

Confinamento de uma partícula carregada submetida a um campo magnético oscilante em um plano (xy) e uniforme na direção perpendicular (z)

Confinement of a charged particle subjected to an oscillating magnetic field in a plane (xy) and uniform in the perpendicular direction (z)

Deyvid W. da M. Pastana¹, Manuel E. Rodrigues^{*1,2}

¹Universidade Federal do Pará, Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Abaetetuba, PA, Brasil.

²Universidade Federal do Pará, Faculdade de Física, Programa de Pós-Graduação em Física, Belém, PA, Brasil.

Recebido em 02 de janeiro de 2021. Aceito em 08 de fevereiro de 2021.

Neste artigo utilizou-se um campo magnético da forma $\vec{B} = B_1 [\cos(\omega t)\hat{i} + \sin(\omega t)\hat{j}] + B_0\hat{k}$ como ordem zero de uma expansão, advinda de um campo magnético parabólico, para descrever o movimento confinado de uma partícula eletricamente carregada sujeita a uma força de Lorentz, com uma dinâmica válida para uma região específica do espaço. As equações de movimento obtidas são não-lineares e uma solução particular pode ser extraída, na qual a partícula realiza um movimento periódico. Além disso, através das seções de Poincaré e expoentes de Lyapunov, constatamos que o sistema é caótico, e, portanto, admite diferentes formas de trajetórias quase fechadas obtidas variando-se levemente os parâmetros e condições iniciais, a partir de uma solução numérica. **Palavras chave:** Campos oscilantes, partícula carregada, caos.

In this paper we used a magnetic field of the form $\vec{B} = B_1 [\cos(\omega t)\hat{i} + \sin(\omega t)\hat{j}] + B_0\hat{k}$ as the zero order of an expansion, arising from a parabolic magnetic field, to describe the confined motion of an electrically charged particle subjected to a Lorentz force, with a dynamics valid for a specific region of space. The equations of motion obtained are nonlinear and a particular solution can be extracted, in which the particle performs a periodic motion. Moreover, through Poincaré sections and Lyapunov exponents, we find that the system is chaotic, and therefore admits different forms of quasi closed trajectories obtained by varying slightly the parameters and initial conditions, from a numerical solution.

Keywords: Oscillating fields, charged particle, chaos.

1. Introdução

Na década de 1953, Wolfgang Paul criou um dispositivo, constituído por dois eletrodos hiperbólicos paralelos um ao outro com um anel eletrodo cobrindo o espaço entre os outros dois, capaz de gerar um campo elétrico oscilante associado a um potencial da forma

$$\Phi = \frac{U_0 + V_0 \cos \Omega t}{2d^2} (2z^2 - x^2 - y^2), \quad (1)$$

onde $d = \sqrt{\frac{(x_0^2 + y_0^2)}{2} + z_0^2}$.

A proposta de Paul consistia em que o potencial gerado pelo dispositivo estava associado a um campo elétrico para o qual existia uma determinada amplitude e frequência de oscilação tal que uma partícula carregada submetida a uma certa região estaria sujeita a uma força restauradora nas três dimensões em direção ao centro da armadilha. Dessa forma, a partícula descreveria um movimento confinado.

Frans Machel Penning propôs em 1936 uma armadilha com uma composição de campos elétrico e magnético estáticos, capaz de manter uma partícula carregada em um movimento confinado. Em 1959 George Derhmelt aprisionou um elétron por alguns segundos, utilizando um aparato semelhante à composição de eletrodos de Paul para reproduzir um quadruplo, associado a um potencial responsável pelo confinamento axial do elétron da forma

$$\Phi = \frac{U_0}{2d^2} (2z^2 - x^2 - y^2), \quad (2)$$

onde $d = \sqrt{\frac{(x_0^2 + y_0^2)}{2} + z_0^2}$, e um campo magnético $\vec{B} = B_0\hat{k}$ gerado por um ímã supercondutor.

As armadilhas de Penning possuem a vantagem de fornecer medidas mais precisas da frequência de ciclotron que as armadilhas de Paul. Mais informações sobre o contexto histórico do aprisionamento e sobre as armadilhas de Paul e Penning podem ser encontradas em [1–3].

O movimento de partículas carregadas é um tema presente em várias áreas da física como espectroscopia [4], física do Plasma [5, 6], alguns fenômenos atmosféricos

* Endereço de correspondência: esialg@gmail.com

[7, 8], em aceleradores de partícula tal como Sirius [9], entre outras.

Uma das maiores dificuldades no aprisionamento de partículas com campos magnéticos, principalmente aqueles oscilantes no tempo, está na adição de um campo elétrico em que sejam soluções das equações de Maxwell e que constituam uma força de Lorentz para a qual uma partícula carregada sujeita descreva uma trajetória confinada. Em geral, a dependência espacial do campo magnético tornam as equações de movimento suficientemente complicadas para que não se possa extrair qualquer solução particular para uma análise mais significativa. Em alguns casos, é possível trabalhar com uma dinâmica local em que a dependência espacial é expandida em série de Taylor e considera-se apenas a ordem zero da expansão para o campo magnético. Isso está em conformidade com as equações de Maxwell e é um problema físico válido desde que a aproximação para os campos possa ser reproduzida experimentalmente. Além disso, o tratamento teórico considera um caso ideal, onde o campo magnético é perfeitamente uniforme, o que pode gerar uma complicação experimental, dado que os campos reproduzidos terão uma dependência espacial que, mesmo sendo desprezível em relação aos parâmetros das componentes, pode mudar drasticamente a trajetória se o sistema for caótico. Portanto, investigar a dinâmica local de partículas confinadas, requer uma análise da estabilidade do sistema através da teoria do caos, com a qual podemos determinar a precisão que os aparatos experimentais devem satisfazer ao reproduzir os campos.

Este artigo tem como objetivo analisar o confinamento de partículas carregadas submetidas a campos oscilantes. A abordagem será feita da seguinte forma: na seção 2 apresentamos alguns conceitos e ferramentas matemáticas muito úteis na Eletrodinâmica Clássica, presentes nas bibliografias [10–24]; em 3, utilizamos um campo magnético oscilante no tempo e uniforme no espaço (apresentado inicialmente em [25, 26]), obtemos o campo elétrico associado, construímos as equações de movimento e analisamos as possibilidades de trajetórias em um sistema de coordenadas inercial e em um girante; a seção 4 é feita uma análise da esta estabilidade do sistema; por fim, em 5 comentamos um possível aparato experimental para reprodução dos campos oscilantes.

2. Conceitos Fundamentais da Eletrodinâmica Clássica

2.1. Sistemas girantes

O tratamento clássico da dinâmica de uma partícula carregada sujeita à campos oscilantes por vezes resulta em equações com complicada dependência temporal. Os sistemas girantes são uma poderosa ferramenta uma vez que as equações de movimento podem ser transformadas para um espaço gerado por bases que oscilam de tal forma que a dependência temporal das equações é simplificada.

Seja um vetor $\vec{A} = A_i \hat{e}_i$, no sistema girante. Derivando-o em relação ao tempo, obtemos

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA_i}{dt} \hat{e}_i + A_i \frac{d\hat{e}_i}{dt} \quad (3)$$

Podemos reescrever o ultimo termo da equação (3) na forma interessante

$$A_i \frac{d\hat{e}_i}{dt} (\hat{e}_i \cdot \hat{e}_i) = \vec{A} \cdot \frac{d\hat{e}_i}{dt} \hat{e}_i, \quad (4)$$

onde podemos ver que $\hat{e}_i d\hat{e}_i/dt$ é a velocidade de giro dos eixos descrita pelos próprios eixos e, como consequência, suas componentes são vetores. Espera-se, portanto, que a taxa de variação temporal de um eixo seja nula em relação ao próprio.

Supondo que as componentes da velocidade de giro seja dada na forma

$$\vec{v} = (\vec{v}') \cdot \hat{e}_i = \left(\frac{d\hat{e}_j}{dt} \right) \cdot \hat{e}_i = (a_{ij} \hat{e}_j) \cdot \hat{e}_i, \quad (5)$$

sabendo que $\hat{e}_j \cdot \hat{e}_j = 1$, chegamos a conclusão que $a_{ij} = 0 \forall i = j$. Portanto, de fato, a componente do giro de um eixo descrita nele próprio se anula.

Outrossim, dado que $\hat{e}_j \cdot \hat{e}_i = \delta_{ji}$, então,

$$\frac{d\hat{e}_j}{dt} \cdot \hat{e}_i = -\hat{e}_j \cdot \frac{d\hat{e}_i}{dt}, \quad (6)$$

que é equivalente, pela equação (5), a $a_{ji} = -a_{ij}$.

Portanto, podemos construir a matriz dos coeficientes

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & -a_{31} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Substituindo (7) em (5),

$$\begin{aligned} \vec{v}'_x &= (a_{12} \hat{j} - a_{31} \hat{k}) \\ &= (a_{11} \hat{i} + a_{31} \hat{j} + a_{12} \hat{k}) \times \hat{i} \\ &= \vec{\omega} \times \hat{i}. \end{aligned} \quad (8)$$

Analogamente, as outras componentes de \vec{v}' são obtidas e podem ser compactadas na forma

$$\frac{d\hat{e}_i}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{e}_i \quad (9)$$

Substituindo a equação (9) em (3), temos

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\delta \vec{A}}{\delta t} + \vec{\omega} \times \vec{A}, \quad (10)$$

onde $\delta \vec{A} / \delta t = \hat{e}_i dA_i / dt$.

Portanto, a primeira derivada no sistema girante de coordenadas é formada por uma derivada que só atua nas componentes A_i , o que é equivalente a velocidade de \vec{A} descrita nesse referencial, mais um termo proporcional

a velocidade de oscilação dos eixos dada no próprio referencial. Note que se A_i não depende do tempo, a equação (10) tem a mesma forma que da velocidade de rotação, em um referencial inercial, de um vetor ao redor de um eixo fixo. Nesse caso, dado um vetor de módulo constante em um referencial inercial, em rotação em torno de um eixo fixo, e estático em um referencial não inercial girante, cujos eixos oscilam em torno de um eixo fixo, as equações de movimento são as mesmas.

Derivando a equação (10), obtemos a segunda derivada no sistema girante,

$$\frac{d^2 \vec{A}}{dt^2} = \frac{\delta^2 \vec{A}}{\delta t^2} + 2\vec{\omega} \times \frac{\delta \vec{A}}{\delta t} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{A}) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{A}. \quad (11)$$

2.2. Campos e potenciais eletromagnéticos

Campos elétricos e magnéticos dinâmicos devem satisfazer as equações de Maxwell, as quais, na ausência de fontes e correntes, são

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0 \quad (12)$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0 \quad (13)$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \quad (14)$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{B}} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t}. \quad (15)$$

A equação (13) estabelece que o campo magnético é solenoidal. Isto posto, podemos escrever o campo magnético em termos do rotacional de um campo \vec{A} ,

$$\vec{\mathcal{B}} = \nabla \times \vec{A} \quad (16)$$

Em muitas literaturas no eletromagnetismo, o foco é voltado para a obtenção do campo magnético dado um potencial vetor, como em [10, 13, 14, 16, 17, 24], embora [10, 20] ainda evidenciem uma direção para o leitor do procedimento inverso.

