

Um sentido físico para modelagem fracionária: O caso do amortecimento das ondas eletromagnéticas

A physical sense for fractional modeling: The Case of damping electromagnetic waves

José Humberto de Souza Prates^{*1}, Davidson Martins Moreira¹

¹Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial, Campus Integrado de Manufatura e Tecnologia, Salvador, BA, Brasil

Recebido em 26 de agosto de 2020. Aceito em 08 de setembro de 2020.

As ondas eletromagnéticas estão presentes em nosso cotidiano, sendo úteis em diversas áreas, tais como as teorias da medicina, geofísica, geologia, física, dentre outras. Na geofísica, por exemplo, aparecem com muita frequência nos métodos eletromagnéticos, onde são utilizados campos magnéticos, potenciais elétricos e ondas eletromagnéticas. As ondas eletromagnéticas surgem das equações de Maxwell, que são equações lineares no vácuo ou no interior dos átomos e dos núcleos e, considerando-se estes casos, dão origem a equações diferenciais também lineares. No entanto, as equações deduzidas são sempre resolvidas utilizando-se métodos clássicos de soluções de equações diferenciais de ordem inteira. Portanto, o objetivo deste trabalho é analisar a propagação de uma onda eletromagnética no vácuo, para uma equação de ordem inteira e fracionária, resolvendo-as através do método modificado da decomposição por Laplace (MMDL). A nova solução proposta permite uma variação do valor do parâmetro fracionário, resgatando as soluções das equações das ondas eletromagnéticas que se propagam em meios materiais, possibilitando analisar os diversos tipos de amortecimento para os mais variados meios.

Palavras-chave: ondas eletromagnéticas planas, geofísica, método modificado da decomposição por Laplace, equações diferenciais fracionárias.

Electromagnetic waves are present in our daily lives, being useful in several areas. These can be seen permeating the theories of medicine, geophysics, geology, physics, among others. In geophysics, for example, they appear very frequently in electromagnetic methods, where magnetic fields, electric potentials and electromagnetic waves are used. Electromagnetic waves arise from Maxwell's equations, which are linear equations in a vacuum or inside atoms and nuclei and, considering these cases, give rise to differential linear equations. However, the deduced equations are always solved using classical methods of solving whole order differential equations. Therefore, the objective of this work is to analyze the propagation of an electromagnetic wave in a vacuum, for an integer and fractional order equation, solving them through the modified method of Laplace decomposition (MMDL). The new proposed solution allows a variation of the fractional parameter value, rescuing the solutions of the equations of the electromagnetic waves that propagate in material media, making it possible to analyze the different types of damping for the most varied media.

Keywords: Flat electromagnetic waves, geophysics, modified method of decomposition by Laplace, fractional differential equations.

1. Introdução

Desde os primórdios do cálculo diferencial e integral um questionamento era comum: saber como se comportam os operadores de derivação e integração para equações de ordem não inteira. Mesmo assim, o cálculo fracionário permaneceu no anonimato por muito tempo. Neste sentido, como o cálculo de ordem inteira conseguia representar diversos fenômenos da ciência e dispunha de significados físicos e geométricos, o cálculo fracionário não ganhava força suficiente para emergir. Além da dúvida em sua natureza, existia ainda um questionamento sobre sua interpretação física e geométrica e sobre a alteração da dimensão física, quando a equação

era transformada de inteira para fracionária. Ainda hoje existem alguns estudos sobre essa interpretação [1–4], e também sobre o problema da dimensão [5]. Além disso, novos métodos de solução foram introduzidos na literatura [6–8] e, mais precisamente na década de 90, surgiram muitas publicações em livros, revistas, congressos sobre o tema. Atualmente, tem-se noção de como resolver tais equações e de lidar com o problema da dimensão, mas ainda é preciso lapidar a questão da interpretação física e geométrica.

A modelagem fracionária em equações diferenciais está em crescimento, no que diz respeito a sua utilização. Considera-se como a primeira aplicação do cálculo fracionário a solução do problema da Curva Tautocrônica, proposta por Niels Henrik Abel, em 1820, e trabalhado por Dirichlet, em 1840. Dentre outras aplicações das

* Endereço de correspondência: hprates2005@hotmail.com

derivadas fracionárias, existem as seguintes utilizações: no estudo de materiais com memória, fenômenos de difusão, epidemiologia, vibrações mecânicas e circuitos elétricos. Recentemente, alguns trabalhos que propõem a modelagem fracionária podem ser citados: [9–11]. Estes trabalhos mostraram resultados melhores que os da literatura, os quais usam o cálculo diferencial de ordem inteira. Segundo [6], esta modelagem traz uma interpretação mais próxima da realidade do fenômeno. No entanto, apesar de alguns avanços significativos, a modelagem fracionária ainda carece de maior compreensão no que diz respeito a sua interpretação física. Desta forma, este trabalho busca analisar uma onda eletromagnética e sua propagação no vácuo resgatando soluções dos meios materiais. Além disto, uma correlação entre os parâmetros do meio e o expoente fracionário será encontrada, trazendo assim uma contribuição para a busca de entendimento da física do expoente fracionário.

