Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 44, e20220076 (2022)
www.scielo.br/rbef
DOI: https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2022-0076

Pesquisa em Ensino de Física

Determinação da velocidade das ondas extensionais em hastes metálicas delgadas

Determination of extensional wave velocity in thin metal rods

Marcos Roberto Rossini*[1], Paulo Sérgio de Camargo Filho[1], Kleber Eiti Yamaguti[1], Marcio José Alves[1], Luís Henrique Cardozo Amorin[2]

[1]Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Departamento Acadêmico de Física, Campus Londrina, Londrina, PR, Brasil.
[2]Universidade Federal da Bahia, Instituto de Ciência, Tecnologia e Inovação, Camaçari, BA, Brasil.

Recebido em 02 de março de 2022. Revisado em 02 de maio de 2022. Aceito em 07 de maio de 2022.

Desde o final do século XIX, e posteriormente impulsionado pelo desenvolvimento aeroespacial, a modelagem das vibrações em estruturas metálicas tem demandado grande empenho por parte dos pesquisadores. Acrescente-se a isto a importância de se prever os abalos sísmicos e de se minimizar os danos que geram, e se tem mais um significativo propósito pelo estudo das ondas em estruturas. No curso de Física Clássica, aborda-se a ondulatória na perspectiva do oscilador harmônico, das ondas em cordas e em tubos sonoros, analisando-se as ondas longitudinais e transversais. Entretanto, ondas de superfície e ondas extensionais raramente são citadas, de forma que o presente trabalho pretende contribuir na pavimentação desta pequena lacuna, propondo uma atividade prática para calcular o módulo da velocidade das ondas extensionais em hastes de aço e alumínio, empregando as frequências dos harmônicos das ondas estacionárias extensionais. O desenvolvimento teórico é plenamente compreensível ao estudante que possua conhecimento básico de Física e de Cálculo Diferencial e Integral. O aparato experimental é de baixo custo e plenamente disponível. Determinam-se as frequências ressonantes com um telefone celular onde se instalou aplicativo Spectroid, gratuito. Obtiveram-se para as velocidades extensionais $v_{ext-Al} = (5,05 \pm 0,02).10^3 m/s$ e $v_{ext\text{-}aço} = (5,21 \pm 0,08).10^3 m/s$, implicando que os respectivos desvios relativos em relação à literatura foram 1% e 0,6%, muito bons para um laboratório didático. A atividade ainda favorece o aprofundamento dos conceitos relacionados às oscilações e ainda traz fortes elementos lúdicos, como o emprego do telefone celular e o timbre agradável das hastes ressonantes, de forma que sua aplicação é plenamente factível e recomendável.
Palavras-chave: Ensino de Física, frequência natural, ressonância, velocidade extensional, hastes, smartphone.

Since the end of the 19th century, and later driven by aerospace development, the modeling of vibrations in metallic structures has demanded significant effort on the part of researchers. Add to this the importance of predicting earthquakes and minimizing the damage they generate, and there is one more significant purpose for the study of waves in structures. In the Classical Physics course, waves are approached from the perspective of the harmonic oscillator, waves in strings and sound tubes, analyzing longitudinal and transverse waves. However, surface waves and extensional waves are rarely mentioned, so the present work intends to contribute to the paving of this small gap, proposing a practical activity to calculate the modulus of the speed of extensional waves in steel and aluminum rods, using the frequencies of the harmonics of extensional standing waves. The theoretical development is fully understandable to the student who has basic knowledge of Physics and Differential and Integral Calculus. The experimental apparatus is low cost and fully available. The resonant frequencies are determined with a cell phone where the free Spectroid application has been installed. For extensional speeds, were obtained $v_{ext-Al} = (5.05 \pm 0.02).10^3 m/s$ and $v_{ext-steel} = (5.21 \pm 0.08).10^3 m/s$, implying that the respective relative deviations from the literature were 1% and 0.6%, very good for a teaching laboratory. The activity also favors the deepening of the concepts related to oscillations and brings strong playful elements, such as the use of the cell phone and the pleasant timbre of the resonant rods, so that its application is fully feasible and recommendable.
Keywords: Physics teaching, natural frequency, resonance, extensional speed, rods, smartphone.

1. Introdução

A invenção dos relógios mecânicos acionados por pêndulos ou molas em movimentos periódicos elevou o patamar de precisão da medida do tempo. Esta aplicação tecnológica das oscilações impactou científica, econômica e culturalmente a sociedade [1–3]. Melhores medidas de tempo permitiram a construção de cartas náuticas mais precisas e viagens marítimas mais econômicas e seguras. Navega-se pelo ar, pelo espaço e pela internet, tendo como suporte rádios, radares, sonares, televisores, computadores, smartphones e GPS operando graças a

* Endereço de correspondência: rossini@utfpr.edu.br

perturbações periódicas que se propagam [4–8]. Assim posto, fica manifesto que o entendimento das interações entre sistemas físicos requer profunda compreensão das ondas e de suas características fundamentais, como amplitude, comprimento, frequência e velocidade de propagação.

Na construção civil, o colapso da ponte de Tacoma, em 7 de novembro de 1940, é um trágico exemplo da consequência de oscilações imprevistas e indesejáveis em estruturas manufaturadas. A título de curiosidade, ao contrário do que se possa pensar, o estresse não ocorreu devido à ressonância induzida por uma força externa que oscila na frequência natural do sistema, mas consequência do efeito aerodinâmico que excitou um grau de liberdade de torção da ponte [9–11]. O desenvolvimento aeroespacial, que se deu por volta da década de 1950 e impulsionou enormemente a ciência e a tecnologia, exigiu avanço no conhecimento do comportamento dos materiais. As vibrações, os gradientes de temperatura e pressão, e as ondas de choque agindo sobre os módulos espaciais, particularmente durante a decolagem e retorno à atmosfera terrestre, atingiam patamares superiores àqueles que se encontravam na literatura técnica, demandando aprofundamentos nas análises físicas e matemáticas.