Para obter um potencial vetor a partir de um campo magnético qualquer, é preciso resolver o conjunto de três equações acopladas advindas de (16),

$$\begin{cases} \mathcal{B}_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \mathcal{B}_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \mathcal{B}_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{cases} \quad (17)$$

Fazendo $A_x = 0$, podemos resolver imediatamente o sistema para A_y e A_z ,

$$\begin{aligned} A_z(x, y, z) &= -\int_0^x \mathcal{B}_y(x', y, z) dx' + f_1(y, z) \\ A_y(x, y, z) &= \int_0^x \mathcal{B}_z(x', y, z) dx' + f_2(y, z), \end{aligned}$$

Ao substituindo A_z e A_y na expressão de B_x , temos

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_x(x, y, z) &= -\frac{\partial}{\partial y} \left[\int_0^x \mathcal{B}_y(x', y, z) dx' - f_1(y, z) \right] \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial z} \left[\int_0^x \mathcal{B}_z(x', y, z) dx' + f_2(y, z) \right] \\ &= \int_0^x \frac{\partial \mathcal{B}_x(x', y, z)}{\partial x'} dx' + \frac{\partial f_1(y, z)}{\partial y} - \frac{\partial f_2(y, z)}{\partial z} \end{aligned}$$

Dado que $f_2(y, z)$ é uma constante de integração na coordenada x , podemos definí-la como nula. Logo, $f_1(y, z) = \int_0^x \mathcal{B}_y(0, y', z) dy'$ e o potencial vetor é determinado como

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \left(\int_0^x \mathcal{B}_z(x', y, z) dx' \right) \hat{j} \\ &\quad + \left(\int_0^x \mathcal{B}_y(0, y', z) dy' - \int_0^x \mathcal{B}_y(x', y, z) dx' \right) \hat{k}. \end{aligned} \quad (18)$$

Note que a solução (18) não é única. Outra solução poderia ser obtida anulando A_z ao invés de A_x . Em particular, o potencial vetor possui uma solução para campos uniformes da forma

$$\vec{A}(r) = -\frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{\mathcal{B}}), \quad (19)$$

a qual pode ser facilmente verificada,

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{A} &= -\frac{1}{2} \nabla \times (\vec{r} \times \vec{\mathcal{B}}) \\ &= -\frac{1}{2} [(\vec{\mathcal{B}} \cdot \nabla) \vec{r} - (\vec{r} \cdot \nabla) \vec{\mathcal{B}} + \vec{r}(\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}}) - \vec{\mathcal{B}}(\nabla \cdot \vec{r})] \\ &= \underbrace{-\frac{1}{2} (\vec{\mathcal{B}} \cdot \nabla) \vec{r}}_{-\vec{\mathcal{B}}/2} + \underbrace{\frac{1}{2} \vec{\mathcal{B}}(\nabla \cdot \vec{r})}_{3\vec{\mathcal{B}}/2} = \vec{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

Uma das vantagens de trabalhar com o potencial vetor é a liberdade de adição do gradiente de uma função escalar sem alterar as propriedades do campo magnético, uma vez que o rotacional do gradiente de uma função escalar qualquer é nulo. Esse procedimento recebeu o nome de *liberdade de calibre* e é utilizado para adequar problemas de tal forma que facilite a resolução. Usando o calibre, pode-se fazer um potencial vetor qualquer satisfazer divergência nula. Seja uma função escalar $\Gamma(\vec{r}, t)$, se $\nabla \cdot \vec{A} \neq 0$ e $\nabla^2 \Gamma = -\nabla \cdot \vec{A}$,

$$\nabla \cdot \vec{A}' = \nabla \cdot (\vec{A} + \nabla \Gamma) = 0. \quad (20)$$

A liberdade de calibre é utilizada especialmente na eletrodinâmica para o entendimento dos campos. A níveis mais fundamentais, é necessário a quantização dos campos através de métodos fornecidos pela teoria quântica de campos [27]. Outras aplicações fundamentais dos calibres no eletromagnetismo podem ser encontrado em [28]. Vale ressaltar, também que o potencial vetor não pode ser mensurado e não possui qualquer significado físico,

uma discussão mais detalhada pode ser encontrada em [29].

O potencial vetor carrega consigo toda informação do campo magnético. Portanto, Substituindo a equação (16) em (14), obtemos

$$\begin{aligned}\nabla \times \left(\vec{\mathcal{E}} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) &= 0 \\ \vec{\mathcal{E}} &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \Phi,\end{aligned}\quad (21)$$

onde Φ é o potencial escalar.

O calibre para os potenciais que descrevem o campo elétrico são dados por $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \Gamma$ e $\Phi' = \Phi - \partial \Gamma / \partial t$.

2.3. Lagrangeana para força de Lorentz

Uma partícula de carga Q sobre efeito de campos elétrico e magnético, está sujeita a força de Lorentz,

$$\vec{F} = Q \left(\vec{\mathcal{E}} + \dot{\vec{r}} \times \vec{\mathcal{B}} \right). \quad (22)$$

As equações de movimento para esse sistema podem ser obtidas pelas equações de Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad (23)$$

onde,

$$Q_i = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (24)$$

é a força generalizada do sistema.

A força de Lorentz deve assumir a forma da equação (24) para que a Lagrangeana seja expressa. Substituindo os campos pelos potenciais na (22), temos

$$\vec{F} = Q \left[-\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \dot{\vec{r}} \times (\nabla \times \vec{A}) \right]$$

Sabendo que $\vec{A} = \vec{A}(x, y, z, t)$, então sua derivada temporal é

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{A}}{dt} &= \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \nabla \right) \vec{A} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ &= (\dot{\vec{r}} \cdot \nabla) \vec{A} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\end{aligned}$$

ou,

$$-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = (\dot{\vec{r}} \cdot \nabla) \vec{A} - \frac{d\vec{A}}{dt}.$$

Substituindo a derivada temporal do potencial vetor na força de Lorentz, temos

$$\vec{F} = Q \left[-\nabla \phi + (\dot{\vec{r}} \cdot \nabla) \vec{A} - \frac{d\vec{A}}{dt} + \dot{\vec{r}} \times (\nabla \times \vec{A}) \right].$$

Note que \vec{A} não depende da velocidade, o que permite $\vec{A} \equiv \hat{\nabla}(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A})$, de modo que $\hat{\nabla} = \hat{i} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial \dot{y}} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial \dot{z}}$. Assim, a força assume a forma

$$\vec{F} = Q \left\{ -\nabla \phi + (\dot{\vec{r}} \cdot \nabla) \vec{A} - \frac{d}{dt} [\hat{\nabla}(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A})] + \dot{\vec{r}} \times (\nabla \times \vec{A}) \right\}.$$

A expressão pode ainda ser modificada mediante a propriedade vetorial

$$\begin{aligned}\nabla(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}) &= (\dot{\vec{r}} \cdot \nabla) \vec{A} + \overbrace{(\vec{A} \cdot \nabla) \dot{\vec{r}}}^0 + \dot{\vec{r}} \times \nabla \times \vec{A} + \underbrace{\vec{A} \times \nabla \times \dot{\vec{r}}}_0 \\ &= (\dot{\vec{r}} \cdot \nabla) \vec{A} + \dot{\vec{r}} \times \nabla \times \vec{A}.\end{aligned}$$

Obtemos, portanto, a equação da força na forma

$$\vec{F} = Q \left\{ \nabla(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A} - \phi) - \frac{d}{dt} [\hat{\nabla}(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A})] \right\}.$$

Note que $\hat{\nabla}$ é uma derivada direcional que atua sobre termos que são função da velocidade. Logo, se o potencial escalar $\phi(\vec{r}, t)$ não depende da velocidade, é invariante em relação a área de atuação de $\hat{\nabla}$. Isto posto, pode-se definir $\hat{\nabla}(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A} - \phi) = \hat{\nabla}(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A})$, de forma que a força será dada por:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= Q \left\{ \nabla(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A} - \phi) - \frac{d}{dt} [\hat{\nabla}(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A} - \phi)] \right\} \\ &= \left\{ \nabla(Q\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A} - Q\phi) - \frac{d}{dt} [\hat{\nabla}(Q\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A} - Q\phi)] \right\} \\ &= \left[\nabla U - \frac{d}{dt} (\hat{\nabla} U) \right],\end{aligned}\quad (25)$$

onde $U = Q\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A} - Q\phi$ é a força na forma generalizada (24). Como os campos estão em termos dos potenciais, a expressão (25) também é conhecida como potencial generalizado.

Por fim, somando U a energia cinética T , obtemos a Lagrangeana da Força de Lorentz,

$$\mathcal{L} = T + Q\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A} - Q\phi \quad (26)$$

2.4. Frequência de ciclotron e teorema de Larmor

As frequências de Ciclotron e Teorema de Larmor são ferramentas poderosas para obtenção de soluções que expressem o confinamento. A primeira é relativa a uma partícula cuja trajetória é uma hélice de seção reta, por um círculo de raio r ; A outra, um movimento de processão mediante um campo magnético fraco, expresso num sistema girante de coordenadas.

Considerando um campo magnético uniforme B_0 gerado por uma partícula de massa m e carga q , a qual desloca-se pelo espaço, a força que essa configuração apresenta será

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}, \quad (27)$$

onde a velocidade \vec{v} pode ser decomposta em paralela ao campo magnético ($\vec{v}_{||}$) e perpendicular (\vec{v}_{\perp}). Portanto, a equação (27) tornar-se

$$\vec{F} = q\vec{v}_{\perp} \times \vec{B}, \tag{28}$$

ou

$$F = qv_{\perp}B. \tag{29}$$

Em um movimento circular, a velocidade é devidamente descrita mediante $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$. Para o caso que está sendo tratado, no qual \vec{v} é perpendicular ao campo, constata-se a caracterização da aceleração centrípeta, $\frac{v_{\perp}^2}{r} = r\dot{\theta}^2$. Assim, a equação (29) assume a forma

$$\frac{v_{\perp}^2}{r} = \frac{qv_{\perp}B}{m}, \tag{30}$$

ou

$$\omega_c = \frac{v_{\perp}}{r} = \frac{qB}{m}, \tag{31}$$

onde ω_c é chamado frequência de ciclotron da partícula. Portanto, a partir da equação (31), a frequência de oscilação é determinada em

$$f = \frac{qB}{2\pi m}. \tag{32}$$

Para enunciar o teorema de Larmor, devemos ter em mente o mesmo é válido em um referencial girante. Portanto, igualando a equação (27) a segunda lei de Newton e aplicando as transformações (10) e (11), temos

$$\frac{\delta^2 \vec{r}}{\delta t^2} = \beta \left[\vec{E} + \frac{\delta \vec{r}}{\delta t} \times \left(\vec{B} + \frac{2\vec{\omega}}{\beta} \right) + (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \left(\vec{B} + \frac{\vec{\omega}}{\beta} \right) \right] \tag{33}$$

onde $\beta = q/m$.

O segundo termo do lado direito é denominado Força de Coriolis e o terceiro Força Centrífuga.

Se na equação (33) for definido

$$\vec{\omega} = -\frac{\beta \vec{B}}{2}, \tag{34}$$

a Força de Coriolis não estaria presente nessa configuração, ou seja, a trajetória não sofreria desvio, mas ainda estará presente a Força Centrífuga na expressão, com uma contribuição no sentido radial do movimento circular, como mostra a equação (35).

$$\frac{\delta^2 \vec{r}}{\delta t^2} = \beta \left[\vec{E} + (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{B} + (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \frac{\vec{\omega}}{\beta} \right], \tag{35}$$

ou

$$\frac{\delta^2 \vec{r}}{\delta t^2} = \beta \vec{E} - \frac{\beta^2}{4} (\vec{B} \times \vec{r}) \times \vec{B}. \tag{36}$$

O segundo termo da equação (36) poderia ser colocado na forma

$$\frac{\beta^2}{4} \vec{B} \times (\vec{B} \times \vec{r}) = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \tag{37}$$

Note que o termo expresso na equação (37) é a aceleração centrípeta, a qual contribui no sentido oposto ao radial do movimento circular. Se o campo magnético, portanto, for fraco suficientemente para que se possa desprezar as quantidades proporcionais a B^2 em comparação com os primeiros termos da equação (36), ou uma força externa contrabalaceando essa contribuição, o resultado será que o movimento na presença de um campo magnético em um referencial inercial (fixo), será o mesmo quando analisado na ausência de um campo magnético num referencial não inercial (girante), em torno do centro de forças, equação (38).

$$\frac{\delta^2 \vec{r}}{\delta t^2} = \beta \vec{E}. \tag{38}$$

Note que a frequência de Ciclotron (31) é o dobro da definida na equação (34).

O enunciado formal do teorema de Larmor é apresentado em [18].

3. Confinamento Magnético de um Isótopo Triplamente Ionizado de Urânio

Esta seção terá como objetivo seguir os passos apresentados para obtenção do confinamento de uma partícula carregada em uma trajetória periódica em [25]. Além disso, como uma extensão do periódico [26], faremos uma abordagem mais detalhada do problema com obtenção de novos confinamentos não periódicos e acrescentando uma análise da estabilidade do sistema.

3.1. Campos e equações de movimento

O campo magnético, no sistema do laboratório (chamaremos assim o referencial inercial fixo), usado será uniforme em uma direção que é perpendicular ao plano em que é oscilante,

$$\vec{B} = B_1 [\cos(\omega t)\hat{i} + \sin(\omega t)\hat{j}] + B_0\hat{k} \tag{39}$$

O campo magnético (39) não possui um campo elétrico associado que satisfaça a todas as equações de Maxwell. No entanto, os campos experimentais parabólicos, quando expandidos em ordem zero, recaem em (39), satisfazendo todas as equações de Maxwell, de forma que esse representa um campo físico numa região de 20% do espaço entre as bobinas. Esse questão é abordada com mais detalhes na seção 5.

A transformação do sistema de coordenadas do laboratório para o referencial girante é dada por

$$\begin{pmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{i}' \\ \hat{j}' \\ \hat{k}' \end{pmatrix} \tag{40}$$

A transformação (40) vai de um sistema inercial para um referencial que oscila em torno de um plano, uma

transformação semelhante é dada em [22]. Analogamente, uma transformação que mantém o módulo da velocidade invariante é dada por [11]

$$\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad (41)$$

Como em (40), a (41) executa oscilações no plano xy .

