

Método das Coordenadas Atrasadas para Estimar o Maior Expoente de Lyapunov

Delay Coordinates Method for Estimating the Largest Lyapunov Exponent

Gabriel Moreno Cunha^{*1,3}, Matheus Phellipe Brasil de Souza^{1,3},
Samara Luiza de Sousa e Silva^{1,3}, Gustavo Zampier dos Santos Lima^{1,2,3}

¹Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Departamento de Física Teórica e Experimental, Natal, RN, Brasil.

²Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Escola de Ciência e Tecnologia, Natal, RN, Brasil.

³Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Laboratório de Simulação e Modelagem Neurodinâmica, Natal, RN, Brasil.

Recebido em 11 de agosto de 2023. Revisado em 18 de outubro de 2023. Aceito em 27 de outubro de 2023.

Os expoentes de Lyapunov são quantificadores largamente utilizados para caracterização de regimes em sistemas dinâmicos. Dentro desta perspectiva, a melhoria e otimização metodológica para estimar o caracterizador dinâmico do maior Expoente de Lyapunov se faz necessária. Ao longo das décadas, diversos pesquisadores da área de sistemas dinâmicos e física estatística se dedicaram a tal tarefa. Este esforço culminou no desenvolvimento do algoritmo de Wolf, que se apresentou como um método bastante robusto e preciso, mas custoso e de difícil compreensão metodológica. Com o intuito de contornar estas problemáticas, Sato, e posteriormente Rosenstein, baseando-se na conservação do espaço de fase por meio de transformadas canônicas, utilizaram o método das coordenadas atrasadas para estimar, no espaço de fase reconstruído, mediante uma série temporal, o maior Expoente de Lyapunov. Desta maneira, o presente artigo pretende apresentar e descrever as características do método das coordenadas atrasadas para a estimativa do maior Expoente de Lyapunov e avaliar a precisão do método para esta tarefa.

Palavras-chave: Expoente de Lyapunov, Coordenadas Atrasadas, Mapa Logístico.

Lyapunov exponents are widely used quantifiers for characterising regimes in dynamical systems. Within this perspective, the improvement and methodological optimisation to estimate the dynamic characteriser of the largest Lyapunov exponent is necessary. Over the decades, several researchers in the field of dynamical systems and statistical physics have dedicated themselves to this task. This effort culminated in the development of Wolf's algorithm, which was presented as a very robust and accurate method, but costly and difficult to understand methodologically. In order to overcome these problems, Sato, and later Rosenstein, based on the conservation of phase space through canonical transforms of phase space, used the method of delayed coordinates to estimate in the reconstructed phase space through a time serie of the system to estimate in a practical way the largest Lyapunov exponent. Thus, this article aims to describe the characteristics of the method of delayed coordinates for the estimation of the largest Lyapunov exponent, and to evaluate its quality for this task.

Keywords: Lyapunov Exponent, Delay Coordinates, Logistic Map.

1. Introdução

Fenômenos naturais apresentam um nível elevado de complexidade que podem ser descritos por meio de equações diferenciais, ordinárias ou parciais, ou mesmo por equações discretas (mapas) [1–5]. A complexidade desses sistemas desafia a intuição e a análise tradicional. A modelagem é crucial para descrever a natureza desses sistemas, pois podemos explorar cenários hipotéticos, testar teorias e prever comportamentos futuros, e assim, enfrentar desafios complexos, bem como para avançar na ciência e na busca de soluções para problemas do mundo real [1, 2].

A modelagem física de sistemas naturais tem sido utilizada por cientistas e contém inúmeros exemplos,

tais como o oscilador harmônico [6] (Ver Figura 1), gás ideal clássico [1, 2, 6], comunicação neural [4, 7], crescimento populacional [8–10] e dinâmica de fluidos [2, 8, 9, 11]. Os quantizadores de sistema dinâmico, tal como os expoentes de Lyapunov, desempenham um papel crucial no entendimento comportamental desses sistemas e suas alterações topológicas [3, 8, 9]. Os quantizadores permitem discretizar os estados contínuos do sistema, tornando-o mais compreensível e permitindo análises detalhadas. O maior expoente de Lyapunov (LLE, *Largest Lyapunov Exponent*.) é um dos quantizadores mais utilizados e importantes na análise de regimes dinâmicos que apresentam rotas para o caos e mede a sensibilidade às condições iniciais, indicando a estabilidade ou instabilidade do sistema [8, 9, 11]. Essa ferramenta é fundamental para identificar limites de exploração, entender a evolução do sistema ao longo