O primeiro modelo para o tratamento das vibrações em hastes é atribuído a John William Strutt, conhecido como Lord Rayleigh, apresentados nos anos de 1877 e 1878, onde desenvolve a equação de onda considerando que as oscilações em hastes sejam longitudinais, que o material possua comportamento elástico linear, obedecendo, portanto, à Lei de Hooke, e que as secções transversais permaneçam planas e paralelas durante a passagem das ondas. Neste trabalho pioneiro, ainda não se pensava nas contrações associadas ao coeficiente de Poisson e tampouco no atrito interno dos elementos submetidos às tenções [12, 13]. Ao longo do século XX, desenvolveram-se as equações da dinâmica das oscilações considerando o efeito viscoelástico, incluindo modelos para explicar o atrito a nível microscópico. Estas se revelaram bastante complexas, mesmo aplicadas em casos mais simples, como cilindros infinitos. Para situações mais realistas, as condições de contorno introduziram dificuldades intransponíveis quando se procuravam soluções por separação de variáveis, como se faz tradicionalmente para a resolução de equações que conduzem a funções de ondas estacionárias [13–15]. A tendência atual é empregar o tratamento numérico das equações, facilitada pelo desenvolvimento de softwares e hardwares, embora se percam as correlações entre as grandezas físicas do problema, dificultando a análise conceitual [16–18].

No campo da geologia e da sismologia, o estudo das ondas é quesito para o desenvolvimento de modelos que auxiliem o entendimento da estrutura da Terra e sua dinâmica. Abalos sísmicos geram ondas de corpo pelo interior do planeta, conhecidas como onda

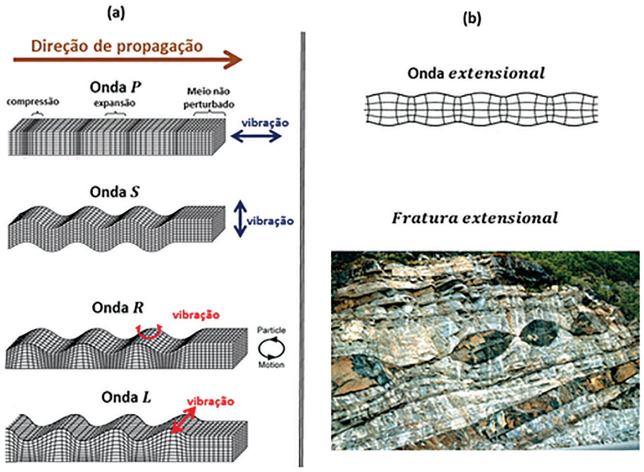


Figura 1: À esquerda (a), representação (adaptada) das ondas de corpo (P e S) e de superfície (R e L). À direita (b), acima, esquematização de uma onda extensional. Abaixo, uma fratura extensional devida à deformação plástica em dique máfico [24, 25].

primária (onda P) ou onda de pressão (*longitudal wave, dilatational wave*), e onda secundária (onda S) ou de cisalhamento (*shear wave*). A onda P é mais rápida, sendo o primeiro sinal de um terremoto, e provoca danos menores que a onda S. A interação entre as ondas S e P, juntamente com a refração, gera as ondas de superfície conhecida como ondas L (de Love) e R (de Rayleigh), Figura 1(a). Em superfícies delimitadas (placas), ou em hastes delgadas, surgem as ondas extensionais (*extensional wave*), que provocam contração e expansão do material em direções ortogonais ao sentido de propagação da onda, podendo ficar registrada na rocha como fratura extensional, Figura 1(b). O objeto do presente trabalho é a determinação do módulo da velocidade das ondas extensionais em hastes delgadas [19–23].

Em 1963, Kolsky [20] publicou um artigo explicando que, em um sólido elástico isotrópico infinito, as ondas P propagam-se com velocidade de módulo $v_P = \sqrt{(k+4G/3)/\rho}$ e as ondas S com velocidade $v_S = \sqrt{G/\rho}$, sendo k o módulo de volume, G o módulo de cisalhamento e ρ a densidade do material. No mesmo trabalho, explica que as ondas de superfície de Rayleigh propagam-se com velocidade de valor v_R, ligeiramente inferior ao das ondas S. A razão v_R/v_S situa-se entre 0,874 e 0,955, e dependerá da razão de Poisson, $v = -\Delta l/\Delta L$, entre o módulo do alongamento normal à tração, Δl, em relação ao alongamento na direção da tração (ou da compressão), ΔL, conforme representado na Figura 2. Estas deformações diferenciam a onda extensional da onda longitudinal.

Em placas infinitas, as ondas extensionais são dispersivas, a velocidade de propagação depende do comprimento de onda, λ [20]. Quando λ é muito maior que a espessura (e) da placa, $\lambda/e \gg 1$, estas ondas viajam

 DOI: https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2022-0076

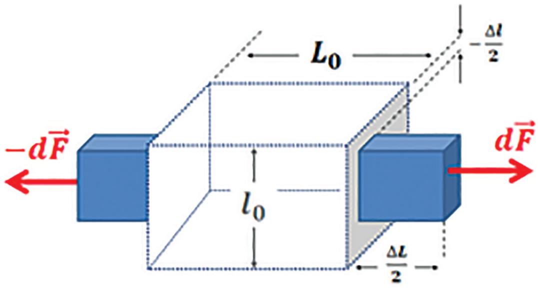


Figura 2: Representação das variações de comprimento, Δl e ΔL, normal e paralela à direção de tração, respectivamente.