Reescrevendo a velocidade em termo do espaço, obtemos as relações das coordenadas em ambos os referenciais, por meio de uma integração,

$$\begin{aligned} X &= x \cos(\omega t) - y \sin(\omega t) \\ &+ \omega \left[\int_0^t x \sin(\omega t') dt' + \int_0^t y \cos(\omega t') dt' \right] \\ Y &= x \sin(\omega t) - y \cos(\omega t) \\ &+ \omega \left[\int_0^t y \sin(\omega t') dt' - \int_0^t x \cos(\omega t') dt' \right] \\ Z &= z. \end{aligned} \quad (42)$$

Note as constantes de condição inicial se anula porque as posições coincidem em $t = 0$.

Podemos obter o campo elétrico através do potencial vetor, dado pela equação (19),

$$\begin{aligned} \vec{A} &= -\frac{1}{2} [B_0 - ZB_1 \sin(\omega t)] \hat{i} - \frac{1}{2} [ZB_1 \cos(\omega t) - XB_0] \hat{j} \\ &- \frac{1}{2} [XB_1 \sin(\omega t) - YB_1 \cos(\omega t)] \hat{k}. \end{aligned}$$

Fazendo o potencial escalar nulo, temos

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{Z\omega B_1}{2} [\cos(\omega t)\hat{i} + \sin(\omega t)\hat{j}] \\ &+ \frac{\omega B_1}{2} [X \cos(\omega t) + Y \sin(\omega t)] \hat{k}. \end{aligned} \quad (43)$$

Utilizando a segunda lei de Newton, determinamos as equações de movimento no referencial do Laboratório,

$$\ddot{X} = \gamma \left[-\frac{1}{2} Z\omega B_1 \cos(\omega t) + \dot{Y} B_0 - \dot{Z} B_1 \sin(\omega t) \right] \quad (44a)$$

$$\ddot{Y} = \gamma \left[-\frac{1}{2} Z\omega B_1 \sin(\omega t) - \dot{X} B_0 + \dot{Z} B_1 \cos(\omega t) \right] \quad (44b)$$

$$\begin{aligned} \ddot{Z} &= \gamma \left[\frac{1}{2} \omega B_1 (X \cos(\omega t) + Y \sin(\omega t)) + \dot{X} B_1 \sin(\omega t) \right. \\ &\left. - \dot{Y} B_1 \cos(\omega t) \right]. \end{aligned} \quad (44c)$$

O sistema (44) possui uma dependência temporal que torna suficientemente complicado extrair uma solução particular exata. No entanto, explicitamos, trabalhando como um sistema dinâmico, a solução em série de Dyson em termo da matriz $\mathcal{U}(t)$ na seção terciária 3.2.1.

A lagrangeana do movimento é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} m (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) \\ &+ \frac{Q}{2} \dot{X} [ZB_1 \sin(\omega t) - YB_0] \\ &+ \frac{Q}{2} \dot{Y} [XB_0 - ZB_1 \cos(\omega t)] \\ &+ \frac{Q}{2} \dot{Z} B_1 [Y \cos(\omega t) - X \sin(\omega t)], \end{aligned}$$

Aplicando as relações de transformações do sistema de coordenadas do laboratório para o girante

$$\begin{aligned} Z &= z \\ X \cos(\omega t) + Y \sin(\omega t) &= x \\ Y \cos(\omega t) - X \sin(\omega t) &= y \\ \dot{X} \sin(\omega t) - \dot{Y} \cos(\omega t) &= -(\dot{y} + \omega x) \\ X\dot{Y} - Y\dot{X} &= xy - y\dot{x} + \omega(x^2 + y^2) \\ \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \omega^2(x^2 + y^2) + 2\omega(xy - y\dot{x}), \end{aligned}$$

a lagrangeana será dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ef} &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \\ &- \frac{Q\dot{x}y}{2} \left(B_0 + \frac{2\omega}{\beta} \right) + \frac{QB_1 y \dot{z}}{2} \\ &+ \frac{Q\dot{y}x}{2} \left[x \left(B_0 + \frac{2\omega}{\beta} \right) - zB_1 \right] \\ &+ \frac{Q\omega}{2} \left(B_0 + \frac{\omega}{\beta} \right) (x^2 + y^2) - \frac{Q\omega B_1 xz}{2}. \end{aligned} \quad (45)$$

A terminologia \mathcal{L}_{ef} é designada à *lagrangeana efetiva*, aquela cuja forma (26) mantém-se invariante por transformação. Portanto, identificamos *potencial escalar efetivo*, imediatamente, como

$$\Phi_{ef}(\vec{r}) = -\frac{\omega}{2} \left(B_0 + \frac{\omega}{\beta} \right) (x^2 + y^2) + \frac{\omega B_1 xz}{2}. \quad (46)$$

Note que o potencial (46) possui uma certa semelhança com o potencial usado na armadilha de Penning (2).

Através de Euler-Lagrange, o sistema de equações que descrevem o movimento no sistema girante é dado por

$$\ddot{x} = \gamma \left[\dot{y} \left(B_0 + \frac{2\omega}{\gamma} \right) + x\omega \left(B_0 + \frac{2\omega}{\gamma} \right) - \frac{z\omega B_1}{2} \right] \quad (47a)$$

$$\ddot{y} = \gamma \left[\dot{z} B_1 - \dot{x} \left(B_0 + \frac{2\omega}{\gamma} \right) + y\omega \left(B_0 + \frac{2\omega}{\gamma} \right) \right] \quad (47b)$$

$$\ddot{z} = -\gamma \left(\dot{y} B_1 + \frac{x\omega B_1}{2} \right). \quad (47c)$$

Algumas bibliografias como [19], coloca a extensão de validade das equações de Euler-Lagrange sobre referenciais inerciais. Mesmo o sistema e coordenadas girantes sendo não inercial, as equações de Euler-Lagrange são

válidas para lagrangeana efetiva, onde os termos de Coriolis e Centrífuga são acrescentados a mão. No entanto, esses termos surgem naturalmente se aplicarmos as transformações (10) e (11) na força de Lorentz e a (40) nos campos (39) e (43), resultando em

$$\frac{\delta^2 \vec{r}}{\delta t^2} = \gamma \left[\vec{E}' + \frac{\delta \vec{r}}{\delta t} \times \left(\vec{B}' + \frac{2\vec{\omega}}{\gamma} \right) + (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \left(\vec{B}' + \frac{\vec{\omega}}{\gamma} \right) \right] \quad (48)$$

onde, $\vec{\omega}$ é constantes e os campos \vec{E}' e \vec{B}' são os campos no sistema girante

$$\vec{E}' = \frac{1}{2} \left(-z\omega B_1 \hat{i}' + x\omega B_1 \hat{k}' \right) \quad (49)$$

$$\vec{B}' = B_1 \hat{i}' + B_0 \hat{k}'. \quad (50)$$

É fácil ver que de (48) resultam as equações (47a), (47b) e (47c). A frequência de Ciclotron e Larmor para esse sistema são, respectivamente,

$$\omega_c = -\gamma B_0 \quad (51)$$

$$\omega = \frac{\gamma B_0}{2} \quad (52)$$

3.2. Solução das equações de movimento

Nesta subseção, iremos encontrar uma solução em termos da série de Dyson para o referencial inercial e uma solução particular, onde consideramos a ressonância $\omega = \omega_c$, para o referencial girante.

3.2.1. A solução em termos da serie de Dyson para o referencial inercial

O sistema de equação diferenciais parciais acopladas no referencial inercial, claramente não possui uma solução geral analítica. Na forma em que se encontra, podemos apenas analisar dados de uma solução numérica.

$$\mathcal{U}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\varrho \cos(\omega t) & 0 & \gamma B_0 & -\gamma B_1 \sin(\omega t) \\ 0 & 0 & -\varrho \sin(\omega t) & -\gamma B_0 & 0 & \gamma B_1 \cos(\omega t) \\ \varrho \cos(\omega t) & \varrho \sin(\omega t) & 0 & \gamma B_1 \sin(\omega t) & -\gamma B_1 \cos(\omega t) & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\mathcal{M}(t) = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \\ V_x(t) \\ V_y(t) \\ V_z(t) \end{pmatrix}$$

sendo $\varrho = \gamma\omega B_1/2$.

No entanto, alguns sistemas similares tem uma solução particular analítica advinda da convergência da série de Dyson [12]. O sistema tratado está ilustrado em (53),

$$\ddot{X} = \gamma \left[-\frac{1}{2} Z\omega B_1 \cos(\omega t) + \dot{Y} B_0 - \dot{Z} B_1 \sin(\omega t) \right] \quad (53a)$$

$$\ddot{Y} = \gamma \left[-\frac{1}{2} Z\omega B_1 \sin(\omega t) - \dot{X} B_0 + \dot{Z} B_1 \cos(\omega t) \right] \quad (53b)$$

$$\ddot{Z} = \gamma \left[\frac{1}{2} \omega B_1 (X \cos(\omega t) + Y \sin(\omega t)) + \dot{X} B_1 \sin(\omega t) - \dot{Y} B_1 \cos(\omega t) \right]. \quad (53c)$$

Podemos reescrever o sistema (53) em função das velocidades, como um sistema dinâmico,

$$\dot{V}_x = \gamma \left[-\frac{1}{2} Z\omega B_1 \cos(\omega t) + V_y B_0 - V_z B_1 \sin(\omega t) \right] \quad (54a)$$

$$\dot{V}_y = \gamma \left[-\frac{1}{2} Z\omega B_1 \sin(\omega t) - V_x B_0 + V_z B_1 \cos(\omega t) \right] \quad (54b)$$

$$\dot{V}_z = \gamma \left[\frac{1}{2} \omega B_1 (X \cos(\omega t) + Y \sin(\omega t)) + V_x B_1 \sin(\omega t) - V_y B_1 \cos(\omega t) \right]. \quad (54c)$$

Utilizando a notação matricial para o sistema de equações diferenciais acima, obtemos a equação

$$\dot{\mathcal{M}} = \mathcal{U} \times \mathcal{M} \quad (55)$$

onde

O sistema (55) possui seis variáveis nessa forma. Note que poderíamos fazer uma sétima variável $\phi(t) = \omega t$, isso já evidencia a não linearidade da dependência temporal nas equações e impossibilita a obtenção da matriz $\mathcal{U}(t)$.

A solução única de $\mathcal{M}(t)$ é dada em termos de sucessivas integrais em produto com respectivos intervalos de tempo da matriz $\mathcal{U}(t)$. Esse resultado é denominada série de Dyson, a qual é muito eficiente no tratamento de teoria de perturbações [30]. Temos $D(t, s)$ e $D(t)$

duas representações da série de Dyson, mostradas nas respectivas equações,

$$D(t, s) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_s^1 \cdots \int_s^{t_{n-1}} \int_s^{t_n} \mathcal{U}(t_1) \cdots \mathcal{U}(t_{n-1}) \times \mathcal{U}(t_n) dt_n dt_{n-1} \cdots dt_1 \tag{56}$$

$$D(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \cdots \int_0^{t_{n-1}} \int_0^{t_n} \mathcal{U}(t_1) \cdots \mathcal{U}(t_{n-1}) \times \mathcal{U}(t_n) dt_n dt_{n-1} \cdots dt_1 \tag{57}$$

Uma característica importante da série de Dyson, é absolutamente convergente. Portanto, é muito útil para soluções numéricas de problemas muito complexos.

A solução única do sistema (55) é dado na forma,

$$\mathcal{M}(t) = D(t)\mathcal{M}_0 + \int_0^t D(s, t)\mathcal{F}(s)ds \tag{58}$$

A solução (58) é para casos gerais onde o sistema de equações é $\dot{\mathcal{M}} = \mathcal{U}\mathcal{M} + \mathcal{F}(t)$, onde \mathcal{M}_0 é a matriz que expressa a condição inicial do problema. Em nosso caso, $\mathcal{F}(t) = 0$ e a solução fica $\mathcal{M}(t) = D(t)\mathcal{M}_0$, ou seja,

$$\mathcal{M}(t) = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \cdots \int_0^{t_{n-1}} \int_0^{t_n} \mathcal{U}(t_1) \cdots \mathcal{U}(t_{n-1}) \times \mathcal{U}(t_n) dt_n dt_{n-1} \cdots dt_1 \right) \mathcal{M}_0 \tag{59}$$

Para casos nos quais um sistema de equações acopladas possui uma solução particular única, a série de Dyson converge para funções, as quais são representadas pelas variáveis da matriz $\mathcal{M}(t)$. No entanto, constatamos que a $\mathcal{U}(t)$ tem dependência temporal, tal que $\dot{\mathcal{M}}(t)$ é não linear, está em termos de funções que impossibilitam a convergência.