Para atingir estes objetivos, inicialmente será discutido na seção 2, de maneira breve, o método modificado da decomposição por Laplace (MLDM), o qual reduz o custo computacional e, além disso, chega-se a um resultado mais estável e preciso [6]. Na seção 3, será abordada uma aplicação do método para a equação diferencial de uma onda eletromagnética extraída das equações de Maxwell. Na seção 4, uma modelagem fracionária é aplicada a equação diferencial da onda, sendo resolvida também com o mesmo método. Depois, uma variação do parâmetro fracionário é aplicada na solução, mostrando a compatibilidade dos valores fracionários com as soluções das equações em meios materiais.

2. Método modificado da decomposição de Laplace (MLDM)

Inicia-se com uma equação diferencial parcial, não linear, não homogênea e de segunda ordem, dada por [6]:

$$Lu(x, t) + Ru(x, t) + Nu(x, t) = h(x, t), \quad (1)$$

onde $L = \frac{\partial^2}{\partial t^2}$, R é o operador linear, N é o operador não linear e $h(x, t)$ é o termo fonte, com as seguintes condições iniciais:

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = g(x). \quad (2)$$

A função $f(x)$ representa o valor de u para t igual a zero e $g(x)$ é a variação do valor de u em relação a t também para t igual a zero (condições iniciais).

O primeiro passo na metodologia consiste em aplicar a transformada de Laplace em todos os membros da equação (1), na variável t . Assim,

$$s^2 \mathcal{L}[u(x, t)] - sf(x) - g(x) + \mathcal{L}[Ru(x, t)] + \mathcal{L}[Nu(x, t)] = \mathcal{L}[h(x, t)], \quad (3)$$

resultando,

$$\mathcal{L}[u(x, t)] = \frac{f(x)}{s} + \frac{g(x)}{s^2} - \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[Ru(x, t)] - \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[Nu(x, t)] + \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[h(x, t)], \quad (4)$$

O passo seguinte é escrever a solução $u(x, t)$ como a série:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t), \quad (5)$$

onde o operador não linear é dado por:

$$Nu(x, t), \quad (6)$$

e pode ser escrito como,

$$Nu(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \quad (7)$$

onde A_n , são os polinômios de Adomian, que podem ser calculados como:

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[N \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i \right) \right]_{\lambda=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

Substituindo-se (5) e (7) em (4),

$$\mathcal{L} \left[\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \right] = \frac{f(x)}{s} + \frac{g(x)}{s^2} + \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[h(x, t)] - \frac{1}{s^2} \mathcal{L} \left[R \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \right] - \frac{1}{s^2} \mathcal{L} \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n \right]. \quad (9)$$

Ao se comparar os termos na Eq. (9), tem-se:

$$\mathcal{L}[u_0(x, t)] = \frac{f(x)}{s} + \frac{g(x)}{s^2} + \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[h(x, t)] = K(x, s). \quad (10)$$

Para efeito de simplificação,

$$\mathcal{L}[u_{n+1}(x, t)] = -\frac{1}{s^2} \mathcal{L}[Ru_n(x, t)] - \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[A_n], \quad n = 1. \quad (11)$$

Aplicando-se a transformada inversa de Laplace, resulta:

$$u_0(x, t) = K(x, t), \quad (12)$$

Surgindo a relação de recorrência dada por,

$$u_{n+1}(x, t) = -\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} \mathcal{L}[Ru_n(x, t)] + \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[A_n] \right], \quad n \geq 0. \quad (13)$$

A modificação no método é feita assumindo-se:

$$K(x, t) = K_0(x, t) + K_1(x, t), \quad (14)$$

de forma que,

$$u_0(x, t) = K_0(x, t), \tag{15}$$

e,

$$u_1(x, t) = K_1(x, t) - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} \mathcal{L} [Ru_0(x, t)] + \frac{1}{s^2} \mathcal{L} [A_0] \right]. \tag{16}$$