*Endereço de correspondência: gabriel.moreno.072@ufrn.edu.br

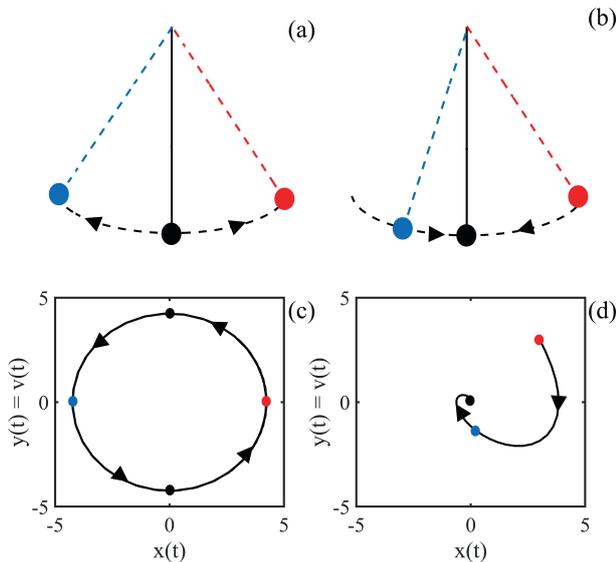


Figura 1: Espaços de fase e atratores para oscilador harmônico e oscilador amortecido. (a) Sistema físico do oscilador harmônico. Note que o pêndulo oscila entre os dois extremos (vermelho e azul) ao longo do tempo (indicado pelas setas) (b) Sistema físico do oscilador amortecido. Note que o pêndulo diminui sua amplitude de movimento (pontos vermelho e azul) com o passar do tempo (indicado pelas setas). (c) Representação do espaço de fase para o sistema em (a). Observe que os pontos de máximo estão indicados de acordo com as cores de (a), bem como os pontos de mínimo (em preto). Neste caso, o sistema oscila de forma periódica, não havendo dissipação de energia mecânica. (d) Representação do espaço de fase do sistema em (b). Note que a condição inicial (em vermelho) apresenta amplitude máxima para o sistema, que perde energia mecânica ao longo do tempo (ponto azul) até se aproximar assintoticamente da estabilidade (ponto em preto), e cessando seu movimento.

do tempo e prever comportamentos caóticos. Através dessa abordagem, podemos mapear trajetórias complexas, explorar padrões emergentes e ter intuições valiosas em sistemas dinâmicos [8, 9].

A utilização e implementação dos expoentes de Lyapunov podem apresentar desafios significativos. Primeiramente, o cálculo desses expoentes pode ser computacionalmente intensivo, especialmente em sistemas com alta dimensionalidade, tal como o método de Wolf [12]. Além disso, a obtenção precisa das trajetórias requer medições extremamente precisas, o que pode ser difícil ou impossível em sistemas reais [13, 14]. A sensibilidade aos dados iniciais pode levar a resultados incertos e pequenas variações nas condições iniciais podem levar a grandes diferenças nos resultados, tornando a interpretação complicada [8, 9, 14]. Além disso, o expoente de Lyapunov fornece informações sobre a estabilidade local, mas a análise completa da dinâmica global pode exigir métodos mais avançados e complexos [13–16]. Portanto, a utilização dos expoentes de Lyapunov requer atenção cuidadosa e consideração das limitações inerentes a essas abordagens. Neste sentido, iremos discutir os conceitos

do maior expoente de Lyapunov e apresentar o método das coordenadas atrasadas como sendo um método apurado e menos custoso computacionalmente. O método da reconstrução do espaço de fase se baseia em uma série de estudos, dentre os quais está o trabalho de Takens [17], que estabelece um critério para se reconstruir o espaço de fases de um sistema por meio de uma única série temporal. Esse método é particularmente útil em casos que não se tem conhecimento sobre as leis dinâmicas que regem o sistema, a exemplo de séries temporais obtidas experimentalmente. Esse fato, possibilita a obtenção dos caracterizadores dinâmicos do sistema, como o LLE para dados experimentais, fornecendo assim uma grande aplicabilidade ao método das coordenadas atrasadas para a reconstrução do espaço de fases e a estimativa do LLE por meio do método de Rosenstein [15].