3.2.2. Uma solução particular para o referencial girantes

Para resolver o sistema (47), utilizaremos a notação matricial

$$\ddot{\mathbf{X}} = \tilde{\mathbf{D}}\dot{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{W}}\mathbf{X} \tag{60}$$

onde as matrizes $\tilde{\mathbf{D}}$, $\tilde{\mathbf{W}}$ e $\tilde{\mathbf{X}}$, com $\omega_1 = \gamma B_1$, são definidas como:

$$\tilde{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} 0 & (2\omega - \omega_c) & 0 \\ -(2\omega - \omega_c) & 0 & \omega_1 \\ 0 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{61}$$

$$\tilde{\mathbf{W}} = \begin{pmatrix} \omega(\omega - \omega_c) & 0 & -\omega\omega_1/2 \\ 0 & \omega(\omega - \omega_c) & 0 \\ -\omega\omega_1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{62}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{63}$$

A equação (60) é a mesma de osciladores harmônicos acoplados com amortecimento anisotrópico. Nesse tipo de oscilação, é comum que algumas grandezas tenham uma dependência com a direção das oscilação. O trabalho [31] trata oscilações harmônicas anisotrópicas em campos e faz uma abordagem a um campo magnético idêntico ao (50). A solução da equação (60) é uma matriz de termos constante múltipla da função exponencial,

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 e^{\lambda t}, \tag{64}$$

onde \mathbf{X}_0 é a matriz com as condições iniciais.

Derivando (64) e substituindo em (60), resulta que $\lambda^2 \tilde{\mathbf{I}} - \lambda \tilde{\mathbf{D}} - \tilde{\mathbf{W}} = 0$. Para obter λ da solução, devemos ter

$$\text{Det} |\lambda^2 \tilde{\mathbf{I}} - \lambda \tilde{\mathbf{D}} - \tilde{\mathbf{W}}| = 0, \tag{65}$$

ou

$$\lambda^6 + a\lambda^4 + b\lambda^2 + c = 0, \tag{66}$$

onde

$$a = \omega^2 + \omega_1^2 + (\omega - \omega_c)^2$$

$$b = \omega^2 \left[(\omega - \omega_c)^2 + \frac{3\omega_1^2}{4} \right]$$

$$c = \frac{1}{4} \omega_1^2 \omega^3 (\omega - \omega_c).$$

Se a frequência de ciclotron da partícula estiver em ressonância com a oscilação do referencial, ou, ainda, com a oscilação dos campo,

$$a_0 = \omega_c^2 + \omega_1^2$$

$$b_0 = \frac{3\omega_1^2 \omega_c^2}{4}$$

$$c_0 = 0.$$

determinando as raízes da equação (66), temos

$$\lambda_{\{1,2\}} = \pm 0$$

$$\lambda_{\{3,4,5,6\}} = \pm \sqrt{\frac{-a_0 \pm \sqrt{a_0^2 - 4b_0}}{2}},$$

ou

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

$$\lambda_3 = -\lambda_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{k(\omega_1, \omega_c) - (\omega_1^2 + \omega_c^2)}$$

$$\lambda_5 = -\lambda_6 = \frac{i}{\sqrt{2}} \sqrt{k(\omega_1, \omega_c) + (\omega_1^2 + \omega_c^2)},$$

onde $k(\omega_1, \omega_1) = \sqrt{\omega_1^4 + \omega_c^4 - \omega_1^2 \omega_c^2}$.

Portanto, a solução geral da equação (60) é uma combinação linear das soluções dadas para cada raiz,

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{n=1}^6 A_n \mathbf{X}_0^{\{n\}} e^{\lambda_{\{n\}} t}, \tag{67}$$

e sua derivada é

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \sum_{n=1}^6 \lambda_{\{n\}} A_n \mathbf{X}_0^{\{n\}} e^{\lambda_{\{n\}} t} \tag{68}$$

O termo $\mathbf{X}_0^{\{n\}}$ é um auto vetor e a equação (66) representa o polinômio característico e suas raízes são os auto valores.

Abrindo as equação (67) e (68), temos

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) = & (A_1 + A_2 t) \mathbf{X}_0^{\{1,2\}} e^{\lambda_{\{1,2\}} t} \\ & + A_3 \mathbf{X}_0^{\{3\}} e^{\lambda_{\{3\}} t} + A_4 \mathbf{X}_0^{\{4\}} e^{\lambda_{\{4\}} t} \\ & + A_5 \mathbf{X}_0^{\{5\}} e^{\lambda_{\{5\}} t} + A_6 \mathbf{X}_0^{\{6\}} e^{\lambda_{\{6\}} t} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}(t) = & [A_2 + \lambda_{\{1,2\}} (A_1 + A_2 t)] \mathbf{X}_0^{\{1,2\}} e^{\lambda_{\{1,2\}} t} \\ & + \lambda_{\{3\}} A_3 \mathbf{X}_0^{\{3\}} e^{\lambda_{\{3\}} t} + \lambda_{\{4\}} A_4 \mathbf{X}_0^{\{4\}} e^{\lambda_{\{4\}} t} \\ & + \lambda_{\{5\}} A_5 \mathbf{X}_0^{\{5\}} e^{\lambda_{\{5\}} t} + \lambda_{\{6\}} A_6 \mathbf{X}_0^{\{6\}} e^{\lambda_{\{6\}} t} \end{aligned}$$

Utilizando a aproximação, que é comumente feita em RMN [32], $\omega_c \gg \omega_1$, temos que

$$k(\omega_1, \omega_c) \approx \omega_c^2 - \omega_1^2/2, \tag{69}$$

e os autovalores são simplificados para

$$\lambda_3 = -\lambda_4 = \frac{i\sqrt{3}}{2} \omega_1, \tag{70}$$

$$\lambda_5 = -\lambda_6 = i\omega_c \tag{71}$$

Aplicando a condição de ressonância, $\omega = \omega_c$, na equação $(\lambda^2 \mathbf{I} - \lambda \mathbf{D} - \mathbf{W}) \mathbf{X}_0 = 0$, encontra-se uma relação para os termos do auto vetor,

$$\left[\frac{\omega_c}{\omega_1} \lambda^2 + \frac{\omega_c \omega_1}{2} \right] x_0 + \left[\frac{\lambda^2}{\omega_1} + \omega_1 \right] \lambda y_0 = 0 \tag{72}$$

ou

$$x_0 = - \frac{\left[\frac{\lambda^2}{\omega_1} + \omega_1 \right] \lambda}{\left[\frac{\lambda^2}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{2} \right] \omega_c} y_0. \tag{73}$$

E, por analogia, o termo z_0 é determinado em

$$z_0 = \frac{2\lambda}{\omega_1} \left\{ 1 + \frac{\left[\frac{\lambda^2}{\omega_1} + \omega_1 \right] \lambda^2}{\left[\frac{\lambda^2}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{2} \right] \omega_c^2} \right\} y_0. \tag{74}$$

Especificando $y_0 = 1$, a matriz auto vetor terá a forma evidenciada na equação (75).

$$\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} - \frac{\left[\frac{\lambda^2}{\omega_1} + \omega_1 \right] \lambda}{\left[\frac{\lambda^2}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{2} \right] \omega_c} \\ 1 \\ \frac{2\lambda}{\omega_1} \left\{ 1 + \frac{\left[\frac{\lambda^2}{\omega_1} + \omega_1 \right] \lambda^2}{\left[\frac{\lambda^2}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{2} \right] \omega_c^2} \right\} \end{pmatrix} \tag{75}$$

Substituindo os auto valores na equação (75), os auto vetores são determinados em

$$\mathbf{X}_0^{\{1,2\}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{X}_0^{\{3\}} = \begin{pmatrix} \frac{i\sqrt{3}\omega_1}{2\omega_c} \\ 1 \\ i\sqrt{3} \left(1 + \frac{3\omega_1^2}{4\omega_c^2} \right) \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{X}_0^{\{4\}} = \begin{pmatrix} -\frac{i\sqrt{3}\omega_1}{2\omega_c} \\ 1 \\ -i\sqrt{3} \left(1 + \frac{3\omega_1^2}{4\omega_c^2} \right) \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{X}_0^{\{5\}} = \begin{pmatrix} -2i \left(\frac{\omega_c^2 - \omega_1^2}{2\omega_c^2 - \omega_1^2} \right) \\ 1 \\ \frac{2i\omega_c}{\omega_1} \left[1 - 2 \left(\frac{\omega_c^2 - \omega_1^2}{2\omega_c^2 - \omega_1^2} \right) \right] \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{X}_0^{\{6\}} = \begin{pmatrix} 2i \left(\frac{\omega_c^2 - \omega_1^2}{2\omega_c^2 - \omega_1^2} \right) \\ 1 \\ -\frac{2i\omega_c}{\omega_1} \left[1 - 2 \left(\frac{\omega_c^2 - \omega_1^2}{2\omega_c^2 - \omega_1^2} \right) \right] \end{pmatrix}.$$

Definindo as condições iniciais $x(0) = 0, y(0) = 0, z(0) = 0, \dot{x}(0) = 0, \dot{y}(0) = 0$ e $\dot{z}(0) = v_0$; substituindo os auto valores nas equações (67) e (68), encontra-se o sistema

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = & A_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + A_3 \begin{pmatrix} \frac{i\sqrt{3}\omega_1}{2\omega_c} \\ 1 \\ i\sqrt{3} \left(1 + \frac{3\omega_1^2}{4\omega_c^2} \right) \end{pmatrix} \\ & + A_4 \begin{pmatrix} -\frac{i\sqrt{3}\omega_1}{2\omega_c} \\ 1 \\ -i\sqrt{3} \left(1 + \frac{3\omega_1^2}{4\omega_c^2} \right) \end{pmatrix} \\ & + A_5 \begin{pmatrix} -2i \left(\frac{\omega_c^2 - \omega_1^2}{2\omega_c^2 - \omega_1^2} \right) \\ 1 \\ \frac{2i\omega_c}{\omega_1} \left[1 - 2 \left(\frac{\omega_c^2 - \omega_1^2}{2\omega_c^2 - \omega_1^2} \right) \right] \end{pmatrix} \\ & + A_6 \begin{pmatrix} 2i \left(\frac{\omega_c^2 - \omega_1^2}{2\omega_c^2 - \omega_1^2} \right) \\ 1 \\ -\frac{2i\omega_c}{\omega_1} \left[1 - 2 \left(\frac{\omega_c^2 - \omega_1^2}{2\omega_c^2 - \omega_1^2} \right) \right] \end{pmatrix}, \\ & - 3\omega_1 \left(1 + \frac{3\omega_1^2}{4\omega_c^2} \right) A_3 \\ & - \frac{4\omega_c^2}{\omega_1} \left[1 - 2 \left(\frac{\omega_c^2 - \omega_1^2}{2\omega_c^2 - \omega_1^2} \right) \right] A_5 = v_0. \end{aligned}$$

onde A_5 é determinado imediatamente em

$$A_5 = - \frac{v_0}{\left[6\omega_1 \left(\frac{\omega_c^2 - \omega_1^2}{2\omega_c^2 - \omega_1^2} \right) + \frac{4\omega_c^2}{\omega_1} \right]}.$$

Como o sistema está sobre a condição $\omega_c \gg \omega_1$, expandindo A_5 em ω_1 e desprezando termos de ordem

mais altas, os coeficientes são determinados em

$$A_1 \approx \frac{2v_0}{3\omega_1} + \frac{\omega_1 v_0}{2\omega_c^2}; A_2 = 0;$$

$$A_3 = A_4 \approx -\frac{v_0}{3\omega_1}; A_5 = A_6 \approx -\frac{\omega_1 v_0}{4\omega_c^2}.$$

Substituindo os autovetores, autovalores e os coeficientes encontrados na equação (67), estabelecemos as soluções das equações acopladas,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2v_0 \\ 3\omega_1 \\ \frac{\omega_1 v_0}{2\omega_c^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{v_0}{3\omega_1} \left\{ \begin{pmatrix} i\sqrt{3}\omega_1 \\ 2\omega_c \\ 1 \\ i\sqrt{3} \end{pmatrix} e^{i\sqrt{3}\omega_1 t/2} + \begin{pmatrix} -i\sqrt{3}\omega_1 \\ 2\omega_c \\ 1 \\ -i\sqrt{3} \end{pmatrix} e^{-i\sqrt{3}\omega_1 t/2} \right\} - \frac{\omega_1 v_0}{4\omega_c} \left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\omega_c t} + \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\omega_c t} \right\},$$

onde, fazendo uso das identidades $2 \cos \theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$ e $2i \sin \theta = e^{i\theta} - e^{-i\theta}$, obtém-se

$$x(t) \approx \frac{\sqrt{3}v_0}{3\omega_c} \sin\left(\frac{\sqrt{3}\omega_1 t}{2}\right) - \frac{\omega_1 v_0}{2\omega_c^2} \sin(\omega_c t) \tag{76}$$

$$y(t) \approx -\frac{2v_0}{3\omega_1} \left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}\omega_1 t}{2}\right) - 1 \right] - \frac{\omega_1 v_0}{2\omega_c^2} [\cos(\omega_c t) - 1] \tag{77}$$

$$z(t) \approx \frac{2\sqrt{3}v_0}{3\omega_1} \sin\left(\frac{\sqrt{3}\omega_1 t}{2}\right) \tag{78}$$

Lembrando que as soluções particulares são validas se satisfizerem duas condições: $\omega_c \gg \omega_1$, o que implica $B_0 \gg B_1$, e a ressonância $\omega = \omega_c$.