O primeiro termo à direita na equação (16) é considerado somente no termo $u_1(x, t)$. Recursivamente, se pode escrever os demais termos da série na seguinte forma:

$$u_{n+1}(x, t) = -\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} \mathcal{L} [Ru_n(x, t)] + \frac{1}{s^2} \mathcal{L} [A_n] \right], n \geq 1. \tag{17}$$

Observa-se que a modificação do método está no termo $u_0(x, t)$, onde é considerado apenas o primeiro termo referente a $K(x, t)$. Esta pequena modificação é fundamental para a rápida convergência da série e a eliminação do ruído [6]. Obviamente, a solução obtida com esta metodologia é altamente dependente da escolha de $K_0(x, t)$ e $K_1(x, t)$.

3. Ondas eletromagnéticas

No trabalho [12] é deduzida, a partir das equações de Maxwell, a equação da onda eletromagnética para um meio linear, isotrópico e homogêneo, onde a densidade de carga é nula quer o meio seja condutor ou não condutor, sendo dada por:

$$\nabla^2 E - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \sigma \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} = 0. \tag{18}$$

onde E é o campo elétrico da onda eletromagnética, ε é a permissividade elétrica, μ é a permeabilidade magnética e σ , a condutividade.

No espaço vazio, semelhante a um dielétrico sem perdas (perfeito), tem-se: $\sigma = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$ e $\mu = \mu_0$. Sendo assim, a equação (18) pode ser escrita como,

$$\nabla^2 E - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0. \tag{19}$$

Usando-se a notação fatorial e, considerando que $E(\mathbf{r})$ varie apenas na direção z , resulta:

$$E(r, t) = E_m e^{-\beta z i} \cdot e^{i \omega t} = E(z, t). \tag{20}$$

Aplicando-se a equação (20) em (19) e fazendo $E(z) = e^{-\beta z i}$, tem-se:

$$\frac{\partial^2 (E(z) \cdot e^{i \omega t})}{\partial z^2} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 (E(z) \cdot e^{i \omega t})}{\partial t^2} = 0. \tag{21}$$

Simplificando,

$$\frac{\partial^2 E(z)}{\partial z^2} - \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 E(z) = 0. \tag{22}$$

Como $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$,

$$\frac{\partial^2 E(z)}{\partial z^2} - \beta^2 E(z) = 0. \tag{23}$$

Onde $\beta = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Para a equação (23) tem-se uma solução possível [13] dada por:

$$E(z) = E_m e^{-\beta z i}. \tag{24}$$

Logo,

$$E(0) = E_m, \tag{25}$$

$$\frac{\partial E}{\partial z}(0) = -\beta i E_m. \tag{26}$$

Agora, aplicando-se o método MMDL na equação (23), tem-se:

$$\mathcal{L} \left[\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \right] - \mathcal{L} [\beta^2 E] = \mathcal{L} [0]. \tag{27}$$

Obtendo-se,

$$s^2 E(s) - s E(0) - \frac{\partial E(0)}{\partial z} - \mathcal{L} [\beta^2 E] = 0, \tag{28}$$

e,

$$E(s) = \frac{1}{s} E(0) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial E(0)}{\partial z} - \frac{1}{s^2} \mathcal{L} [\beta^2 E]. \tag{29}$$

Aplicando-se a transformada inversa,

$$\mathcal{L}^{-1} [E(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} E(0) \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} \frac{\partial E(0)}{\partial z} \right] - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} \mathcal{L} [\beta^2 E] \right], \tag{30}$$

resulta,

$$E(z) = E(0) + z \left(\frac{\partial E(0)}{\partial z} \right) - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} \mathcal{L} [\beta^2 E] \right], \tag{31}$$

e verifica-se facilmente que,

$$E_0 = E_m, \tag{32}$$

$$E_1 = -z i \beta E_m - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} \mathcal{L} [\beta^2 E] \right], \tag{33}$$

e os demais termos vem da equação de recursiva,

$$E_{n+1} = -\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} \mathcal{L} [\beta^2 E] \right], n = 1, 2, 3, \dots \tag{34}$$

Logo, a série resultante é dada por,

$$E(z) = E_m \left(1 - i \beta z - \frac{1}{2} \beta^2 z^2 + \frac{1}{6} i \beta^3 z^3 + \frac{1}{24} \beta^4 z^4 - \frac{1}{120} i \beta^5 z^5 - \frac{1}{720} \beta^6 z^6 + \dots \right). \tag{35}$$

