um problema de *Álgebra Linear*. Tendo isto em mente, faremos uma revisão de alguns conceitos e teoremas da álgebra linear que serão usados para a inversão, os principais sendo o *Teorema de Cayley-Hamilton* e alguns resultados sobre *Projetores* e sua relação com decomposição em soma direta. As demonstrações dos teoremas enunciados nesta seção se encontram no Apêndice.

Dado um operador linear $T : V \to V$, onde V é um espaço vetorial de dimensão finita, seu polinômio característico é definido por

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I), \tag{4}$$

onde I é a matriz identidade (usaremos a mesma notação para o operador identidade) e $A = [T]_B$ é a matriz de T na base $B = \{v_1, ..., v_d\}$, definida por $Tv_j = \sum_i A_{ij}v_i$.

Como sabemos, o polinômio característico p de T nos fornece seus autovalores (raízes de p), e em particular nos permite saber se T é inversível, já que este é o caso se, e somente se, $p(0) = detA \neq 0$. Além disso, como veremos a seguir, o polinômio característico também nos permite determinar o inverso T^{-1} de T.

Teorema 1. ***(Teorema de Cayley-Hamilton)*** *Seja $T : V \to V$ um operador linear e p o seu polinômio característico. Então p anula o operador T, isto é, $p(T) = 0$.*

Teorema 2. ***(Polinômio Minimal)*** *Seja $T : V \to V$ um operador linear. Então existe um único polinômio de grau $k \geqslant 1$*

$$p_0(\lambda) = a_k\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + ... + a_0$$

mônico ($a_k = 1$), o qual é o polinômio mônico de menor grau dentre aqueles que anulam T, sendo denominado o polinômio minimal de T. Além disso, p_0 divide o polinômio característico de T e possui as mesmas raízes.

3.1. Consequência do Teorema de Cayley-Hamilton

Seja $p(\lambda) = a_d\lambda^d + ... + a_1\lambda + a_0$ o polinômio característico de T, pelo teorema 1 temos

$$p(T) = a_dT^d + ... + a_1T + a_0I = 0.$$

Agora, supondo que T seja inversível, ou seja, $detA = p(0) = a_0 \neq 0$, e multiplicando ambos os membros da igualdade por T^{-1} obtemos $a_dT^{(d-1)} + ... + a_1I + a_0T^{-1} = 0$, donde

$$T^{-1} = -\frac{1}{a_0}\left(a_dT^{(d-1)} + ... + a_1I\right). \tag{5}$$

Assim, se T é inversível, então T^{-1} é uma combinação linear das potências de T e da identidade I, com coeficientes determinados pelo polinômio característico de T. Devemos observar que podemos utilizar qualquer polinômio que anule T, como por exemplo seu polinômio minimal p_0, este tendo a possível vantagem de diminuir a ordem das potências que aparecem em (5), porém, encontrar p_0 pode não ser uma tarefa fácil. Feita esta observação, discutiremos algumas implicações decorrentes de (5), que são relevantes em geral, e em particular para o caso de operadores de onda.

Suponhamos que T seja dado por uma combinação linear

$$T = \sum_{i=1}^{n}\alpha_iT_i, \tag{6}$$

o que ocorre com operadores de onda, como em (3), vemos que T^{-1}, caso exista, será uma combinação linear de I e produtos dos operadores T_i. Temos assim a motivação para determinar os produtos T_iT_j.

Um caso particular interessante ocorre quando T_iT_j pertencem a $Lin\{T_1, ..., T_n\}$ (subespaço gerado pelos operadores T_i), isto é, $T_iT_j = \sum_k \beta_{ijk}T_k$. De fato, se $T = \sum_i \alpha_iT_i$ for inversível, então $T^{-1} \in Lin\{I, T_1, ..., T_n\}$, ou seja, será uma combinação linear de I e dos T_i. Notemos que, neste caso, o subespaço $Lin\{I, T_1, ..., T_n\}$ será uma subálgebra, ou seja, se $T, U \in Lin\{I, T_1, ..., T_n\}$, sendo T inversível, então $TU, T^{-1} \in Lin\{I, T_1, ..., T_n\}$.

Definicao 1. *Seja $P : V \to V$ um operador linear. Dizemos que P é um projetor se, e somente se, $P^2 = P$. Operadores deste tipo são ditos Idempotentes.*

Uma consequência imediata é que todo vetor na imagem $ImgP = \{Pv; v \in V\}$ de um projetor P é seu autovetor com autovalor 1. De fato, se $w \in ImgP$, então $w = Pv \Rightarrow Pw = P^2v = Pv$, ou seja, $Pw = w$.

Teorema 3. *Seja $P : V \to V$ um projetor, então têm-se*

$$V = ImgP \oplus \ker P. \tag{7}$$

Ou seja, um projetor P decompõe V como soma direta da sua imagem e do seu núcleo $\ker P = \{v; Pv = 0\}$. *Além disso,* $\dim(V) = \dim(\ker P) + \dim(ImgP)$.