3.3. Análise da solução

Uma vez que a solução é obtida, podemos afazer simulações computacionais do trajeto que é descrito por uma partícula carregada submetida a esses campos. Para simular o isótopo de urânio $^{235}\text{U}^{3+}$, substituiremos a razão carga-massa $\gamma = 1,231 \text{ MHz}/T$, sobre a ação dos campos uniformes com $B_0 = 1 \text{ T}$ e $B_1 = 0,01 \text{ T}$, os quais resultam na frequência de oscilação $\omega_c = -1,231 \text{ MHz}/T$, e velocidade $v_0 = 10^4 \text{ m/s}$. A trajetória que a solução (76), (77) e (78) descreve é periódica, como mostra a Figura 1.

A partir da Figura 1, é possível prever que no sistema do Laboratório o movimento é senoidal em $Z(t)$ e circular no plano XY , curvas acentuadas no referencial girante são, também, são acentuadas nas correspondentes do referencial do Laboratório. Utilizando a solução numérica do sistema (44), a trajetória correspondente no referencial do Laboratório é mostrada na Figura 2.

Fizemos uma animação do isótopo $^{235}\text{U}^{3+}$ descrevendo a trajetória ilustrada na Figura 2, disponível

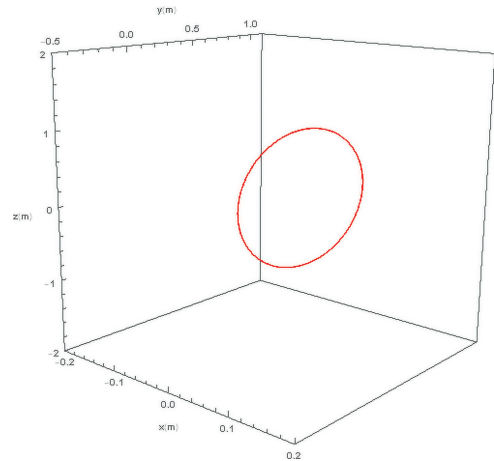


Figura 1: Trajetória periódica circular do urânio $^{235}\text{U}^{3+}$ no sistema girante em, um intervalo de tempo $t_{inicial} = 0$ e $t_{final} = 590 \mu\text{s}$.

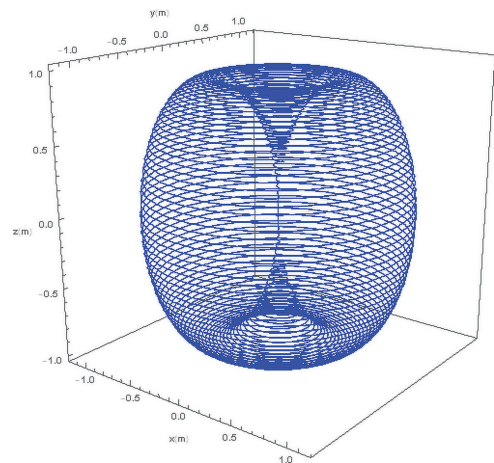


Figura 2: Trajetória periódica ressonante do urânio $^{235}\text{U}^{3+}$ no sistema do laboratório, em um intervalo de tempo $t_{inicial} = 0$ e $t_{final} = 590 \mu\text{s}$, com os parâmetros e condições iniciais $B_0 = 1T$, $B_1 = 0,01T$, $\omega = -1,231 \text{ MHz}/T$, $X(0) = Y(0) = Z(0) = \dot{X}(0) = \dot{Y}(0) = 0$ e $\dot{Z}(0) = 10^4 \text{ m/s}$.

no YouTube, com o nome Simulação do confinamento de partícula carregada sujeita a um campo magnético oscilante Mathematica, ou, também, Simulação confinamento de partícula carregada sujeita a um campo magnético oscilante Mathematica 2.

O movimento da trajetória periódicas em frequência ressonante, Figura 2, apresenta o fenômeno batimento, como mostra a Figura 3.

Tanto a velocidade quanto a aceleração estão oscilando em torno de um intervalo que varia periodicamente com o tempo, no plano XY , isto é, as componentes $\dot{X}(t)$ e $\dot{Y}(t)$ atingem picos diferentes, de uma oscilação para outra, ao longo de uma repetição do movimento. Ambas as componentes da velocidade são positivas no início do movimento e com aceleração crescente. Por volta da metade do eixo X , no primeiro quadrante, $\dot{Y}(t)$ começa a decrescer e atinge seu mínimo, onde é nula,

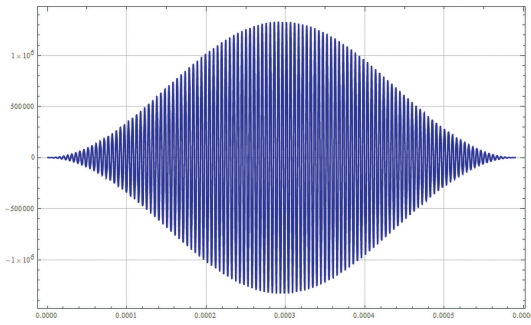


Figura 3: Componente $\dot{X}(t)$ da velocidade, aprisionamento ressonante do urânio $^{235}\text{U}^{3+}$.

enquanto que $\dot{X}(t)$ atinge seu primeiro pico de oscilação. No segundo quadrante, $\dot{Y}(t)$ e $\dot{Z}(t)$ são negativos ao passo em que $\dot{X}(t)$ é crescente até o início da oscilação em direção ao pico negativo de $\dot{X}(t)$, a qual ocorre por volta da metade do eixo Y e atinge o mínimo quando a componente $\dot{Y}(t)$ atinge o máximo. A cada quadrante, os picos de velocidade aumentam até atingirem os pontos máximos, os quais correspondem aos trajetos mais externos de 2, e, posteriormente, retornam aos picos mínimos os quais velam a partícula ao ponto do qual partiu no início do movimento.

A Figura 2 mostra que o isótopo descreve uma trajetória periódica quando está na frequência ressonante de oscilação. Outros confinamentos de movimentos aleatórios, realizados sobre uma superfície semelhante a forma da trajetória da expressa na Figura 2, podem ser obtidas com frequências não ressonantes, como mostrado nas Figuras 4 e 5.

Pode-se perceber a partir das Figuras 4 e 5 que o confinamento mantém a forma da trajetória ressonante,

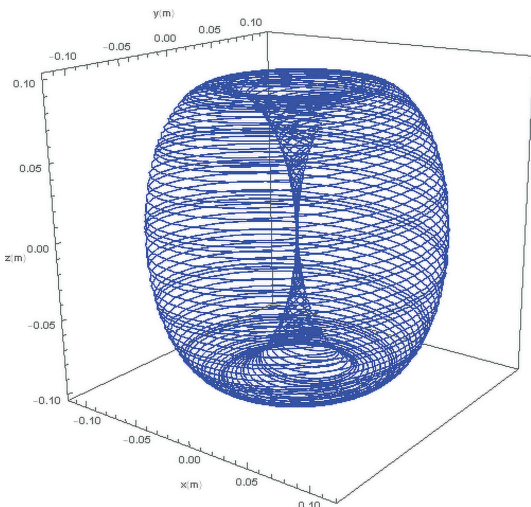


Figura 4: Trajetória não ressonante do urânio $^{235}\text{U}^{3+}$ no sistema do laboratório, em um intervalo de tempo $t_{inicial} = 0$ e $t_{final} = 590\mu\text{s}$, parâmetros $B_0 = 1T$, $B_1 = 0.1T$, $\omega = -1,231\text{MHz}/T$ e condições iniciais $X(0) = Y(0) = Z(0) = \dot{X}(0) = \dot{Y}(0) = 0$ e $\dot{Z}(0) = 10^4\text{m}/\text{s}$.

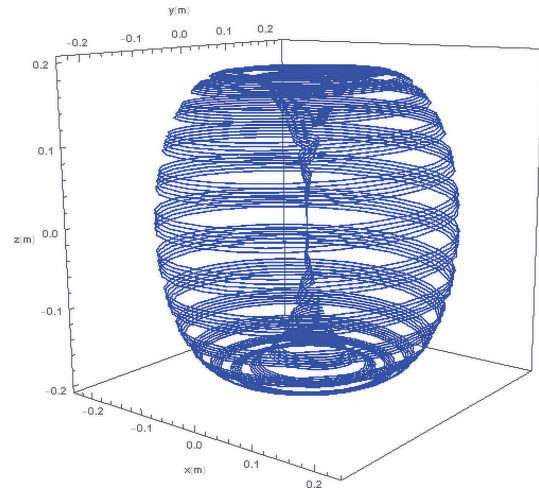


Figura 5: Trajetória não ressonante do urânio $^{235}\text{U}^{3+}$ no sistema do laboratório, em um intervalo de tempo $t_{inicial} = 0$ e $t_{final} = 700\mu\text{s}$, parâmetros $B_0 = 1T$, $B_1 = 0.05T$, $\omega = -1,231\text{MHz}/T$ e condições iniciais $X(0) = Y(0) = Z(0) = \dot{X}(0) = \dot{Y}(0) = 0$ e $\dot{Z}(0) = 10^4\text{m}/\text{s}$.

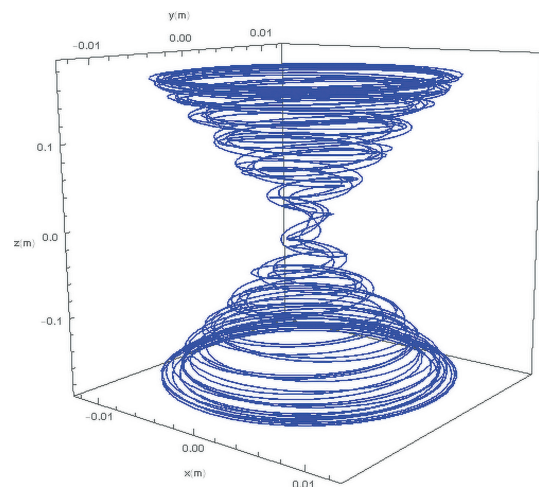


Figura 6: Trajetória não ressonante do urânio $^{235}\text{U}^{3+}$ no sistema do laboratório, em um intervalo de tempo $t_{inicial} = 0$ e $t_{final} = 300\mu\text{s}$, parâmetros $B_0 = 1T$, $B_1 = 0.1T$, $\omega = 1,7234\text{MHz}/T$ e condições iniciais $X(0) = Y(0) = Z(0) = \dot{X}(0) = \dot{Y}(0) = 0$ e $\dot{Z}(0) = 10^4\text{m}/\text{s}$.

embora não sejam periódicos, porém em uma escala menor. Outros delineamentos variados também podem ser obtidos dentro da escala de validade da aproximação do campo uniforme, os quais são mostrados no referencial do laboratório seguido do equivalente no referencial girante, usando dados da solução numérica do sistema (47), como mostram as Figuras 6–12 e 13.

Ajustando o parâmetro ω na ressonância da frequência de Larmor, a partícula é ejetada rapidamente da região de validade das equações de movimento, em direção ao eixo z , como mostra Figura 14.

Lembrando que as equações de movimento que estão sendo analisadas são válidas em uma região em torno

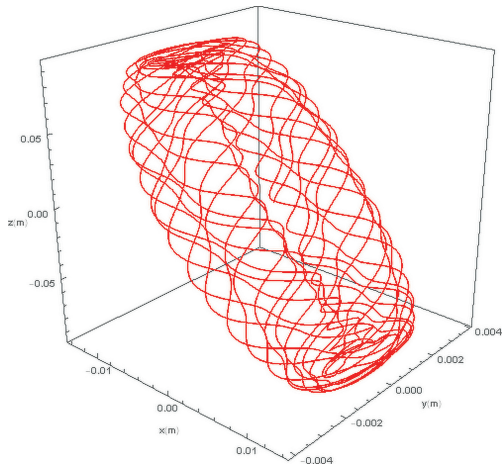


Figura 7: Trajetória não ressonante do urânio $^{235}\text{U}^{3+}$, equivalente a Figura 6 no tempo $t_{\text{inicial}} = 0$ e $t_{\text{final}} = 590\mu\text{s}$, representa no sistema girante.