A seção de Metodologia se propõe a apresentar rapidamente os conceitos teóricos do estudo de sistemas dinâmicos, alguns métodos de lidar com dificuldades de cálculo de grandezas características dos modelos, e apresentar o modelo que será utilizados para obter os resultados da seção subsequente. Na seção de Resultados, o modelo terá seus comportamentos descritos por meio do Espaço de Fases e maior Expoente de Lyapunov, por meio de métodos atuais de estimativa destas propriedades do modelo. Finalmente, alguns pontos sobre velocidade, precisão e acurácia dos métodos serão discutidos e o trabalho concluído na seção Discussões e Conclusão do presente trabalho.

2. Metodologia

Dado um espaço real \mathcal{R} , os estados de sistemas físicos, por exemplo, osciladores harmônicos ou amortecidos (Fig. 1(a) e (b)), são definidos dentro do subconjunto \mathcal{S} , chamado de espaço de fases do sistema [2, 3, 8–10, 13, 14] (Figuras 1(c) e (d)). O espaço de fase guarda em si certas propriedades topológicas que determinam os comportamentos dinâmicos do sistema [8, 13, 14]. Estes comportamentos, alvo das análises de sistemas dinâmicos, podem ser descritos e interpretados por meio de quantizadores, invariantes topológicos, tais como a entropia de Kolmogorov e expoentes de Lyapunov [8, 9, 14]. Desta maneira, a presente discussão terá foco no maior expoente de Lyapunov (LLE, do inglês *Largest Lyapunov Exponent*) e as diferentes formas de estimá-lo, e para tal, a próxima seção se dedicará a definir essa propriedade dinâmica.

2.1. Regimes dinâmicos e expoentes de Lyapunov

Um sistema dinâmico pode apresentar certas características ao longo do tempo. O interesse jaz na previsibilidade do modelo, que tem como pré-requisito das análises discutidas neste trabalho: o determinismo. Desta forma, existem certos padrões acessíveis no sistema, tal como tendências a longo prazo [3, 8, 9]. Um exemplo de

atrator pode ser observado no caso dos pêndulos. No caso do pêndulo harmônico (Fig. 1(a)), seu espaço de fase apresenta uma órbita periódica (Fig. 1(c)), cuja o raio depende da energia mecânica fornecida ao sistema, uma vez que o sistema conserva energia. Por outro lado, o pêndulo amortecido (Fig. 1(b)) apresenta um ponto fixo (atrator), indicando que ao observar o sistema por um longo tempo, o pêndulo deve cessar seu movimento no ponto de equilíbrio, mostrado na Figura 1(d) como o ponto em preto no centro do espaço de fases do sistema.. Nos sistemas físicos, os atratores tem estabilidades definidas. Uma forma de reconhecer a estabilidade de atratores periódicos é por meio dos autovalores característicos das vizinhanças desses atratores [3, 8, 9]. A Tabela 1 apresenta resumidamente alguns exemplos de autovalores, e as estabilidades associadas, em sistemas bidimensionais:

Os autovalores, para sistemas não-lineares, em geral são definidos no espaço tangente ao qual as soluções das equações diferenciais (ED's) do modelo estão definidas. O procedimento de linearização ao redor dos atratores é feito por meio da Jacobiana do sistema de equações diferenciais. A linearização tem como pré-suposto que existem variedades topológicas ao redor desses atratores [8, 9]. Deste ponto de vista, variedades são definidas como subespaços do espaço de fases que globalmente podem não ser Euclidianas, no sentido da métrica desse subespaço, contudo, obedecem localmente à métrica Euclidiana. Essa hipótese feita no modelo possibilita o estudo das estabilidades no espaço tangente ao espaço de fase do sistema, e, por conseguinte, a descrição do tipo de estabilidade dos atratores do espaço de fase. Alterações na natureza dos autovalores do sistema indicam mudanças no regime dinâmico observado, e, por conseguinte, apresentam bifurcações. Uma bifurcação é o ponto de alteração de um certo regime do sistema para outro regime, quando alteramos o valor de algum (alguns) do(s) parâmetro(s) do modelo estudado.