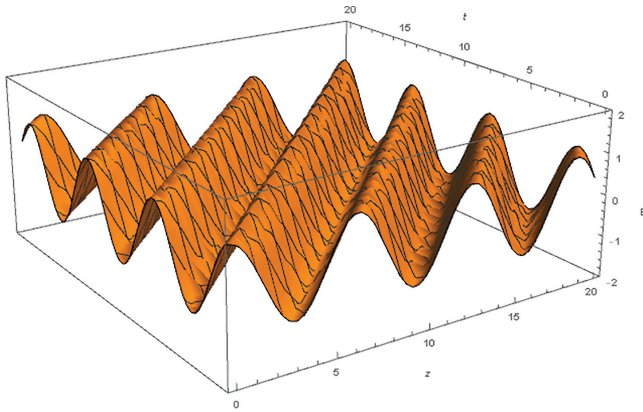


Figura 1: Campo elétrico (V/m) em função da variável espacial z (m) e do tempo t (s).

No entanto, pela identidade dada pela expressão:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x)^n}{n!} \text{ com } x = -\beta iz, \quad (36)$$

resulta,

$$E_{(z)} = E_m e^{-i\beta z}. \quad (37)$$

Assim inserindo-se o fator temporal, tem-se:

$$\begin{aligned} E(z, t) &= E_m e^{i(\omega t - \beta z)} \\ &= E_m [\cos(\omega t - \beta z) + i \operatorname{sen}(\omega t - \beta z)]. \end{aligned} \quad (38)$$

Tomando-se a parte real,

$$E(z, t) = E_m \cos(\omega t - \beta z). \quad (39)$$

Por conveniência, adota-se $\omega = 3.10^8$ rad/s e, por consequência, $\beta = 1$ rad/m, resultando na Figura 1, que representa o campo elétrico (V/m) em função da variável espacial z e do tempo t .

4. Ondas eletromagnéticas fracionárias

Para a utilização do cálculo fracionário, a maneira mais comum encontrada na literatura é simplesmente trocar a derivada de ordem inteira da equação diferencial, que descreve o fenômeno, por uma de ordem não inteira, resultando assim em equações diferenciais de ordem não inteira. Sendo assim, a equação (23) se transforma em:

$$\frac{\partial^\alpha E(z)}{\partial z^\alpha} - \beta^2 E(z) = 0, \text{ com } 1 \leq \alpha \leq 2. \quad (40)$$

Usando-se as condições iniciais do problema de ordem inteira,

$$E(0) = E_m, \quad (41)$$

$$\frac{\partial E}{\partial z}(0) = -\beta^2 i E_m. \quad (42)$$

Aplicando-se o MMDL, tem-se:

$$\mathcal{L} \left[\frac{\partial^\alpha E}{\partial z^\alpha} \right] + \mathcal{L} [\beta^2 E] = \mathcal{L} [0]. \quad (43)$$

obtendo-se,

$$s^\alpha E(s) - s^{\alpha-1} E(0) - s^{\alpha-2} \frac{\partial E(0)}{\partial z} + \mathcal{L} [\beta^2 E] = 0, \quad (44)$$

e,

$$E(s) = \frac{1}{s} E(0) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial E(0)}{\partial z} - \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L} [\beta^2 E]. \quad (45)$$

Aplicando-se a transformada inversa,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} [E(s)] &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} E(0) \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} \frac{\partial E(0)}{\partial z} \right] \\ &\quad - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L} [\beta^2 E] \right], \end{aligned} \quad (46)$$

resulta,

$$E(z) = E(0) + z \frac{\partial E(0)}{\partial z} - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L} [\beta^2 E] \right], \quad (47)$$

e verifica-se facilmente que,

$$E_0 = E_m, \quad (48)$$

$$E_1 = -zi\beta E_m - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L} [\beta^2 E_0] \right], \quad (49)$$

e os demais termos vem da equação de recursiva,

$$E_{n+1} = -\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L} [\beta^2 E_n] \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (50)$$

Logo, a série resultante é:

$$\begin{aligned} E(z) &= E_m \left(1 - i\beta^2 z - \frac{\beta^2 z^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{iz\beta^4 z^\alpha}{\Gamma(2+\alpha)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta^4 z^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} - \frac{iz\beta^6 z^{2\alpha}}{\Gamma(2+2\alpha)} - \frac{\beta^6 z^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} + \dots \right). \end{aligned} \quad (51)$$