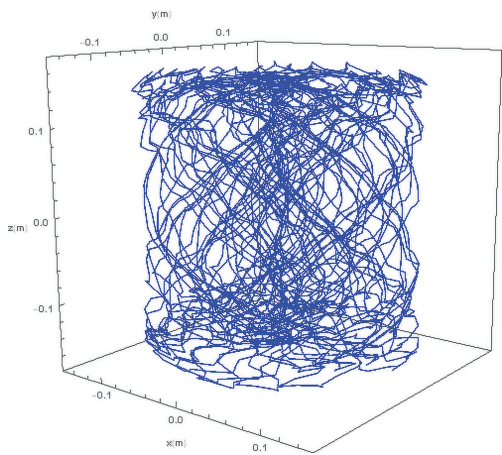


Figura 8: Trajetória não ressonante do urânio $^{235}\text{U}^{3+}$ no sistema do laboratório, em um intervalo de tempo $t_{\text{inicial}} = 0$ e $t_{\text{final}} = 4\text{ms}$ com parâmetros e condições iniciais $B_0 = 0.1\text{T}$, $B_1 = 0.1\text{T}$, $\omega = -1,231\text{ MHz/T}$, $X(0) = Y(0) = Z(0) = \dot{X}(0) = \dot{Y}(0) = 10^4\text{m/s}$ e $\dot{Z}(0) = 10^4\text{m/s}$.

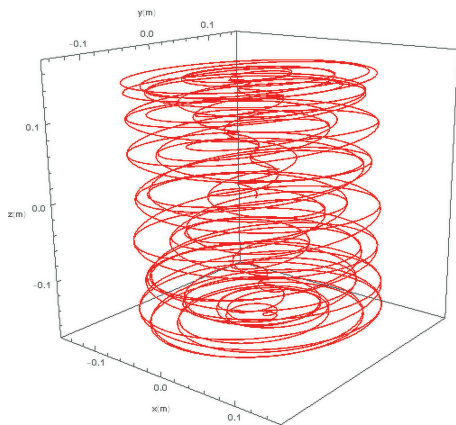


Figura 9: Trajetória não ressonante do urânio $^{235}\text{U}^{3+}$, equivalente a Figura 8 no tempo $t_{\text{inicial}} = 0$ e $t_{\text{final}} = 300\mu\text{s}$ no sistema girante.

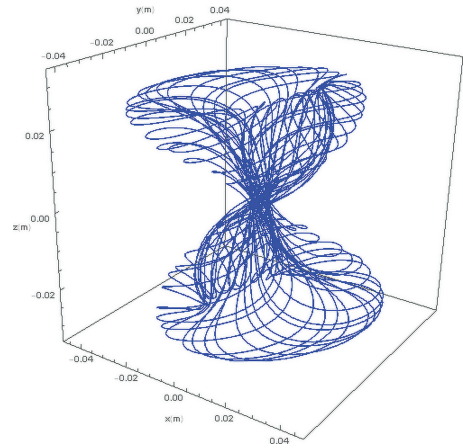


Figura 10: Trajetória não ressonante do urânio $^{235}\text{U}^{3+}$ no sistema do laboratório, em um intervalo de tempo $t_{\text{inicial}} = 0$ e $t_{\text{final}} = 500\mu\text{s}$, parâmetros $B_0 = 0,5\text{T}$, $B_1 = 0,4\text{T}$, $\omega = -1,231\text{ MHz/T}$ e condições iniciais $X(0) = Y(0) = Z(0) = \dot{X}(0) = \dot{Y}(0) = 10^4\text{m/s}$ e $\dot{Z}(0) = 10^4\text{m/s}$.

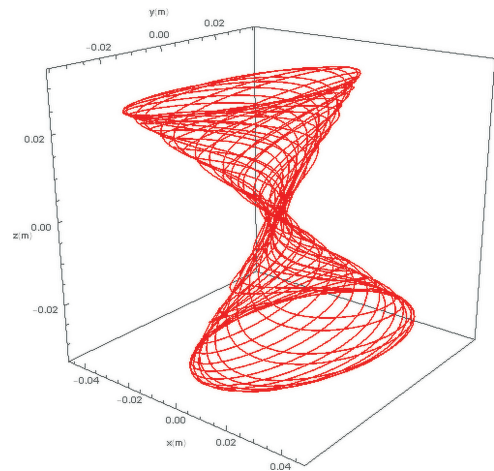


Figura 11: Trajetória não ressonante do urânio $^{235}\text{U}^{3+}$, equivalente a Figura 8 no tempo $t_{\text{inicial}} = 0$ e $t_{\text{final}} = 300\mu\text{s}$ no sistema girante.

de um metro da origem em qualquer direção, com excelente aproximação. A trajetória ilustrada na Figura 14 transpassar essa região de validade grosseiramente em um intervalo $\Delta t = 200\mu\text{s}$. Portanto, a frequência de Larmor não vela a partícula à um movimento confinado.

Podemos sintonizar os campos na frequência de ciclotron do isótopo de $^{235}\text{U}^{3+}$ e disparar um feixe com as partículas $^{233}\text{U}^{3+}$, $^{234}\text{U}^{3+}$, $^{235}\text{U}^{3+}$, $^{236}\text{U}^{3+}$ e $^{238}\text{U}^{3+}$, cujo valor de γ ($\frac{\text{MHz}}{\text{T}}$) vale, respectivamente, $\gamma_1 = 1,242$, $\gamma_2 = 1,237$, $\gamma_3 = 1,231$, $\gamma_4 = 1,226$, $\gamma_5 = 1,216$. O resultado é que o $^{235}\text{U}^{3+}$ permanece em no confinamento enquanto que as outras partículas são ejetadas, como o gráfico no referencial girante na Figura 15.

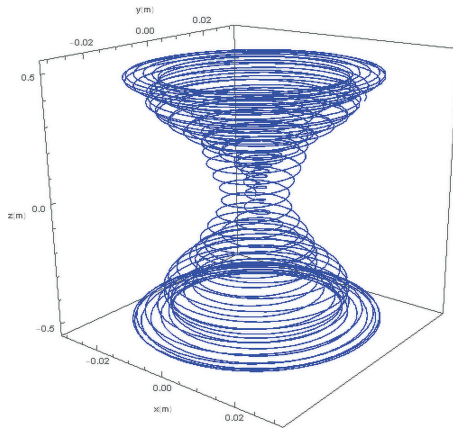


Figura 12: Trajetória não ressonante do urânio $^{235}\text{U}^{3+}$ no sistema do laboratório, em um intervalo de tempo $t_{inicial} = 0$ e $t_{final} = 350\mu\text{s}$, parâmetros $B_0 = 1T$, $B_1 = 0,01T$, $\omega = -1,3541\text{MHz}/T$ e condições iniciais $X(0) = Y(0) = Z(0) = \dot{X}(0) = \dot{Y}(0) = 0$ e $\dot{Z}(0) = 10^4\text{m}/\text{s}$.

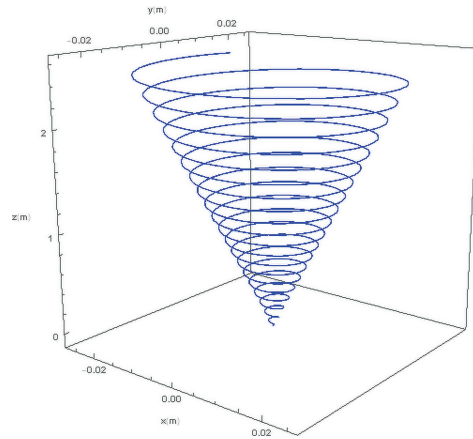


Figura 14: Trajetória ressonante na frequência de Larmor do urânio $^{235}\text{U}^{3+}$ no sistema do laboratório, em um intervalo de tempo $t_{inicial} = 0$ e $t_{final} = 200\mu\text{s}$, parâmetros $B_0 = 1T$, $B_1 = 0,01T$, $\omega = -0,6155\text{MHz}/T$ e condições iniciais $X(0) = Y(0) = Z(0) = \dot{X}(0) = \dot{Y}(0) = 0$ e $\dot{Z}(0) = 10^4\text{m}/\text{s}$.

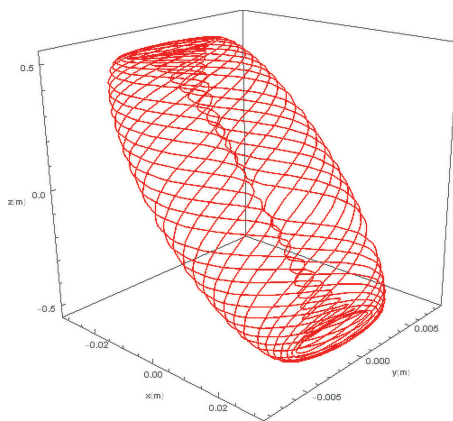


Figura 13: Trajetória não ressonante do urânio $^{235}\text{U}^{3+}$, equivalente a Figura 12 no tempo $t_{inicial} = 0$ e $t_{final} = 3\text{ms}$ no sistema girante.

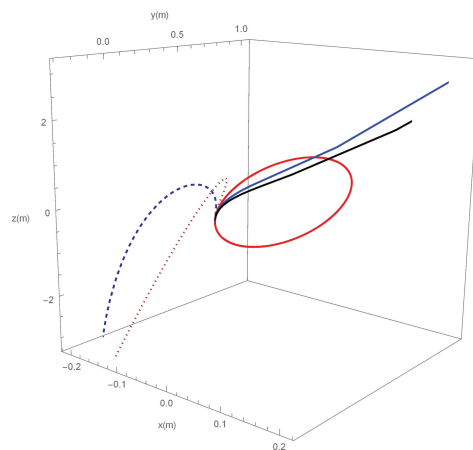


Figura 15: Trajetória dos isótopos de urânio submetidos aos campos oscilantes em ressonância com $^{235}\text{U}^{3+}$, onde a linha pontilhada laranja representa $^{236}\text{U}^{3+}$, a linha pontilhada azul representa $^{238}\text{U}^{3+}$, a linha vermelha representa $^{235}\text{U}^{3+}$, a linha azul representa $^{234}\text{U}^{3+}$ e a linha preta representa $^{233}\text{U}^{3+}$, com os parâmetros e condições iniciais $B_0 = 1T$, $B_1 = 0,01T$, $\omega = -1,231\text{MHz}/T$, $X(0) = Y(0) = Z(0) = \dot{X}(0) = \dot{Y}(0) = 0$ e $\dot{Z}(0) = 10^4\text{m}/\text{s}$.

4. Identificando Caos

Na seção 3, foram obtidas algumas trajetórias de confinamento para uma partícula carregada submetida a campos oscilantes que são aproximadamente soluções das equações de Maxwell. Tais aproximações caracterizam mudanças nos parâmetros B_0 e B_1 , as quais podem trazer mudanças drásticas no movimento previsto pelas equações dependendo da estabilidade do sistema.

A estabilidade de um sistema dinâmico está relacionada com o comportamento das trajetórias na vizinhança de um ponto fixo. Se dois estados vizinhos separam-se exponencialmente, então esse sistema é caótico.

A não-linearidade é uma condição necessária para que um sistema apresente caos. Portanto, o primeiro passo é escrever as equações (44a), (44b) e (44c) como um sistema dinâmico. Portanto, as novas variáveis do

sistema de primeira ordem serão dadas por

$$\begin{cases} \dot{V}_x = \dot{X} \\ \dot{V}_y = \dot{Y} \\ \dot{V}_z = \dot{Z} \\ \dot{\phi} = \omega \\ \dot{V}_x = \gamma \left[-\frac{1}{2}Z\dot{\phi}B_1 \cos(\phi) + V_y B_0 - V_z B_1 \sin(\phi) \right] \\ \dot{V}_y = \gamma \left[-\frac{1}{2}Z\dot{\phi}B_1 \sin(\phi) - V_x B_0 + V_z B_1 \cos(\phi) \right] \\ \dot{V}_z = \gamma \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}B_1 (X \cos(\phi) + Y \sin(\phi)) + V_x B_1 \sin(\phi) - V_y B_1 \cos(\phi) \right], \end{cases} \tag{79}$$

ou

$$\vec{f}(\vec{R}(r_i, \phi, V_i)) = \vec{R}(R_i, \phi, V_i), \tag{80}$$

onde

$$\vec{R}(r_i, \phi, V_i) = [X \ Y \ Z \ \phi \ V_x \ V_y \ V_z \ \omega]^T, \tag{81}$$

o vetor estado do sistema.