Uma forma alternativa de avaliar o comportamento dinâmico do sistema, e bastante comum em trabalhos da área de sistemas dinâmicos, é a utilização dos expoentes de Lyapunov [18, 19]. Os expoentes de Lyapunov se

baseiam na expansão ou contração do espaço de fase [8, 9]. A alteração no volume do espaço de fase do sistema tem como fundamento o teorema de Liouville [8, 20], fulcral para o entendimento do espaço de fase na formulação Hamiltoniana. O teorema de Liouville nos fornece uma base teórica para conservação de energia e o número de estados acessíveis ao sistema por meio da densidade de estados num determinado hiper-volume do espaço de fase n -dimensional [20].

Considerando que o espaço de fase do sistema pode se expandir ou contrair em diferentes direções, comportamentos dinâmicos são sensíveis à estas variações. As soluções e o campo de vetores descritivos das soluções acompanham as características topológicas presentes no espaço \mathcal{S} . Assim, o maior expoente de Lyapunov (LLE) é capaz de quantificar a taxa de variação dentro do espaço, observando o afastamento, ao longo do tempo, de duas soluções com condições iniciais infinitesimalmente próximas [2, 8, 9, 13–15]. A taxa de variação entre duas condições iniciais próximas é realizada para diferentes direções, e portanto o número de expoentes é igual ao número de dimensões do sistema de equações (que são as dimensões de \mathcal{S}). Em geral, para sistemas dinâmicos, é suficiente que apenas um dos expoentes de Lyapunov seja positivo para que exista um regime caótico. Portanto, podemos calcular o maior expoente de Lyapunov (LLE) para caracterizar o regime em que o sistema se encontra.

O cálculo do *LLE* é feito assumindo que as soluções do sistema se afastam exponencialmente como na Equação (1):

$$|\delta(t)| = |\delta(0)|e^{\lambda t}, \tag{1}$$

E para se obter o LLE, λ , do sistema dinâmico no espaço \mathcal{S} , utiliza-se:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left(\frac{|\delta(t)|}{|\delta(0)|} \right), \tag{2}$$

onde λ representa o expoente para a i -ésima direção do espaço de fase, $\delta(0)$ a distância entre duas condições iniciais próximas no espaço de fase, \mathcal{S} , e $\delta(t)$ é a distância

Tabela 1: Principais tipos de estabilidades para os pontos fixos de sistemas bidimensionais (Adaptado de [8]).

Autovalores	Sinal da parte real	Tipo de ponto fixo	Estabilidade
$\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{R}$	$\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$	nó	assintoticamente estável
	$\lambda_1, \lambda_2 < 0$	hiperbólico	
	$\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$	nó	instável
	$\lambda_1, \lambda_2 > 0$	hiperbólico	
$\lambda_1 = \lambda_2$ complexos conjugados	$\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$	sela hiperbólica	instável
	positiva	foco hiperbólico	instável
	negativa	foco hiperbólico	assintoticamente estável
	nula	centro elíptico	estável
$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$	nula	CASOS DEGENERADOS	
$\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{R}$	positiva	nó flexionado	instável
	negativa	nó flexionado	estável

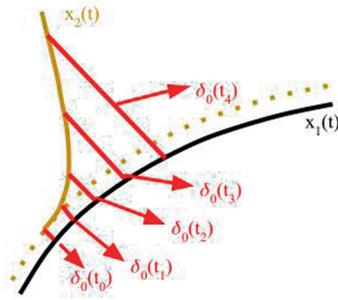


Figura 2: Divergência das condições iniciais. Para a estimativa dos expoentes de Lyapunov utilizam-se duas soluções inicialmente próximas ($x_1(t)$ em preto, com condição inicial $x_1(0)$, e $x_2(t)$ em amarelo, $x_2(0)$). Com ambas soluções se calcula a separação entre elas ao longo do tempo ($\delta_0(t)$, em vermelho), para a partir disso utilizar a equação 2.

entre as duas soluções após um tempo t , como mostrado na Figura 2.