Teorema 4. *Seja P um projetor, então $I - P$ também é projetor. Além disso*

$$\ker P = Img(I - P)\,,\; ImgP = \ker(I - P). \tag{8}$$

Teorema 5. *Seja $W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_n \subset V$ a soma direta dos subespaços W_i. Se, para cada i, B_i é uma base de W_i, então a união delas $B = B_1 \cup \cdots \cup B_n$ é uma base do subespaço W, e portanto* $\dim W = \sum_{i=1}^{n} \dim W_i$.

4. Solução do Problema

Visto que o operador de onda no espaço de momentos (3) é escrito de forma semelhante a seguinte

$$M^{\mu}{}_{\nu} = \alpha L^{\mu}{}_{\nu} + \beta T^{\mu}{}_{\nu}, \tag{9}$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Nosso objetivo principal será usar (9) para obter o operador inverso de (3) da forma mais geral possível. Para isso iniciaremos um estudo mais profundo dos operadores $L, T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, definidos por $(Lx)^{\mu} = L^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$ e $(Tx)^{\mu} = T^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$, onde $x = (x^0, ..., x^{d-1}) \in \mathbb{R}^d$, a fim de mostrar que são projetores e obtermos o núcleo e a imagem de cada um deles.

4.1. Operador L

Primeiro mostraremos que L é projetor, e para isto basta mostrar que o mesmo é idempotente, ou seja, $L^2 = L$. De fato, temos

$$L^{\mu}{}_{\nu}\, L^{\nu}{}_{\theta} = \frac{p^{\mu} p_{\nu}}{p^2} \frac{p^{\nu} p_{\theta}}{p^2} = L^{\mu}{}_{\theta}.$$

Dando continuidade, encontraremos as dimensões do núcleo e da imagem de L. Considere um vetor $x \in \mathbb{R}^d$ qualquer, assim temos

$$(Lx)^{\mu} = \frac{p^{\mu} p_{\nu}}{p^2} x^{\nu} = \left(\frac{p \cdot x}{p^2} \right) p^{\mu},$$

ou seja, $Lx = \frac{p \cdot x}{p^2}\, p$, mostrando que a imagem de L é o subespaço gerado pelo vetor $p \in \mathbb{R}^d$. Logo

$$\dim(ImgL) = 1, \tag{10}$$

uma vez que $p \neq 0$, pois estamos considerando o caso $p^2 \neq 0$, e pelo teorema 3, segue-se que

$$\dim(\ker L) = d - 1. \tag{11}$$

4.2. Operador T

Da mesma forma que fizemos para L vamos mostrar que T é projetor. De fato, basta notar que $T = I - L$, e a conclusão segue do teorema 4. Além disso, pelo teorema 3, concluímos que

$$ImgT = kerL \qquad \text{e} \qquad kerT = ImgL.$$

Observação: como $L^2 = L$ e $T^2 = T$, temos então $LT = L(I - L) = 0$; assim, pela discussão da seção anterior, concluímos que caso $M = \alpha L + \beta T$ seja inversível, então M^{-1} será uma combinação linear de I,L e T.

4.3. Polinômio característico de M

Agora mostraremos como obter o polinômio característico do operador $M = \alpha L + \beta T$ a partir dos resultados encontrados sobre L e $T = I - L$. O ponto crucial para isto é a decomposição em soma direta

$$\mathbb{R}^d = \ker L \oplus ImgL,$$

fato que decorre de L ser um projetor. De fato, levando em conta os resultados (10) e (11), escolhemos bases $B_1 = \{v_1, v_2, ..., v_{d-1}\}$ de $\ker L$ e $B_2 = \{v_d\}$ de $ImgL$, obtendo assim uma base $B = B_1 \cup B_2$ de $\mathbb{R}^d$, conforme o teorema 5. Como $kerL = ImgT$ e $ImgL = kerT$, segue-se $B = \{v_1, ..., v_{d-1}, v_d\}$ é uma base de autovetores comuns a L e T, de maneira explícita,

- $L(v_i) = 0, \qquad T(v_i) = v_i,$
- $L(v_d) = v_d, \qquad T(v_d) = 0.$

Aplicando M a v_i e a v_d, temos

$$M(v_i) = \alpha L(v_i) + \beta T(v_i) = \beta v_i,$$

$$M(v_d) = \alpha L(v_d) + \beta T(v_d) = \alpha v_d.$$

Logo a matriz de M na base B é dada por

$$[M]_B = \begin{bmatrix} \beta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \alpha \end{bmatrix},$$

portanto, o polinômio característico de $M = \alpha L + \beta T$ é

$$p(\lambda) = (\beta - \lambda)^{(d-1)} (\alpha - \lambda). \tag{12}$$

Logo M é inversível se, e somente se, $p(0) \neq 0$, o que equivale a dizer que $\alpha, \beta \neq 0$.