Dado que,

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} e^{E_{\alpha,2}(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 2)}$$

sejam as funções de Mittag-Leffler de um e dois parâmetros, respectivamente [14], logo,

$$E_{(z)} = E_m [E_\alpha(-\beta^2 z^\alpha) - \beta iz E_{\alpha,2}(-\beta^2 z^\alpha)]. \quad (52)$$

Inserindo-se o fator temporal,

$$E(z) = e^{i\omega t} E_m [E_\alpha(-\beta^2 z^\alpha) - \beta iz E_{\alpha,2}(-\beta^2 z^\alpha)] \quad (53)$$

onde,

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \operatorname{sen}(\omega t). \quad (54)$$

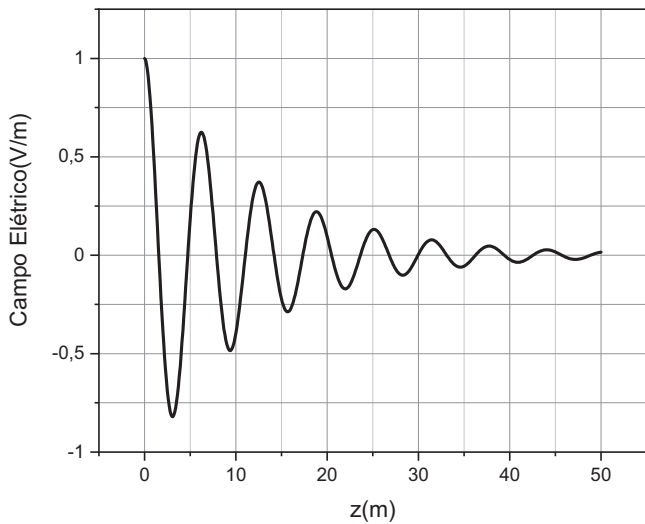


Figura 2: Campo elétrico (V/m) em função de z (m) com $\alpha = 1.9$.

Logo,

$$E_{(z,t)} = (\cos(\omega t) + i \operatorname{sen}(\omega t)) E_m \times [E_\alpha(-\beta^2 z^\alpha) - \beta i z E_{\alpha,2}(-\beta^2 z^\alpha)]. \quad (55)$$

Tomando-se a parte real, tem-se:

$$E_{(z,t)} = E_m [\cos(\omega t) E_\alpha(-\beta z^\alpha) + \operatorname{sen}(\omega t) E_{\alpha,2}(-\beta z^\alpha)]. \quad (56)$$

Por conveniência, adota-se $w = 3 \cdot 10^8$ rad/s e, por consequência, $\beta = 1$ rad/m. Fazendo-se $\alpha = 1.9$ e o tempo igual ao período, tem-se o campo elétrico representado pela Figura 2.

Pode-se observar que para α fracionário, no caso $\alpha = 1.9$, mostra-se um decaimento na amplitude, lembrando as perdas de energia em meios com condutividade diferente de zero. Para ressaltar esta observação, foi plotado o gráfico campo elétrico em função da posição (z) com o α variando de 1.7 até 2.0. Nestes gráficos foram fixados os tempos iguais ao período. Assim a equação do campo elétrico se reduz a:

$$E_{(z)} = E_m E_\alpha(-\beta^2 z^\alpha). \quad (57)$$

A Figura 3 mostra o campo elétrico em função da variável z para $\alpha = 1.7, 1.8, 1.9, 2.0$. Por simplicidade, $E_m = 1$ V/m, com os mesmos parâmetros anteriores.

Observa-se claramente que ao variar o parâmetro α resgata-se as soluções do amortecimento das ondas em um meio material. Se α é igual a 2.0, resgata-se a solução da propagação da onda no espaço livre. Esta atenuação será estudada com mais detalhes na próxima seção.

5. Envoltória

Segundo [13], à medida que os campos elétricos e magnéticos se propagam em um meio condutor a sua