Portanto, (79) é um sistema de primeira ordem com 8 variáveis, onde $\phi(t)$ é uma complicada dependência temporal e que introduz a não-linearidade, representado pela equação (80).

A pesar na não-linearidade ser uma condição necessária, não é suficiente. O caos do sistema será definido através da seção de Poincaré e dos expoentes máximos de Lyapunov.

4.1. Seções de Poincaré

Podemos identificar o caos analisando os diagramas de fase, velocidade em função das coordenadas espaciais da trajetória da partícula, $V_n(\vec{r}_n)$. Serão utilizadas as seções de Poincaré para projetar pontos em um plano de interesse do espaço de fase, visto que

$$\left\{ f(\vec{R}(r_i, \phi, V_i)) \in \mathbb{R}^8 / t = f'(\vec{R}(r_i, V_i)), (r_i, V_i) \in \mathbf{A} \right\},$$

onde \mathbf{A} é o domínio da função, não tem representação geométrica.

As Figuras 16, 17 e 18 mostram as seções de Poincaré nos planos $\dot{X}X$, $\dot{Y}Y$ e $\dot{Z}Z$ do espaço de fase, com $Y(t) = 0$ ou $X(t) = 0$, para o confinamento ressonante expresso na Figura 2.

Devemos ponderar as Figuras 16, 17 e 18 em buscas de irregularidades. Movimentos periódicos geralmente apresentam poucos pontos nas seções de Poincaré, o que é equivalente a um espaço de fase simplificado. No entanto,

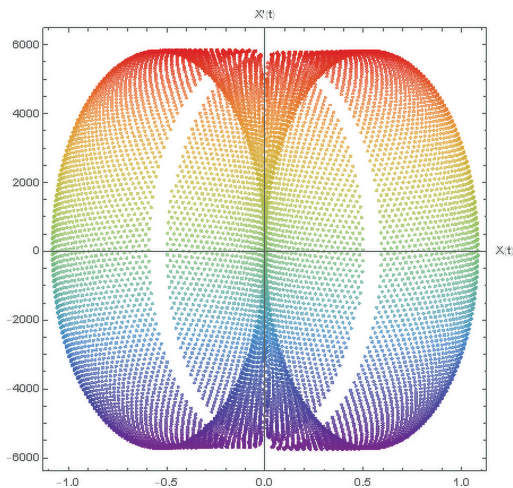


Figura 16: Seção de Poincaré com 50 vezes o intervalo $\Delta t = 590\mu s$, sendo $t_0 = 0$, e $Y(t) = 0$.

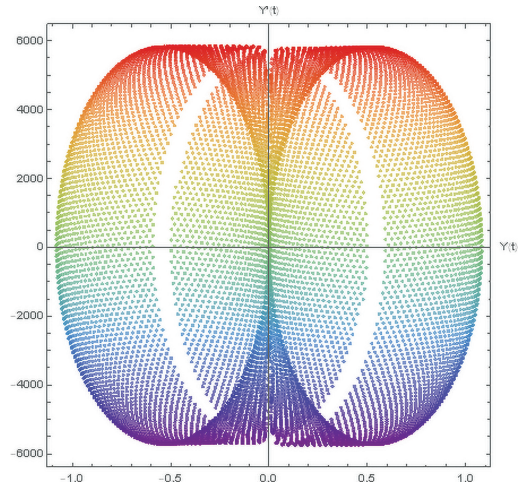


Figura 17: Seção de Poincaré com 50 vezes o intervalo $\Delta t = 590\mu s$, sendo $t_0 = 0$, e $X(t) = 0$.

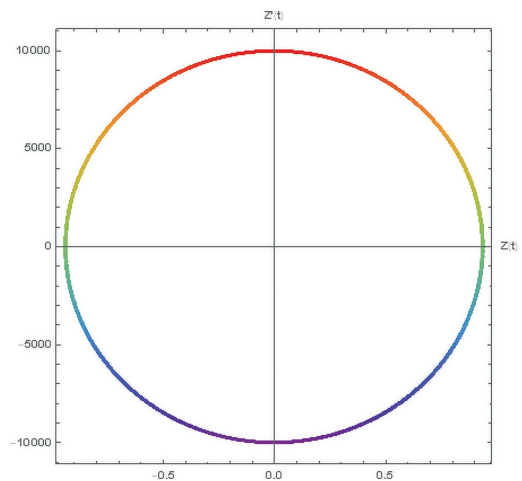


Figura 18: Seção de Poincaré com 50 vezes o intervalo $\Delta t = 590\mu s$, sendo $t_0 = 0$, e $Y(t) = 0$.

é possível que alguns sistemas sejam caóticos mesmo que o espaço de fase seja simples, isso depende das condições iniciais e parâmetros utilizados nas equações [21]. Embora a Figuras 16, 17 e 18 apresentem muitos pontos, a complexidade do movimento é tal que seja de se esperar um espaço de fase disforme. Sendo assim, se considerarmos que essas seções de Poincaré sejam aquelas, tendo em vista a periodicidade do movimento, em que o espaço de fase é simples, em relação a esse sistema, devemos ter maiores irregularidades para diferentes condições iniciais e parâmetros do que as quais são ilustradas nas Figuras 16, 17 e 18.

Mantendo os parâmetros de ressonância e variando as condições em $(X_0, Y_0) \rightarrow (0.1, 0.1)$, obtemos a seção de Poincaré ilustradas nas Figuras 19, 20 e 21.

Podemos observar que variando levemente as condições iniciais do sistema, o espaço de fase torna-se ainda mais disforme. As seções de Poincaré 19, 20 e 21 mostram uma grande extensão de pontos, quase como se

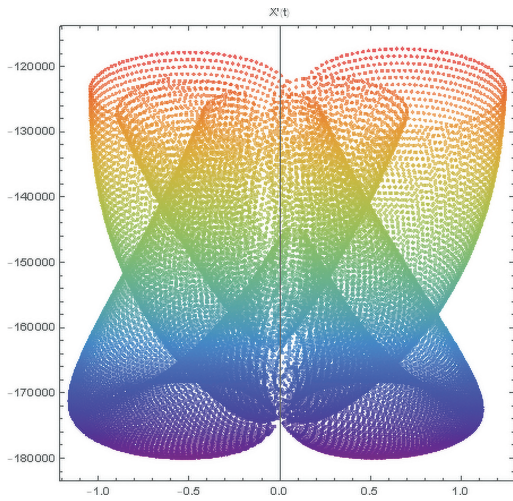


Figura 19: Seção de Poincaré com 100 mil vezes o intervalo $\Delta t = 590\mu s$, sendo $t_0 = 0$, e $Y(t) = 0$.

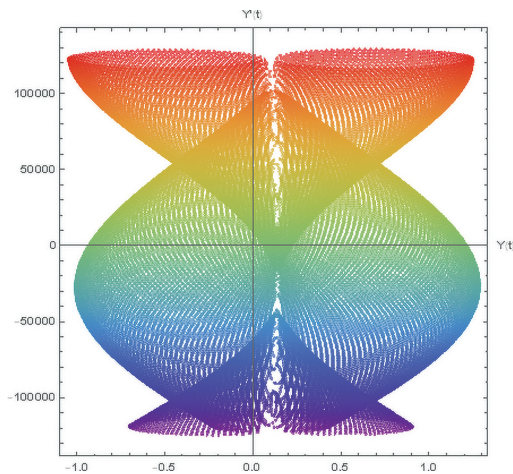


Figura 20: Seção de Poincaré com 100 mil vezes o intervalo $\Delta t = 590\mu s$, sendo $t_0 = 0$, e $X(t) = 0$.

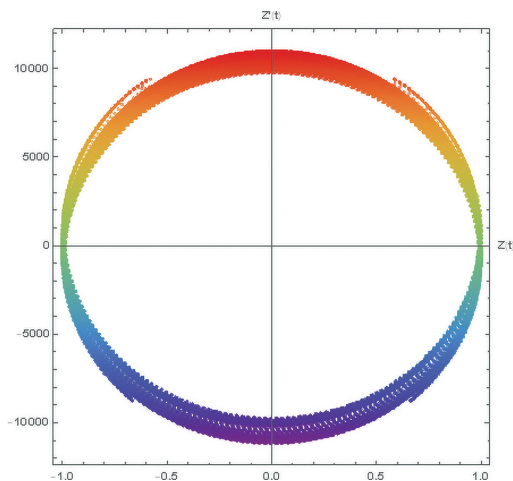


Figura 21: Seção de Poincaré com 100 mil vezes o intervalo $\Delta t = 590\mu s$, sendo $t_0 = 0$, e $Y(t) = 0$.

formassem curvas contínuas em algumas regiões. Além disso, note que ouve uma mudança significativa na escala das velocidades e na forma do espaço de fase no plano XY , implicação direta de uma mudança no movimento feitas leves alterações nas condições iniciais. Portanto, o sistema tem indícios de caos.

4.2. Expoentes máximos de Lyapunov

Dois estados diferentes se distanciam por um fator $d_n = \epsilon e^{n\lambda}$, onde ϵ é a quantidade que difere da condição inicial e λ é o expoente de Lyapunov. Logo, se $\lambda > 0$ duas trajetórias na vizinhança de um ponto fixo se distanciam exponencialmente, caracterizando forte sensibilidade de um sistema dinâmico a mudanças nas condições iniciais.

Um sistema dinâmico possui tantos expoentes de Lyapunov quando variáveis e somente um expoente positivo é suficiente para identificar o caos. Isto posto, o sistema (79) possui sete expoentes de Lyapunov, os quais foram calculados numericamente [33] conforme mostra a Figura 22.

Portanto, com base no cálculo numérico, todos os expoentes são positivos e independentes das condições iniciais e parâmetros, $\lambda = (3449.51, 3449.42, 3445.77, 3442.63, 3438.62, 3431.69, 3076.23)$.

Através dos expoentes de Lyapunov, podemos entender mais a fundo o comportamento do espaço de fase no tempo. Seja $\Phi_t : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ um mapeamento definido como *fluxo de fase* $\Phi_t(\vec{R}_0) = \vec{R}(t)$ [35], temos [23]

$$\nabla \cdot \vec{f}(\vec{R}(r_i, \phi, V_i)) = \nabla \cdot \vec{f}(\Phi_t(\vec{R}_0)) \tag{82}$$

A partir da equação (82), a taxa de variação temporal do volume U do espaço de fase é dada por [23, 34]

$$\frac{1}{U} \frac{dU}{dt} = \nabla \cdot \vec{f}(\Phi_t(\vec{R}_0)) = \sum_{i=0}^N \lambda_i \tag{83}$$

Para o caso particular em que a somatória dos expoentes de Lyapunov se anulam, o fluxo de fase matem o volume constante e, portanto, o sistema dinâmico é conservativo. Se o somatório for negativo, o sistema é dissipativo e o volume do espaço de fase se contrai

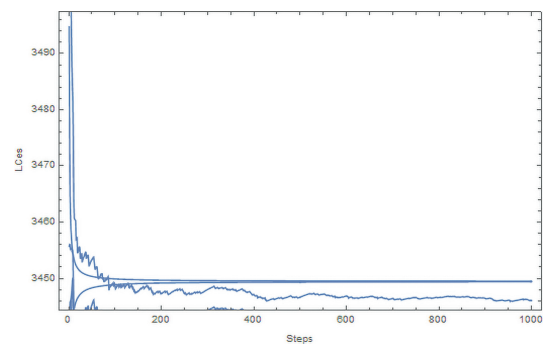


Figura 22: Expoentes máximos de Lyapunov determinados para 1000 termos.

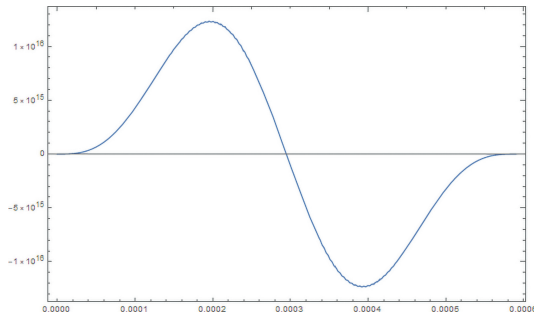


Figura 23: Taxa de variação da energia calculada numericamente para o movimento periódico ressonante, com os parâmetros e condições iniciais $B_0 = 1T$, $B_1 = 0,01T$, $\omega = -1,231MHz/T$, $X(0) = Y(0) = Z(0) = \dot{X}(0) = \dot{Y}(0) = 0$ e $\dot{Z}(0) = 10^4 m/s$.

tendendo para subespaços denominados *Atratores*. Por fim, em nosso caso, o somatório dos expoentes de Lyapunov são positivos. Dessa forma, o sistema dinâmico (79) possui um volume de espaço de fase que expande com o tempo e, por consequência, é dissipativo, isto é, a energia apresenta dependência temporal, ou derivada não nula, o que pode ser comprovado pelo gráfico da Figura 23.