4.4. Polinômio minimal de M

Agora, obteremos o polinômio minimal de M, notando que existem duas possibilidades, a saber, $\alpha = \beta$ e $\alpha \neq \beta$.

Consideremos primeiramente $\alpha \neq \beta$, neste caso mostraremos que $p_0(\lambda) = (\beta - \lambda)(\alpha - \lambda)$ é o polinômio minimal de M. Como p_0 é o polinômio mônico de menor grau que possui as mesmas raízes que o polinômio característico de M, basta mostrar que p_0 anula M. De fato, aplicando $p_0(M)$ aos vetores da base B, obtemos

$$p_0(M)(v_i) = (\alpha I - M)(\beta I - M)(v_i),$$

$$p_0(M)(v_i) = (\alpha I - M)(\beta v_i - \beta v_i) = 0,$$

e de forma análoga,

$$p_0(M)(v_d) = (\beta I - M)(\alpha v_d - \alpha v_d) = 0.$$

Portanto, conclui-se que $p_0(\lambda) = (\beta - \lambda)(\alpha - \lambda)$ é mesmo o polinômio minimal de M para $\alpha \neq \beta$.

Já para $\alpha = \beta$, o polinômio minimal de M é $p_0(\lambda) = (\lambda - \alpha)$. Com efeito, neste caso tal polinômio mônico é o de menor grau que possui as mesmas raízes que o característico de M, e como $M = \alpha(L + T) = \alpha I$ temos $p_0(M) = (M - \alpha I) = 0$.

5. Cálculo do Propagador

Por fim, vamos aplicar o método e obter M^{-1} partindo do polinômio minimal $p_0(\lambda) = (\beta - \lambda)(\alpha - \lambda)$ de M, para o caso $\alpha \neq \beta$. Como

$$(\beta I - M)(\alpha I - M) = 0,$$

então

$$\beta\alpha I - \beta M - \alpha M + M^2 = 0,$$

multiplicando ambos os membros por M^{-1}, temos

$$M^{-1} = \frac{1}{\alpha}\left(I - T\right) + \frac{1}{\beta}\left(I - L\right),$$

como $T = I - L$,

$$M^{-1} = \frac{1}{\alpha}\left(I - I + L\right) + \frac{1}{\beta}T,$$

portanto,

$$M^{-1} = \frac{1}{\alpha}L + \frac{1}{\beta}T. \tag{13}$$

Notemos que este resultado também é válido para $\alpha = \beta$, pois neste caso temos $M = \alpha(L + T) = \alpha I$. Diante do resultado (13) é evidente que para encontrarmos o inverso de (3) basta invertermos os termos que acompanham os operadores L e T, assim obtemos

$$\widetilde{G}^{\mu}{}_{\nu}(p) = -\frac{1}{p^2}\left[\delta^{\mu}{}_{\nu} - (1-\alpha)\frac{p^{\mu}p_{\nu}}{p^2}\right]. \tag{14}$$

6. Conclusão e Perspectivas

Neste artigo foi abordado o problema da obtenção do propagador da Eletrodinâmica de forma alternativa obtendo o resultado já conhecido na literatura [5–7].

Embora o método seja um pouco trabalhoso, este nos oferece uma forma mais rica de realizar este cálculo, uma vez que faz amplo uso dos métodos da álgebra linear, permitindo assim a sua utilização nas matérias de Física ou Matemática elementares como um exemplo de aplicação.

Visto que o método nos oferece uma separação em soma direta de subespaços; será interessante saber se o método pode ter utilidade prática, sendo, por isso, necessário generalizá-lo para obter o propagador do graviton, onde sabe-se que aparecem setores não diagonais no cálculo do propagador [5, 7].

Material Suplementar

O seguinte material suplementar está disponível online:
Apêndice

Referências

[1] C. Itzykson e J.B. Zuber, *Quantum Field Theory* (Mcgraw-hill, New York, 1980), p. 705.
[2] L.H. Ryder, *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1996).
[3] M.D. Schwartz, *Quantum Field Theory and the Standard Model* (Cambridge University Press, Cambridge, 2013).
[4] M.E. Peskin e D.V. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory* (Addison-Wesley Publishing Company, Boston, 1995).
[5] A. Accioly, J. Helayel-Neto, B. Pereira-Dias e C. Hernaski, Phys. Rev. D **86**, 105046 (2012).
[6] A.P. Baeta Scarpelli, H. Belich, J.L. Boldo and J.A. Helayel-Neto, Phys. Rev. D **67**, 085021 (2003).
[7] J.L. Boldo, J.A. Helayel-Neto, L.M. Moraes, C.A.G. Sasaki e V.J. Vasquez Otoya, Phys. Lett. B **689**, 112 (2010).
[8] S. Lang, *Linear Algebra* (Springer-Verlag, New York, 2002).
[9] E.L. Lima, *Álgebra Linear* (IMPA, Rio de Janeiro, 2014).
[10] S.J. Axler, *Linear Algebra Done Right* (Springer-Verlag, New York, 2015).

 DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2018-0217