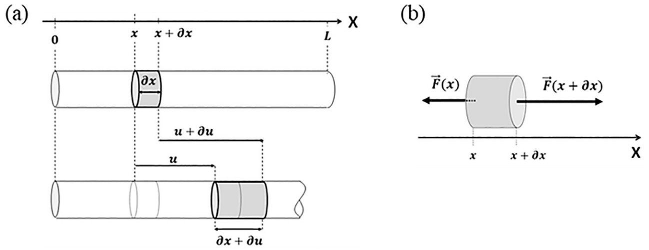


Figura 3: (a) Acima, haste relaxada, destacando-se uma porção elementar de comprimento ∂x. Abaixo, em um instante posterior t, sua nova disposição quando a haste é percorrida pela onda. (b) Forças normais atuando sobre as faces laterais da porção elementar.

com a velocidade $v_{ext} = \sqrt{E/[\rho(1-v^2)]}$, sendo E o módulo de Young do material. Em barras cilíndricas metálicas, para comprimentos de onda longos em relação ao raio (r), $\lambda/r \gg 1$, ou $k \cdot r \ll 1$, $k = 2\pi/\lambda$, a análise dos harmônicos das ondas extensionais mostra-se bem-sucedida, e nestas circunstâncias pode-se tomar $v \approx 0$. Assim, a dependência das velocidades de fase em relação aos comprimentos de onda torna-se insipiente, permitindo-se definir uma velocidade de grupo dada por $v_{g-ext} = \sqrt{E/\rho}$, a qual é objeto do presente trabalho, conforme dantes se afirmou [13, 26–28].

2. Equação de Onda em Uma Haste Delgada Homogênea

Assumindo-se que a amplitude de oscilação da onda seja muito maior que a distância média entre os átomos, idealiza-se a haste metálica como constituída por um material contínuo e homogêneo. Considere-se uma porção elementar (infinitesimal) desta haste relaxada com extremos em x e $x + \partial x$. Com a presença da onda, este elemento desloca-se e tem seu comprimento alterado. Imagine-se, como ilustrado na Figura 3(a) que, no instante t, a face à esquerda desloque-se de um valor u, enquanto a outra, à direita, desloque-se de $u + \partial u$. A grandeza $u(x, t)$ pode ser entendida como a elongação sofrida pela haste na abscissa x no instante t. Isto significa que, no instante t, as extremidades do elemento estarão nas abscissas $(x + u)$ e $(x + \partial x + u + \partial u)$, implicando que seu comprimento seja $\partial x + \partial u$, podendo ∂u ser positivo ou negativo [12–14, 16–18].

Obtém-se a equação da onda aplicando-se a Segunda Lei de Newton ao elemento de haste com densidade linear μ e massa $\partial m = \mu \partial x$, mostrado na Figura 3(b). A lei de força considerará que as tensões serão normais às faces laterais (secções transversais) e, portanto, submetidas exclusivamente, a ação de forças paralelas ao eixo da haste [29–31]. Admitindo que somente os extremos da haste, localizados em $x = 0$ e $x = L$, estejam livres, os demais interagirão com aqueles que os precedem e aqueles que os sucedem. Aplicando-se a segunda lei de Newton ao elemento submetido à força resultante $\partial F = F(x + \partial x) - F(x)$, encontra-se $(\mu \cdot \partial x) \cdot a = \partial F$.

Substituindo-se a aceleração por $\partial^2 u/\partial t^2$:

$$\mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial F}{\partial x} \tag{1}$$

Ainda na Figura 3(a), observa-se que o comprimento do elemento na ausência de tensões é ∂x, e que a tensão irá alongá-lo de uma quantidade ∂u. Assim entendido, é imediato que a elongação relativa seja $\frac{\partial u}{\partial x}$. Aplicando-se a Lei de Hooke encontra-se $\sigma(x, t) = E\frac{\partial u}{\partial x}$ [29–31]. Por definição, A é a secção transversal da haste, e $F(x, t) = A \cdot \sigma(x, t)$, de forma que

$$F(x, t) = A \cdot E \cdot \partial u/\partial x \tag{2}$$

ao ser levada à equação (1), resulta na equação de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = {v_g}^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{3}$$

sendo $v_g = \sqrt{E/\rho}$ o módulo da velocidade de grupo da onda, que não deve ser confundida com a velocidade de oscilação do elemento, $\partial u/\partial t$. Salienta-se que $\rho = \mu/A$ é a densidade volumétrica da haste, e que $F(0, t) = F(L, t) = 0$, por hipótese [32]. Como se buscam soluções que representem ondas estacionárias [32–35], propõe-se $u(x, t) = T(t)\ U(x)$, que substituída na equação (3) permitirá que se encontrem as soluções:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= T_A \cdot \cos(\omega_n \cdot t + \varphi_0) \\ &\quad \times [U_A \cdot \cos(k_n \cdot x) + U_B \cdot sen(k_n \cdot x)] \end{aligned} \tag{4}$$

onde $k_n = 2\pi/\lambda_n = \omega_n/v_g$ é o número de onda, T_A e φ_0 constantes dependentes das condições iniciais [34, 35].