5. Campos Oscilantes Experimentais

Campos magnéticos uniformes no espaço e oscilantes no tempo, são inconsistentes com as equações de Maxwell. No entanto, é possível gerar campos magnéticos parabólicos, em uma determinada região, do tipo

$$\vec{B}(x, y, z, t) = [ax^2 + bz^2 - cy^2] \cos(\omega t) \hat{i} + [ay^2 + bz^2 - cx^2] \sin(\omega t) \hat{j}, \quad (84)$$

com duas bobinas tipo Helmholtz retangulares, constituídas de fios AWG, postas ortogonalmente (esta composição de bobinas é a mesma utilizada para o estudo de propulsão de plasma em [36], mas com outras condições) e conectadas de tal forma que as oscilações da corrente conduzida por um gerador de frequências acontecem com uma defasagem de 90° entre elas. Antes da corrente percorrer as bobinas, passa por um capacitor, formando um circuito *RLC*, como mostrado na tese [25]. Aproximações como essa, de campos válidas para uma região finita do espaço, foram utilizadas no sistema Wigglers [37].

O campo magnético (84) está relacionado pela Lei de Ampère com o campo elétrico

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \frac{2bz}{\omega} \cos(\omega t) \hat{i} + \frac{2bz}{\omega} \sin(\omega t) \hat{j} + \frac{2c}{\omega} [x \cos(\omega t) + y \sin(\omega t)] \hat{k}. \quad (85)$$

Definindo as constantes $b = -\frac{B_1 \omega^2}{4}$ e $c = \frac{B_1 \omega^2}{4}$, obtemos exatamente o campo elétrico (43). A Lei de

Faraday, no entanto, resulta no campo magnético

$$\vec{B}(t) = B_1 \cos(\omega t) \hat{i} + B_1 \sin(\omega t) \hat{j}. \quad (86)$$

Fazendo uma expansão em série de Taylor do campo (84), definindo a constante $a = \frac{B_1(2+\omega^2)}{2}$, temos que

$$\vec{B}(x, y, z, t) = \vec{B}(t) + \dots \quad (87)$$

Portanto, o campo magnético (86) é solução das equações de Maxwell em ordem zero. Note que as oscilações são como rotações temporais. Um caso interessante é o estudo da corrente de triagem advinda da indução de um campo magnético rotativo ao longo de uma coluna de plasma [38].

O trabalho [25] reproduziu o campo oscilante (86) com uma uniformidade de 95% em relação a variação espacial em torno da origem no plano *xy* e com uma componente \hat{k} que difere em um valor desprezível em relação ao campo constante B_0 em torno da região de consideração (segmento pelo qual o feixe de íons desloca-se no eixo *z*).

O campo magnético constante B_0 pode ser gerado por um solenoide, dispositivo composto por enrolamento de N bobinas de raio r centradas ao longo do eixo *z*. A simetria dessa composição anula as componentes do plano *xy*. Assim, a expressão para a componente \vec{B}_z do campo é dada por

$$\vec{B}_z = \frac{\mu_0 N I}{4\pi L} \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{r^2 d\phi dz}{\sqrt{[(z_0 - z)^2 + r^2]^3}}. \quad (88)$$

A primeira integral de (88) é imediata. Podemos escolher a conveniente substituição $u = r \cot \theta$ e $du = -r \csc \theta$, onde $u = z_0 - z$, o que resulta em

$$\vec{B}_z(z_0) = \frac{\mu_0 N I}{L} \left[\frac{\cos \theta_1 + \cos \theta_2}{2} \right] \hat{k}, \quad (89)$$

na qual o interior do solenoide é representado pelos triângulos nos quais temos

$$\cos \theta_2 = \frac{L - z_0}{\sqrt{(z_0 - L)^2 + r^2}}$$

e

$$\cos \theta_1 = \frac{z_0}{\sqrt{z_0^2 + r^2}}.$$

Dessa forma, podemos aproximar $\theta_2 \cong \frac{r}{L-z_0}$ e $\theta_1 \cong \frac{r}{z_0}$ se o raio do solenoide for pequeno em comparação com o seu comprimento. Dessa forma, concluímos que se $z_0 = \frac{L}{2}$ e $r = \frac{L}{10}$, pode-se desprezar os termos quadráticos da expansão de $\cos \theta_2$ e $\cos \theta_1$ com um erro de 2%.

6. Conclusão

O campo magnético utilizado nas simulações é solução em ordem zero das equações de Maxwell. Portanto, a

dinâmica de uma partícula carregada sobre o efeito desse campo é válida na região de um metro ao redor da origem, com excelente aproximação. Por esse motivo, todas as trajetórias significativamente fora do espaço de validade das equações não são confiáveis, como é o caso da simulação numérica para partícula na frequência de Larmor.

Além disso, todos os confinamentos encontrados, para os diferentes parâmetros e condições iniciais, possuem uma frequência maior ou igual a de ciclotron, do contrário a partícula é ejetada. Como pode ser visto na seção 3, podemos fazer $s = \lambda^2$ no polinômio de sexta ordem para o autovalor, obtendo um de terceira ordem, cujas únicas possibilidades que mantém os coeficientes a e b reais positivos são duas raízes complexas conjugadas e uma real ou as três raízes reais. Em qualquer um desses casos, se $\omega < \omega_c$, temos que o coeficiente c é positivo e isso leva a raízes reais positivas, as quais geram termos exponenciais na solução que ejetam a partícula, em geral na direção do eixo Z . Isso também é o que acontece na frequência de Larmor, já que $\omega = 2\omega_c$.

Outra importante questão tratada foi a determinação do caos. As aproximações que validam as equações de Maxwell para os campos oscilantes no tempo e uniformes no espaço muito dificilmente são obtidas por qualquer aparato experimental razoável. Toda leve variação espacial dos campos caracterizam uma leve variação nos parâmetros B_1 e B_0 , as quais podem mudar drasticamente a trajetória da partícula, uma vez que o sistema é caótico. Através das seções de Poincaré, podemos constatar que o espaço de fase, para trajetória ressonante, expande quando B_1 é variado para valores menores e contraí para valores maiores. Essa primeira consequência é a mais perigosa, visto que o movimento está saindo da região de aproximação; a segunda, mantém a forma sobre um volume menor, mas sem o caráter periódico. O parâmetro B_0 é o mais caótico, o espaço de fase se aproxima daquele na ressonância a uma variação de um bilionésimo. Portanto, a trajetória ressonante tem uma liberdade de erro acessível no parâmetro B_1 e a precisão de B_0 deve ser de uma parte em um bilhão, e, mesmo assim, o movimento não será periódico, mas será confinado.

Averiguamos, também, que se a frequência de oscilação dos campos estiver sintonizada com a de ciclotron da partícula, podemos disparar um feixe de átomos ionizados na região de consideração e manter no confinamento o isótopo da ressonância, enquanto que os outros são ejetados. Essa análise pode ser feita de forma mais imediata no sistema girante, a partir de simulações com a solução particular. Portanto, o campo magnético utilizado, tem aplicações na separação isotópica (isso foi realizado em [25]).

Agradecimentos

Os autores agradecem aos professores Vitor L. B. de Jesus e Danilo T. Alves pelos esclarecimentos a respeito de questões fundamentais do eletromagnetismo

e dos aparatos experimentais. Os autores também agradecem ao professor Marcus A. M. de Aguirar pelo esclarecimento sobre o caos, no sistema do laboratório e girante, e ao CNPq pela bolsa PIBIC e financiamento parcial do trabalho.

Referências

- [1] F. Köhler-Langes, *The Electron Mass and Calcium Isotope Shifts: High-Precision Measurements of Bound-Electron g -Factors of Highly Charged Ions* (Springer, Berlin, 2017).
- [2] F.G. Major, V.N. Gheorghe e G. Werth, *Charged Particle Traps: Physics and Techniques of Charged Particle Field Confinement* (Springer, Berlin, 2005).
- [3] G. Werth, V.N. Gheorghe e F.G. Major, *Charged Particle Traps II* (Springer, Berlin, 2005).
- [4] M. Vogel, Z. Andelkovic, G. Birkl, S. Ebrahimi, V. Hannen, D. von Lindenfels, A. Martin, T. Murböck, W. Nörtershäuser, W. Quint et al., *Phys. Scr.* **2015**, 014066 (2015).
- [5] J.A. Bittencourt, *Fundamentals of plasma physics* (Springer, Berlin, 2004), 3ª ed.
- [6] P. Helander, *Rep. Prog. Phys.* **77**, 087001 (2014).
- [7] J.E. García-Farieta e A. Hurtado, *Rev. Mex. Fis. E* **65**, 64 (2019).
- [8] R.S. Dutra, D.S.R. Ferreira, A.S.M. Gonçalves e G.M. Carvalho, *Rev. Bras. Ensino Fís.* **42**, e20190164 (2020).
- [9] C.V. Rauen, *O Projeto Sirius e as encomendas tecnológicas para a construção da nova fonte de luz síncrotron brasileira*, disponível em: <http://repositorio.ipea.gov.br>, acessado em 31/12/2020.
- [10] D.J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics* (Prentice-Hall, Upper Saddle River, 1999), 3ª ed.
- [11] G.B. Arfken e H.J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists* (Elsevier, Amsterdã, 2005), 6ª ed.
- [12] J.C.A. Barata, *Notas para um Curso de Física-Matemática*, disponível em: http://denebola.if.usp.br/~jbarata/Notas_de_aula/capitulos.html, acessado em 09/11/2020.
- [13] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (John Wiley & Sons, New York, 1999), 3ª ed.
- [14] J.R. Reitz, F.J. Milford e R.W. Christy, *Foundations of Electromagnetic Theory* (Addison Wesley, Boston, 1992), 4ª ed.
- [15] K.D. Machado, *Teoria do eletromagnetismo* (Editora UEPG, Ponta Grossa, 2002), v. 1.
- [16] K.D. Machado, *Teoria do eletromagnetismo* (Editora UEPG, Ponta Grossa, 2006), v. 2.
- [17] K.D. Machado, *Teoria do eletromagnetismo* (Editora UEPG, Ponta Grossa, 2006), v. 3.
- [18] K.R. Symon, *Mechanics* (Addison-Wesley, Boston, 1971), 3ª ed.
- [19] N.A. Lemos, *Mecânica analítica* (Livraria da Física, São Paulo, 2007), 2ª ed.
- [20] R.P. Feynman, R.B. Leighton e M. Sands, *Lectures on physics* (Addison-Wesley, Boston, 1964), v. 2.
- [21] S.T. Thornton e J.B. Marion, *Classical Dynamics of Particles and Systems* (Brooks/Cole Cengage Learning, Boston, 2003), 5ª ed.

- [22] V. Ilisie, *Lectures in Classical Mechanics* (Springer, New York, 2020), 1^a ed.
- [23] W. Greiner, *Classical mechanics: systems of particles and Hamiltonian dynamics* (Springer, New York, 2010), 2^a ed.
- [24] W. Greiner, *Classical Electrodynamics* (Springer, New York, 1998).
- [25] V.L.B. de Jesus, *Movimento de cargas em Campos Oscilantes: Separação Isotópica e Confinamento Magnético Ressonante*. Tese de doutorado, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro (2000).
- [26] V.L.B. de Jesus, A.P. Guimarães e I.S. Oliveira, *Braz. J. Phys.* **29**, 541 (1999).
- [27] D.M. de Oliveira, *Rev. Bras. Ensino Fís.* **33**, 3309 (2011).
- [28] J.A. Heras, arXiv:physics/0702217v1 (2007).
- [29] G.F.L. Ferreira, *Rev. Bras. Ensino Fís.* **26**, 27 (2004).
- [30] A. Kalev e I. Hen, arXiv:2010.09888v1 (2020).
- [31] Q.G. Lin, arXiv:quant-ph/0212038v2 (2002).
- [32] E. Hatzakis, *Comprehensive Reviews in Food Science and Food Safety* **18**, 189 (2018).
- [33] M. Sandri, *The Mathematical Journal* **6**, 78 (1996).
- [34] L.J.B. Quaresma e M.E. Rodrigues, *Rev. Bras. Ensino Fís* **41**, e20170401 (2019).
- [35] O.F.A. Bonfim, D.J. Griffiths e S. Hinkley, *Int. J. Bifurcation Chaos* **10**, 265 (2000).
- [36] T. Furukawa, K. Takizawa, D. Kuwahara e S. Shinohara, *Physics of Plasmas* **24**, 043505 (2017).
- [37] P. Diament, *Physical Review A* **23**, 2537 (1981).
- [38] I.R. Jones, *Physics of Plasmas* **6**, 1950 (1999).