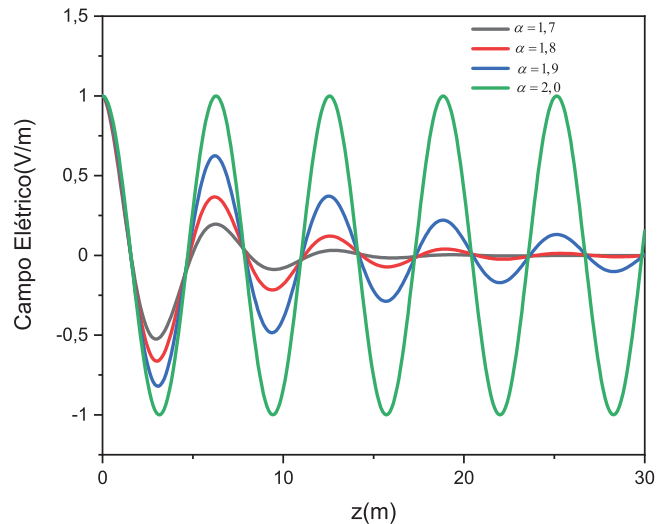


Figura 3: Campo elétrico (V/m) em função de z (m) para $\alpha = 1.7, 1.8, 1.9, 2.0$.

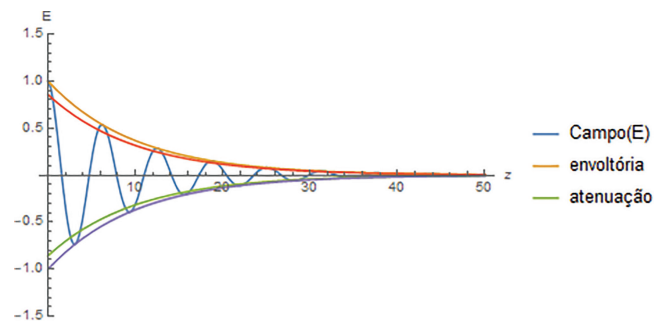


Figura 4: Campo elétrico (V/m) em função de z (m) apresentando sua envoltória e a atenuação.

amplitude é atenuada por um fator $e^{-\psi z}$. Nesta seção, será investigado o formato da envoltória do gráfico campo elétrico x posição (z), para o caso da modelagem fracionária. Segundo [15], “a modulação da amplitude apresentada pela maioria dos livros-texto é, na realidade, a envoltória da curva de oscilação, que no caso limite de amortecimentos muito pequenos tendem aos mesmos valores numéricos”. Aqui neste trabalho será utilizada esta aproximação. A diferença entre estas curvas está apresentada na Figura 4.

Com esta aproximação, foi determinada a equação da envoltória, pegando-se os pontos de máximo do campo e plotando estes em um gráfico. Após uma análise do formato da curva, ficou evidente que em todos os casos analisados a melhor curva a ser ajustada era a função exponencial. Nas Figuras 5, 6, 7 e 8 estão exibidas algumas curvas encontradas. Então, uma regressão exponencial foi efetivada em cada caso estudado, obtendo-se assim todas as funções.

Pode-se observar que todos os coeficientes de determinação das regressões são bem altos, mostrando assim que todas as curvas obtidas pelas regressões são bem

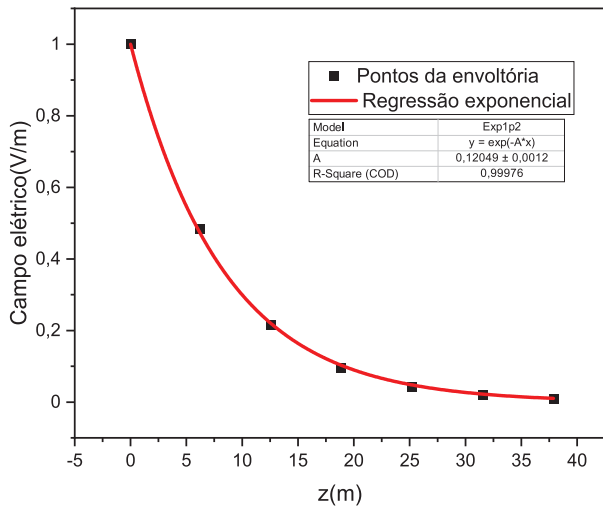


Figura 5: Campo elétrico (V/m) em função de z (m) para o parâmetro fracionário $\alpha = 1.85$

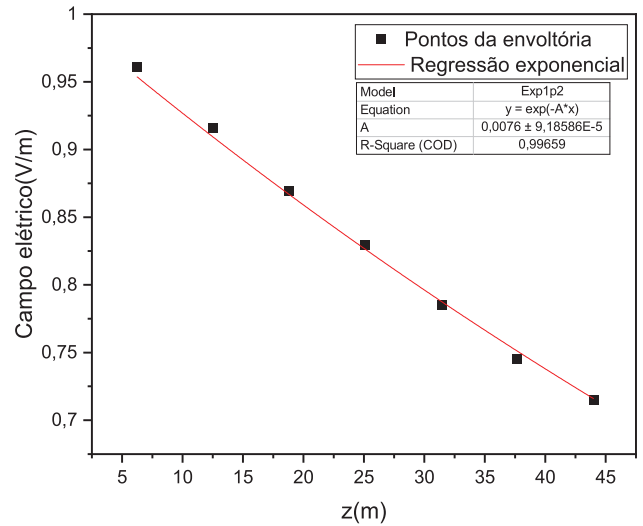


Figura 8: Campo elétrico (V/m) em função de z (m) para o parâmetro fracionário $\alpha = 1.99$.