As condições de contorno exigem que a haste esteja com os extremos livres, de forma que nenhuma força pode atuar em $x = 0$ e em $x = L$. A equação (2) mostra que a condição de extremos livres, $F(0, t) = F(L, t) = 0$, equivale a $\partial u/\partial x = 0$ em $x = 0$ e em $x = L$. Na equação (4), para $x = 0$, obtém-se $U_B = 0$. Em $x = L$, encontra-se $U_A \cdot sen(k_n \cdot L) = 0$. Descartando-se a solução trivial, deve ocorrer $sen(k_n \cdot L) = 0$. A periodicidade da função seno quantizará o valor de k_n em múltiplos de

π/L, $k_n = n{\cdot}\pi/L$ $(n = 1, 2, 3\ldots)$, de modo que a solução geral para as oscilações harmônicas não amortecidas nas hastes homogêneas e delgadas com extremos livres, é:

$$u_n(x,t) = u_{A,n} \cdot sen\left(n\pi \cdot \frac{x}{L}\right) \cdot \cos(\omega_n \cdot t + \varphi_0) \qquad (5)$$

e $u_{A,n} = T_A.U_{A,n}$ é a constante que, juntamente com φ_0 depende das condições iniciais.

A equação de onda estacionária apresentada na equação (5) é a equação de uma onda gerada pela interferência de duas ondas progressivas de mesma frequência e amplitude que se movem em sentidos opostos, com velocidade de módulo $v_n = \omega_n/k_n$, a qual é, por definição, a velocidade de fase destas ondas progressivas. Neste modelo, a velocidade de fase mostra-se constante, $v_n = v_g = \sqrt{E/\rho}$. Esta particularidade garante que qualquer pacote de ondas que percorra a haste não se dispersará e, portanto, terá uma velocidade bem definida, conhecida como velocidade de grupo. Entenda-se por um pacote de ondas uma onda gerada pela combinação linear, ou interferência, dos harmônicos. O caso mais simples para ilustrar um pacote de ondas é o fenômeno do batimento, onde uma onda moduladora define o envoltório do pacote. A velocidade desta onda moduladora é a velocidade de grupo, $v_g = d\omega/dk$. Em outros termos, quando a velocidade de fase de todas as ondas harmônicas que formam o pacote for igual, a velocidade do pacote de ondas resultante será igual a velocidade de fase, implicando que, qualquer que seja a forma da onda moduladora que percorra a haste, ela permanece, o que equivale a dizer que o pacote não dispersa. Estudantes que já tenham compreendido os fundamentos da série de Fourier poderão apreciar esta análise com maior facilidade [33–37].

A localização dos nodos para cada harmônico será feita impondo-se, na equação (5), $u_n(x_{n,m}, t) = 0$, para qualquer instante t, ou seja, para $u_{A,n} \neq 0$, será obrigatório $sen(n\pi \cdot x_{n,m}/L) = 0$ e, portanto,

$$x_{n,m} = \frac{(2m-1)}{2n} \cdot L \quad (0 < m \leq n) \qquad (6)$$

lembrando-se que n e m são números naturais diferentes de zero, n indica o harmônico, havendo n nós para o $n - ésimo$ harmônico. Na Figura 4 representam-se as funções $u_n(x)/u_{A,n} = sen(n\pi \cdot \frac{x}{L})$, para os quatro primeiros harmônicos, mostrando-se a localização dos nodos. Observe-se que a representação não é um esboço qualitativo da onda estacionária.

3. Atividade Experimental

Atividade que aqui se apresenta demanda, essencialmente, um rolo de fita crepe, uma trena, um paquímetro, uma balança, uma serra para corte de metais, um martelo para tanger longitudinalmente um dos extremos da haste e um telefone celular onde se instale um aplicativo que indique o nível de intensidade sonora em função da

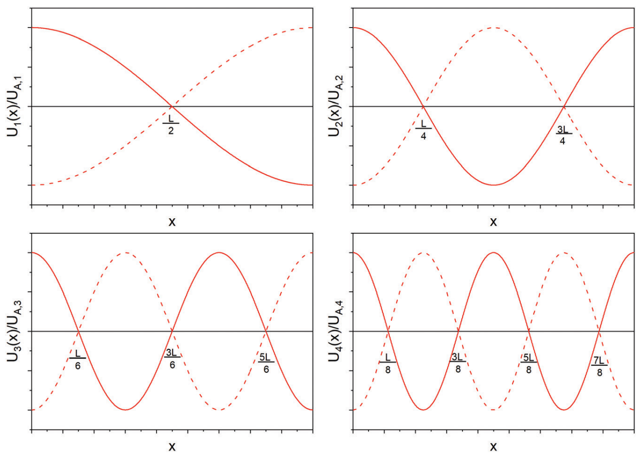


Figura 4: Representação das funções $u_n(x,t)/u_{A,n}$, indicando, para os quatro primeiros harmônicos, a localização dos nós da onda extensional estacionária que se estabelece na haste.

frequência. O alumínio e o aço foram escolhidos para estudo porque são os mais empregados estruturalmente, além de serem bastante acessíveis e de baixo custo. Inclusive, do ponto de vista de transmissão de energia elétrica, os cabos de alumínio com alma de aço [38] são a melhor opção em termos de custo de material estrutural e perda de energia por efeito Joule. O telefone utilizado foi um modelo da LENOVO com versão Android 5.5.1, 8 core, 1.5GHz, com o aplicativo gratuito *Spectroid*. Observou-se que o nível de intensidade sonora muda para cada harmônico e para cada tipo de haste, dependendo da secção transversal, do comprimento e do material. A força com a qual se tangem as hastes também causa variação da intensidade sonora, e este é um parâmetro de difícil controle, mas não é relevante para o desenvolvimento desta atividade [15, 39]. A escolha do aplicativo *Spectroid* foi feita porque já havia sido empregado e avaliado em trabalho anterior [15], mostrando-se suficientemente preciso e confiável para a proposta do presente trabalho, apresentando manuseio bastante simples e intuitivo. A leitura da frequência de ressonância, parâmetro essencial para a atividade, surge automaticamente na tela do dispositivo.