Considerando a equação (1), nos casos em que $\lambda < 0$, as soluções convergem para uma região de \mathcal{S} , indicando a existência de um atrator periódico, com período finito [8]. Já quando $\lambda = 0$, o sistema se encontra numa característica de transição entre dois regimes com características definidas. Por outro lado, no caso em que $\lambda > 0$ é observado um afastamento das soluções, ou seja, o espaço de fase se expande em uma determinada direção de forma exponencial. Quanto mais elevado o expoente λ , mais rápida é a divergência de soluções próximas, conferindo ao sistema a característica de elevada sensibilidade às condições iniciais, propriedade observada em regime caótico. Desta maneira, um expoente positivo é interpretado como um regime caótico no sistema.

Dado um espectro de expoentes de Lyapunov do sistema de equações, o interesse no expoente de maior valor está diretamente ligado ao fato de bastar um expoente positivo para que o sistema apresente regime caótico¹. Isso se deve a característica de sensibilidade às condições iniciais, medida por meio da expansão do espaço de fase indicada pelos expoentes de Lyapunov. Ainda, caso o sistema seja periódico, o LLE será negativo, e portanto os demais expoentes do espectro são negativos, e desta maneira o sistema apresenta regularidade independente da direção que se avalie no espaço \mathcal{S} [8, 9].

2.2. Reconstrução do espaço de fase e método das coordenadas atrasadas

O LLE é considerado uma característica topológica do espaço de fase \mathcal{S} do sistema, e assim, podemos preservá-lo por meio de transformações canônicas [14, 21, 22]. Portanto, em sistemas onde as equações que regem seu

comportamento não são acessíveis, é possível estudar suas propriedades dinâmicas apenas com as séries temporais. Usualmente, além de não sabermos as equações, possivelmente não temos acesso a todas as variáveis do sistema. Nestes casos, mesmo com apenas uma variável conhecida, ou apenas uma série temporal, $h(x(t))$, é possível reconstruir o espaço de fase utilizando um tipo de transformação topológica classificada como simplectomorfismo [8, 13, 14]. Em geral, as transformações canônicas são simplectomorfismos [21, 22].

O espaço de fases é definido na base das variáveis x_n de um dado sistema físico. No processo experimental ou em simulações, as séries temporais são descritas como funções dos estados que jazem no espaço de fase, sendo amostras do espaço de fase. Desta maneira, uma série temporal guarda propriedades do próprio estado do sistema. Considerando tal característica das séries temporais, o processo de reconstrução do espaço de fase utiliza a própria série temporal acessível para reconstruir o espaço de fase transformado \mathcal{S}' .

Desta maneira, considerando a ideia de construir o espaço de fase com apenas uma série temporal do sistema estudado, para realizar a reconstrução de \mathcal{S} , utilizamos as coordenadas atrasadas por um tempo τ combinadas. A reconstrução de \mathcal{S} por meio de coordenadas atrasadas é possível se considerarmos que as coordenadas geradas neste processo são canônicas. De fato, as coordenadas atrasadas fornecem um tipo peculiar de vetores da base do espaço de fase transformado se obedecerem um conjunto de condições, que são: (i) a dimensão do novo espaço \mathcal{S}' obedece o princípio de Takens [17]; (ii) O tempo de atraso τ preserva todas as características do espaço original \mathcal{S} . Estas duas condições são suficientes para preservar todas as propriedades topológicas do espaço de fase original [8, 9, 15, 16]. Para o caso específico do LLE, segundo o trabalho de Rosenstein [15], o princípio de Takens [17] sobre dimensionalidade dá lugar a uma restrição mais flexível para o novo espaço \mathcal{S}' .