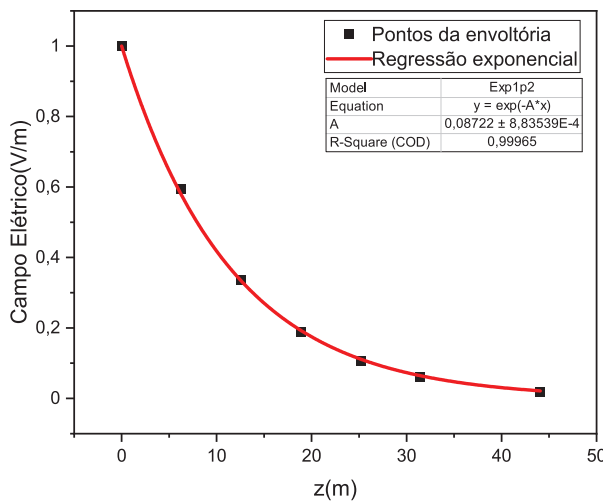


Figura 6: Campo elétrico (V/m) em função de z (m) para o parâmetro fracionário $\alpha = 1.89$.

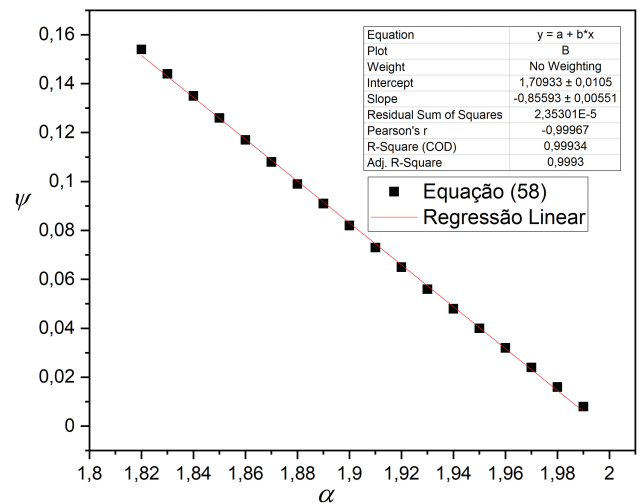


Figura 9: Coeficiente do expoente da exponencial em função do parâmetro fracionário da equação (58).

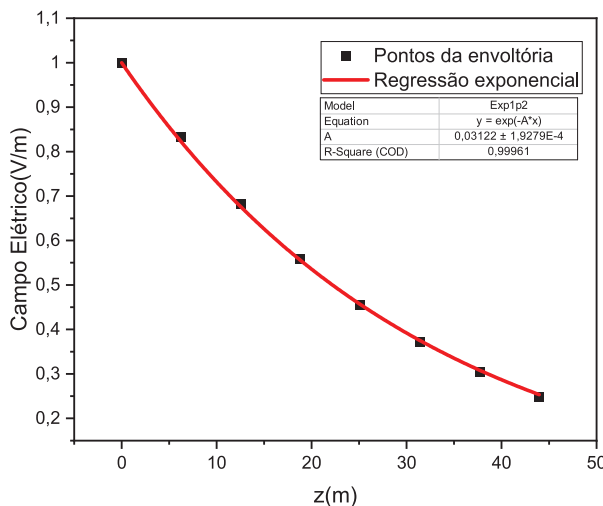


Figura 7: Campo elétrico (V/m) em função de z (m) para o parâmetro fracionário $\alpha = 1.96$.