Para o cálculo da densidade, tomam-se as hastes, medem-se os respectivos comprimentos (L), as massas (m) e os diâmetros (d), para as hastes com perfil circular, ou as arestas (l), para aquelas com o perfil quadrado. Em cada ensaio, os nós foram previamente localizados e demarcados com auxílio da fita crepe, seguindo as previsões ilustradas na Figura 4. Ao contrário das oscilações transversais, que exigem rigoroso cuidado com o local por onde são pinçadas, as extensionais são ligeiramente mais complacentes (Figura 5). Isto se deve ao fato de as ondas transversais serem rapidamente atenuadas quando não se segura a haste precisamente sobre o nó e que os ventres das ondas estacionárias extensionais, quando comparados àqueles presentes nas transversais, não são facilmente perceptíveis pelo tato.

 DOI: https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2022-0076

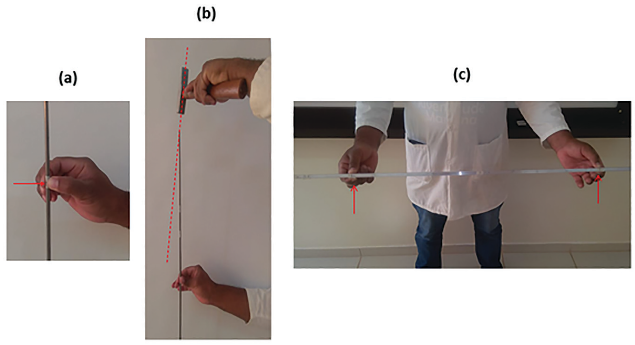


Figura 5: (a) À esquerda, uma haste é suspensa pelo local onde se prevê a localização do nó. (b) No centro, está inadequada a direção do golpe martelo em relação ao eixo a haste. (c) À direita, a haste continua ressoando estando segura por dois nós simultaneamente.

Objetivando-se detectar um harmônico específico, se segura a haste pelo local onde se previu a presença do nó, Figura 5(a). Com um martelo bate-se em um dos seus extremos, com direção normal à secção transversal da haste, procurando gerar um pulso ao longo do eixo. A orientação espacial da haste não é relevante, mas segurá-la verticalmente, mostrou-se ergonomicamente de manuseio mais simples. Na Figura 5(b) representa-se um golpe mal desferido. Cerca de um segundo após tanger-se a haste, é possível ouvir o som gerado no ar devido ao harmônico presente no metal, desde que tenha sido corretamente pinçada no ponto onde se previu estar o nó correspondente, Figura 5(a). O professor poderá ilustrar a presença de mais um nó, por exemplo no segundo harmônico, mostrando que a haste continua ressoando quando estiver segura por dois nós simultaneamente, Figura 5(c). O microfone do telefone celular deverá estar a uma distância inferior a 4,0 cm de um dos extremos da haste que ressoa para que se tenha uma boa leitura do pico de intensidade sonora.

Na Figura 6, mostram-se duas imagens da tela do smartphone apresentando os picos do nível de intensidade sonora no instante em que a haste ressoa. Estes se referem, respectivamente, ao primeiro e ao quarto harmônico estabelecidos na amostra de alumínio de comprimento $L = (1198,0 \pm 0,5)\ mm$. Todas as hastes de alumínio usadas nos ensaios tinham a mesma secção transversal quadrada com aresta $l = (9,55 \pm 0,08)\ mm$ e densidade $\rho_{Al} = (2,68 \pm 0,02)\ g/cm^3$. A densidade calculada para as hastes de aço foi $\rho_{aço} = (7,81 \pm 0,07)\ g/cm^3$, e todas apresentavam secção circular. Nas Tabelas 1 e 2 são apresentadas as frequências dos harmônicos obtidos nas hastes de alumínio e aço.

O primeiro e o segundo harmônicos gerados na menor haste de alumínio, $L = 447,0\ mm$, foram difíceis de serem ouvidos e de serem detectados pelo *Spectroid* por apresentarem baixa intensidade. Observe-se na tabela 1 que não há dados para $n > 2$ referentes a esta haste. O terceiro harmônico, próximo a 16,8 kHz, seria ouvido por pouquíssimas pessoas por ser muito alto. Harmônicos

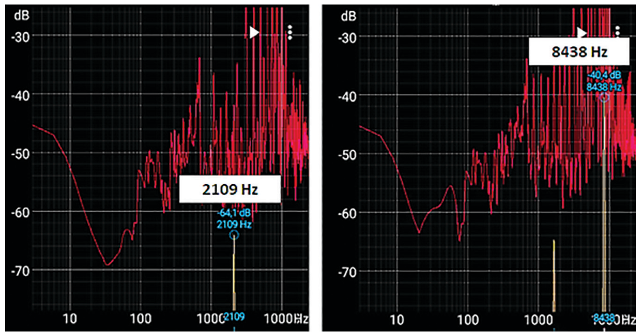


Figura 6: Imagens da tela do smartphone com o aplicativo *Spectroid* onde se observam os picos no nível de intensidade sonora, caracterizando a presença de harmônicos.

Tabela 1: Frequências dos harmônicos para diversas hastes de alumínio de secção transversal quadrada, com aresta $l = (9,55 \pm 0,08)\ mm$.