Do ponto de vista topológico, a dimensão de imersão, n , é a dimensão mínima necessária para reproduzir as características topológicas do espaço \mathcal{S} . A dimensão de imersão é estimada utilizando o critério de Takens, que garante que as propriedades, em especial o determinismo do sistema, são preservadas quando $n > 2d$, onde d é a dimensão da variedade topológica inserida no espaço de fases \mathcal{S} . Segundo o critério de Takens, essa condição é suficiente para que as soluções do sistema dinâmico definidas no espaço de fases não se cruzem, garantindo desta maneira o determinismo esperado de sistemas dinâmicos regidos por equações. Portanto, considerando o princípio de Takens [17], a dimensão de imersão pode ser adotada obedecendo o critério $n = 2d$, onde d é a dimensão de \mathcal{S} . Esse critério assegura que todas as propriedades topológicas do espaço de fase são preservadas pela transformação simplectomórfica de interesse [8, 13, 14]. Desta maneira, com uma única série temporal, $h(x(t))$, criam-se dimensões adicionais para o sistema

¹ Para sistemas contínuos, se faz necessário três dimensões ou mais, para a ocorrência do regime caótico [9].

adotando um tempo padrão de atraso, τ , o qual permite adicionar dimensões ao sistema. Este processo supõe que a dinâmica do sistema é de tal maneira que as coordenadas do espaço original, \mathcal{S} , percorrem o espaço de forma similar entre si, e podemos obter novamente as características do espaço através de uma transformação canônica (translação temporal), classificada como um tipo particular de difeomorfismo, o symplectomorfismo [8, 21, 22].

Metodologicamente, a reconstrução do espaço de fase ocorre da seguinte maneira:

1. Defina a dimensão de imersão para o sistema, n , com base no critério de Takens;
2. Estime o menor tempo de atraso, τ , de maneira que esse tempo seja maior que o período médio da série temporal $h(x)$, e respeite a taxa amostral da série;
3. Tome o conjunto de pontos $\{h(x_1(t)), h(x_1(t + \tau)), \dots, h(x_1(t + (n - 1)\tau))\}$, e adicione ele no espaço n dimensional;
4. Repita o procedimento [3.] para todos os pontos da série temporal, respeitando o limite da série temporal.

Para tal procedimento metodológico será ilustrado, na Figura (4), após uma breve apresentação do sistema do mapa logístico.

2.3. Mapa logístico

Mapas são representações de sistemas físicos com tempo discreto. Geralmente, o estado do sistema no presente depende de seu estado no passado. Desta maneira, o Mapa Logístico descreve uma determinada população, x , de forma simplificada, dependendo de um único parâmetro, r . Dada a simplicidade do mapa logístico e a riqueza de comportamentos que ele apresenta, este modelo é rotineiramente utilizado como exemplo didático de sistemas dinâmicos que apresentam regime caótico [23]. No presente trabalho o mapa logístico é utilizado para ilustrar a estimativa do LLE via reconstrução do espaço de fase. Para sistemas contínuos, veja [13–15]. O mapa logístico pode ser expresso na forma:

$$x(i + 1) = rx(i)(1 - x(i)) \tag{3}$$

$$y(i) = x(i + 1) \tag{4}$$

Na equação (3) vemos que o estado em $i + 1$ (definido como $y(i)$ na equação (4)) depende explicitamente do estado em i , quantificando o mapa logístico como um sistema a tempo discreto.

Nos casos em que $r < 3$, a população x evolui para um único valor final, estável, como exibido pela série temporal na Figura (3)(a). No ponto $r = 3$ ocorre uma bifurcação do tipo *flip* no sistema, indicando uma duplicação de período, e podemos ver que o sistema oscila entre dois valores, como exibido na Figura (3)(b). Após esse valor para o parâmetro r , novas duplicações