consistentes. Uma outra observação interessante é que, quando o α se aproxima de 2, a exponencial se aproxima de uma reta. O que era de se esperar, pois quando o α é 2 é retomada a função de onda sem perdas, onde a envoltória deve ser uma reta constante. Estas constatações retomam a ideia anterior em que a envoltória deve mesmo ter o formato de $e^{-\psi z}$. O ψ está evidentemente relacionado com os parâmetros do meio, os quais provocam a atenuação da onda. Uma interessante relação linear entre ψ e α é encontrada plotando-se o gráfico de dispersão entre estas grandezas, possibilitado a regressão linear entre a variável independente α e a dependente ψ . Assim, obtém-se a relação:

$$\Psi = -0,8657\alpha + 1,7282 \quad (58)$$

Observa-se que existe uma relação linear com o coeficiente de determinação de 0,99959. Pode-se também

observar que extrapolando-se a reta para $\psi = 0$, resulta $\alpha = 2$. Este resultado concorda claramente com o que era esperado, pois quando $\alpha = 2$, retoma-se a propagação no espaço livre, sem perdas, logo ψ tem que ser nulo.

6. Conclusões

Observa-se claramente nos resultados que se pode obter uma solução mais geral utilizando-se a modelagem fracionária. Em alguns trabalhos as soluções com a modelagem inteira e a modelagem fracionária já foram confrontadas [16–18]. Neste trabalho, foi utilizada a onda eletromagnética, mas qualquer fenômeno que recaia em uma equação diferencial pode ser modelada desta forma. Uma relação entre os parâmetros do meio com o α da equação diferencial pode ser determinada. Esta relação pode ser utilizada para uma possível análise de composição do meio, trazendo assim uma nova possibilidade para problemas de inversão presentes em todos os ramos da ciência, tais como geofísica, medicina, física, química e engenharias.

Para continuação desta investigação pode-se procurar também uma relação entre o β (número de onda) e o ψ , que representa o expoente da exponencial responsável pelo amortecimento. Desta forma, pode-se então estabelecer uma expressão mais geral para o expoente de amortecimento da onda eletromagnética. Além disto, uma melhoria na modelagem pode ser colocada para trabalhos futuros, pois quando é feita a modelagem fracionária surge um problema de dimensão. Importante dizer que na modelagem fracionária o expoente fracionário foi colocado somente na derivada, como é feito na maioria dos trabalhos da literatura, sendo que isto faz permanecer a relação $\omega = \beta c$, mantendo a possibilidade de todas as sugestões de valores deste trabalho.

Referências

- [1] J.A.T. Machado, V. Kiryakova e F.A. Mainardi, *Fract. Calc. Appl. Anal.* **6**, 73 (2003).
- [2] V.E. Tarasov, *Fract. Calc. Appl. Anal.* **19**, 1200 (2016).
- [3] G. Teodoro, D.S. Oliveira e E. Oliveira, *Rev. Bras. Ens. Fís.* **40**, e2307 (2018).
- [4] R.F. Camargo, *Cálculo fracionário e aplicações*. Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas (2009).
- [5] A. Ebaid, B. Masaedeh e E. El-Zahar, *Chin. Phys. Lett.* **34**, 020201 (2017).
- [6] M. Hussain e M. Khan, *Appl. Math. Sci.* **4**, 1769 (2010).
- [7] R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef e M. Sababheh, *J. Comput. Appl. Matemática* **264**, 65 (2014).
- [8] H.W. Zhou, S. Yang e S.Q. Zhang, *Physica A* **491**, 1001 (2018).
- [9] I. Podlubny, *Fract. Cal. Appl. Anal.* **5**, 367 (2002).
- [10] A.M.F. de Andrade, E.G. de Lima e C.A. Dartora, *Rev. Bras. Ens. Fís.* **40**, e3314 (2018).
- [11] A.G.O. Goulart, M.J. Lazo, J.M.S. Suarez e D.M. Moreira, *Physica A* **477**, 9 (2017).
- [12] J.R. Reitz, F.J. Milford, J. Frederick e R.W. Christy, *Fundamentos da teoria eletromagnética* (Editora Campus, Rio de Janeiro, 1982), 3ª ed.
- [13] M.N.O. Sadiku, *Elementos de eletromagnetismo* (Editora Bookman, Porto Alegre, 2012), 5ª ed.
- [14] G.M. Mittag-Leffler, *C. R. Acad. Sci.* **137**, 554 (1903).
- [15] A.S. de Castro, *Cad. Bras. Ens. Fís.* **8**, 137 (1991).
- [16] D. Moreira, P. Xavier, A. Palmeira e E. Nascimento, *Int. J. Heat Mass Transf.* **144**, 118667 (2019).
- [17] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations* (Academic Press, 1999), v. 198.
- [18] F.G. Rodrigues e E.C. de Oliveira. *Rev. Bras. Ens. Fís.* **37**, 3305-1 (2015).