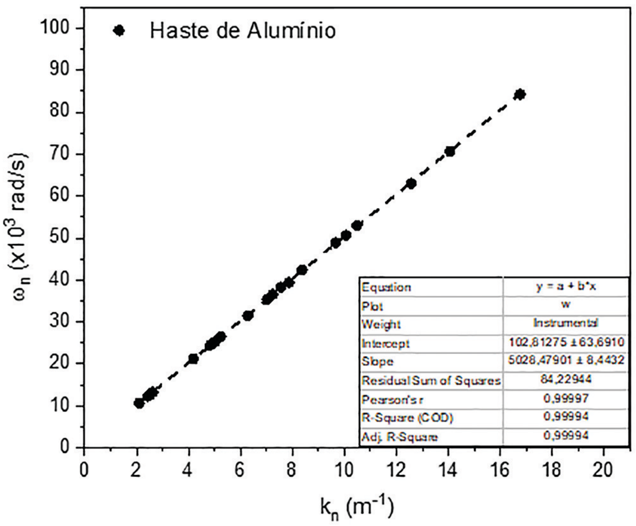
L (±0,5 mm)	Harmônicos	Frequência (Hz)
1500,5	1, 2, 3, 4	1688, 3375, 5016, 6750
1300,0	1, 2, 3, 4	1945, 3891, 5812, 7781
1249,0	1, 2, 3, 4	2016, 4031, 6094, 8062
1198,0	1, 2, 3, 4	2109, 4219, 6281, 8438
750,0	1, 2, 3, 4	3375, 6750, 10031, 13406
447,0	1, 2	5625, 11250

Tabela 2: Frequências dos harmônicos para diversas hastes de aço, todas com secção transversal circular.

L (±0,5 mm)	Diâmetro (± 0,6 mm)	Harmônicos	Frequência (Hz)
500,0	12,7	1, 2, 3	5203, 10406, 15469
400,0	12,7	1, 2	6469, 12938
1082,5	25,4	1, 2, 3, 4	2484, 4969, 7406, 9938
1572,0	6,4	1, 2, 3	1641, 3281, 4922

de ordem superior estariam no espectro ultrassônico, inaudível para os seres humanos [40], de modo que não se recomenda utilizarem-se hastes de alumínio cujo comprimento seja inferior a 750 mm. Na Tabela 2, para a haste comprimento $L = 1082,5\ mm$, também foi bastante difícil a obtenção da leitura das frequências ressonantes. A massa próxima a 4 kg dificultava o manuseio.

Com os dados das Tabelas 1 e 2 obtiveram-se os número de onda, $k_n = 2\pi/\lambda_n$, com $\lambda_n = 2L/n$, as pulsações, $\omega_n = 2\pi \cdot f_n$, e construiu-se o gráfico com os pares ordenados (ω_n, k_n), apresentados na Figura 7. O coeficiente angular da reta que se ajusta aos pontos representa a velocidade da onda extensional que percorre a haste, encontrando-se para o alumínio e para o aço os respectivos valores: $v_{ext-Al} = (5,05 \pm 0,02).10^3 m/s$ e $v_{ext\text{-}aço} = (5,21 \pm 0,08).10^3 m/s$. Estes resultados estão muito próximos dos valores encontrados na literatura: $v_{Al(ext)} = 5000\ m/s$ e $v_{aço(ext)} = 5180\ m/s$, indicando um desvio relativo de 1% para o alumínio e 0,6% para o



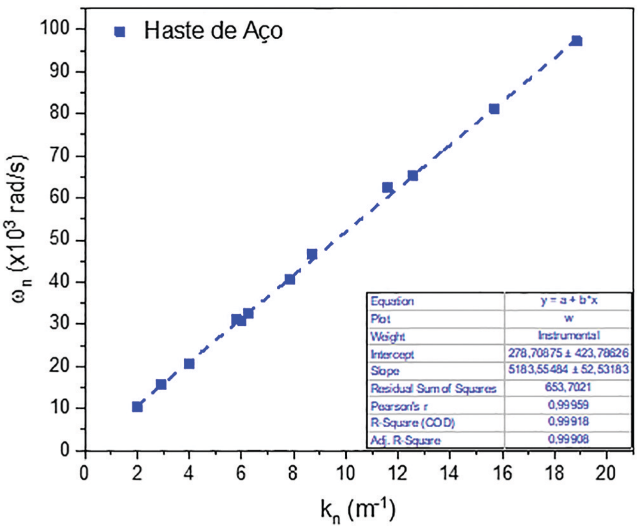


Figura 7: Pares ordenados $(k_n; \omega_n)$ para os harmônicos das hastes de alumínio (acima) e de aço (abaixo).

aço [41–45]. O valor médio do produto $r \cdot k$ foi 0,08 para o alumínio e 0,06 para o aço.

Embora a determinação do módulo de elasticidade (E) não seja o objeto de análise do estudo, a partir da relação $v_n = v_g = \sqrt{E/\rho}$, é possível obtê-lo fazendo-se $E = {v_n}^2 \cdot \rho$, $v_n = \omega_n/k_n$. Assim procedendo, empregando-se os dados das Tabelas 1 e 2, obtiveram-se os valores $E_{\text{Al}} = (68,1 \pm 0,5)\ GPa$ e $E_{\text{aço}} = (212 \pm 8)\ GPa$. Considerando-se que os respectivos valores de referência sejam $70,5\ GPa$ e $210\ GPa$, as diferenças relativas serão da ordem de 3% e 0,9% [46–48].

Na literatura, ainda se encontram outros valores para os módulos de Young: por exemplo, a ABAL estabelece que o módulo de elasticidade do alumínio esteja no intervalo $70,30\ GPa\ \leq E_{Al} \leq 70,50\ GPa$, dependendo da porcentagem de adição de outros metais na liga [46–48]. Há referências que apontam valores diferentes, inclusive dependendo do método experimental empregado para a obtenção. Em ensaios de tração (métodos destrutivos), encontra-se $E_{Al\text{-}tração} = 71,33\ GPa$, e pelo método dinâmico, seguindo-se a norma ATSM E 1876, encontra-se $E_{Al\text{-}din} = 76,10\ GPa$. No caso do aço DOMEX 700, apresentam-se os valores $E_{aço\text{-}tração} = 207,20\ GPa$, $E_{aço\text{-}oscilação} = 214,10\ GPa$ [49]. É digno de apontamento que, pelo fato de o coeficiente de elasticidade do alumínio ser quase 1/3 do coeficiente do aço, as estruturas feitas em alumínio apresentam três vantagens estruturais: baixa densidade, elevada capacidade de absorver golpes, e menores tensões geradas por variações de temperatura.

Acaso o professor adote esta prática, se for empregar apenas um metal, sugere-se o alumínio pela facilidade com o manuseio, por gerarem sons mais intensos, e por ressoarem por mais tempo em relação ao aço. Não se mediu o tempo de atenuação, mas é notoriamente perceptível que ele ocorre em valores superiores para o alumínio, ao ser comparado com o aço. As hastes de alumínio, na opinião pessoal dos experimentadores, também apresentam um timbre mais bonito. Os dados das hastes de aço permitiram que se encontrasse o valor da velocidade extensional aparentemente com maior exatidão [50], mas a dispersão dos dados do aço foram maiores que as do alumínio.

4. Conclusão

A vibração em estruturas tem sido exaustivamente analisada por engenheiros e geólogos. No curso de Física, geralmente não se aprofunda no estudo das deformações ocasionadas por oscilações, abordando-se basicamente a lei de Hooke sob o aspecto da força elástica em molas ou das ondas estacionárias em cordas e tubos sonoros. A prática proposta contribui com o preenchimento desta lacuna, particularmente na apresentação e na determinação da velocidade de grupo das ondas extensionais em hastes delgadas, empregando essencialmente a cinemática para o cálculo ($v = \omega/k = \lambda \cdot f = \lambda/T$). A análise das ondas estacionárias permite a obtenção das frequências ressonantes e dos comprimentos de onda com bastante simplicidade e boa precisão, elementos muito importantes para uma prática laboratorial.

O trabalho mostrou-se bem-sucedido em sua proposta de encontrar a velocidade de grupo das ondas extensionais que se estabeleceram nas hastes metálicas delgadas. Os valores $v_{ext\text{-}Al} = (5,05 \pm 0,02).10^3 m/s$ e $v_{ext\text{-}aço} = (5,21 \pm 0,08).10^3 m/s$ representam dados com desvio relativo de 1% para o alumínio e 0,6% para o aço em relação às referências bibliográficas. Considere-se ainda o baixo custo dos materiais e a facilidade para obtê-los, a simplicidade dos aparatos experimentais e da atividade prática, e tem-se uma proposta plenamente aplicável em qualquer instituição de ensino superior. No contexto da ondulatória, o desenvolvimento teórico pode ser explorado e apreciado por alunos com entendimento básico de cálculo. Entrementes, ensaios envolvendo oscilações de hastes metálicas permitem fundamentações teóricas para transposições ao Eletromagnetismo e à Mecânica Quântica. Embora não fosse o objetivo do trabalho, ainda foi possível o cálculo dos módulos de elasticidade para o aço e para o alumínio com desvios relativos de 3% e 0,9%, respectivamente, valores muito bons para uma prática de Física aplicada aos cursos de graduação em ciências exatas.

A determinação dos harmônicos também explora a sinestesia tátil e auditiva. O timbre agradável das hastes ressonantes, especialmente aquelas constituídas por alumínio, aliada ao emprego do telefone celular, aprovisionam potentes elementos lúdicos. Agregam-se elementos de múltiplas representações, correlacionando conceitos e gerando subsunçores imprescindíveis para uma aprendizagem significativa. Então, ponderando-se todos os pontos positivos, executar-se a prática proposta é plenamente factível e recomendável.

Referências

[1] A.E. de Santana, Rev. Bras. Ensino Física. **41**, e20180145 (2018).

[2] D.S. Landes, *Revolution in Time: Clocks and the Making of the Modern World* (Belknap Harvard, Cambridge, 1983).

[3] G.J. Whitrow, *O Tempo Na História – Concepções Do Tempo da pré-história aos nossos dias* (Zahar, Rio de Janeiro, 1993).

[4] D.C. Zanotta, E. Cappelletto e M.T. Matsuoka, Rev. Bras. Ensino Fis. **33**, 2313 (2011).

[5] M.B. Valentín, C.R. de Bom, M.P. de Albuquerque, M.P. de Albuquerque, E.L. Faria e M.D. Correia, Rev. Bras. Ensino Fis. **40**, e2503 (2018).

[6] S.E. De Souza, em: I Encontro de Pesquisa em Educação, IV Jornada de Prática de Ensino, XIII Semana de Pedagogia da UEM: "Infância e Práticas Educativas" (Maringá, 2007)

[7] A.C.P. Fernandes, L.T.S. Auler, J.A.O. Huguenin e W.F. Balthazar, Rev. Bras. Ensino Fis. **38**, e3504 (2016).

[8] C.H. Pinto e N. Aranha, Rev. Bras. Ensino Fis. **40**, e2312 (2018).

[9] K.Y. Billah e R.H. Scanlan, Am. J. Phys. **59**, 118 (1991).

[10] https://www.youtube.com/watch?v=j-zczJXSxnw, acessado em 02/08/2021.

[11] https://www.youtube.com/watch?v=3mclp9QmCGs, acessado em 25/08/2021.

[12] H. Benaroya e M. Nagurka, *Mechanical vibration: Analysis, uncertainty, and control* (CRC Press, Florida, 2009), 3 ed.

[13] https://inis.iaea.org/search/search.aspx?orig_q=RN:38094550

[14] A.E.H. Love, Nature **105**, 511 (1920).

[15] M.R. Rossini, P.S. de Camargo Filho, K.E. Yamaguti, M.J. Alves e L.H.C. Amorin, Rev. Bras. Ensino Fis. **43**, e20210194 (2021).

[16] M.H. Sadd, *Elasticity: Theory, Applications, and Numerics* (Academic Press, Burlington, 2014), 3 ed.

[17] A.F.L. Nogueira, Rev. Bras. Ensino Fis. **29**, 565 (2007).

[18] R.G.G. de Amorim, D.F. Sens, A.F.P. Barbosa e V.C. Rispoli, Rev. Bras. Ensino Física. **42**, e20200095 (2020).

[19] J. Milsom, *Field Geophysics* (John Wiley & Sons Ltd, New Jersey, 2003), 3 ed.

[20] H. Kolsky, J. Sound Vib. **1**, 88 (1964).

[21] Z.D. Jastrzebski, J. Appl. Polym. Sci. **IV**, 372 (1960).

[22] M.N. El-Shaib, *Predicting acoustic emission attenuation in solids using ray-tracing within a 3D solid model*, Tese de Doutorado, Heriot-Watt University, Edinburgh (2012).

[23] S. Foti, *Multistation Methods for Geotechnical Characterization using Surface Waves*, Tese de Doutorado, Politecnico Di Torino, Torino (2000).

[24] https://www.ofitexto.com.br/wp-content/uploads/2017/10/Geologia_Estrutural_cap15.pdf, acessado em 18/02/2022.

[25] G.A. Athanasopoulos, P.C. Pelekis e G.A. Anagnostopoulos, Soil Dyn. Earthq. Eng. **19**, 277 (2000).

[26] R.N. Thurston, J. Acoust. Soc. Am. **64**, 1 (1978).

[27] B.Yardimoglu e L. Aydin, Shock Vib. **18**, 555 (2011).

[28] H. Kolsky, J. Sound Vib. **1**, 88 (1964).

[29] S.G. Kelly, *Mechanical Vibrations: Theory and Applications* (Cengage Learning, Stamford, 2012).

[30] B. Balakumar e E.B. Magrab, *Vibrations*, (Cengage Learning, Toronto, 2009), 2 ed.

[31] R.C. Hibbeler, *Resistência dos materiais* (Pearson, São Paulo, 2012) 7 ed.

[32] R.S. dos Santos, P.S. de Camargo Filho e Z.F.D.C. Rocha, Rev. Bras. Ensino Física. **40**, e2602 (2017).

[33] H.M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica. Fluidos, Oscilações e Calor* (Blucher, São Paulo, 2014), 5 ed.

[34] W.E. Boyce, R.C. Diprima e D.B. Meade, *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno* (LTC, Rio de Janeiro, 2020), 11 ed.

[35] S.G. Krantz, *Differential Equations Demystified* (McGraw-Hill eBooks, New York, 2005).

[36] C.A. Dartora, K.Z. Nobrega, M.H. Krisam Matielli, F.K.R. de Campos e H.T. dos Santos Filho, Rev. Bras. Ensino Física. **33**, 1307 (2011).

[37] L.H. Ymai, Rev. Bras. Ensino Fis. **25**, 294 (2003).

[38] https://cdn.generalcable.com/assets/documents/LATAM Documents/Brazil Site/03 Products and Solutions/04 Transmission and Distribution/Cabo-de-Aluminio-com-Alma-de-Aco-CAA-Web.pdf?ext=.pdf, acessado em 25/08/2021.

[39] https://www.dpamicrophones.com/mic-university/how-to-read-microphone-specifications, acessado em 11/11/2020.

[40] E. Okuno, *Física para Ciências Biológicas e Biomédicas* (Harbra, São Paulo, 1982), 1 ed.

[41] J.N. Sharma, P.K. Sharma e S.K. Rana, Appl. Math. Model. **35**, 317 (2011).

[42] https://www.rfcafe.com/references/general/velocity-sound-media.htm, acessado em 02/08/2021.

[43] D.R. Lide, *Handbook of Chemistry and Physics* (CRC Press, Boca Raton, 2004), 84 ed.

[44] D.B. de Souza Jr., J.W.B. de Araújo e E.M. Kakuno, Rev. Bras. Ensino Física. **42,** e20200164 (2020).

[45] https://www.engineeringtoolbox.com/sound-speed-solids-d_713.html, acessado em 28/01/2022.

[46] R. Hessel, A.A. Freschi, E.C. Rosado e L.A. Barreiro, Rev. Bras. Ensino Física. **38**, e2309 (2016).

[47] https://abal.org.br/aluminio/caracteristicas-quimicas-e-fisicas/, acessado em 31/07/2021.

[48] https://abal.org.br/aluminio/caracteristicas-quimicas-e-fisicas/propriedades-mecanicas/#accordion5, acessado em 3/07/2021.

[49] M.H. Mezzomo e A.G. de Moraes, Rev. Mater. **25**, e12635 (2020).

[50] J. H. Vuolo, *Fundamentos da Teoria de Erros* (Blücher, São Paulo, 1996), 2 ed.