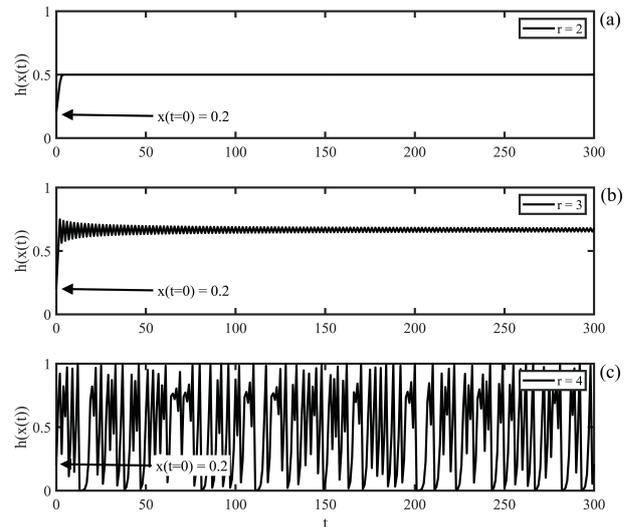


Figura 3: Séries temporais do mapa logístico. (a) Série temporal para o mapa logístico dado $r = 2$. Observe que a propriedade do atrator estável é perceptível na convergência da série temporal para um valor final ($x(t) = 0.5$) (b) Para $r = 3$ o sistema apresenta um período dois, exibindo oscilação entre dois valores após o período transiente (aproximadamente $t = 100$), indicando que o sistema passou por uma bifurcação do tipo *flip*. (c) Quando $r = 4$, o sistema entra em regime caótico, exibindo uma série temporal aleatória. Esse regime ocorre após uma cascata de bifurcações de duplicação de período (no sistema unidimensional, bifurcação tipo *flip*).

de período ocorrem numa cascata de bifurcações *flip*, e quando o parâmetro atinge o valor crítico de $r = 3.5699\dots$ observam-se órbitas não periódicas, indicando a presença do regime caótico no sistema, caracterizado pela série temporal sem uma periodicidade definida, como exibida na Figura (3)(c). Também é possível observar a existência de janelas periódicas acima do valor crítico, indicando que o regime caótico não é observado para todo valor $r > 3.5699\dots$ [8, 9].

2.3.1. Reconstrução do espaço de fase do mapa logístico

Para reconstruir o espaço de fase, a partir de uma série temporal, com o intuito de se obter o LLE, Rosenstein descreveu que é possível flexibilizar o critério de Takens [15]. Ao invés de se adotar uma dimensão $n > 2d$, como mencionado anteriormente no presente trabalho, é possível preservar essa característica topológica de \mathcal{S} utilizando uma dimensão de imersão tal que $n \geq d$, sendo a escolha corriqueira para a estimativa do LLE. Como para o mapa logístico $d = 1$, deve-se utilizar um espaço de fase imerso em um espaço de duas dimensões, $n = 2$, tal que $h(x(t + \tau))$ e $h(x(t))$ formam os vetores da base de \mathcal{S}' , que preserva a topologia de \mathcal{S} .

Definida a dimensão de imersão ($n = 2$), é necessário garantir que o tempo de atraso seja tal que as propriedades topológicas sejam preservadas. Para esta tarefa,

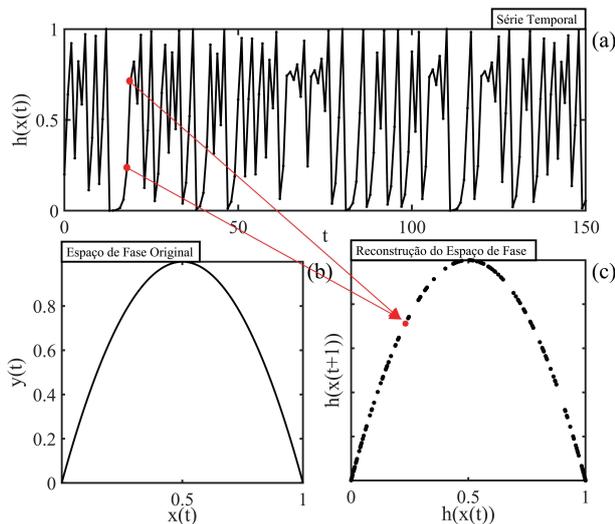


Figura 4: Reconstrução do espaço de fase do mapa logístico ($r=4$). (a) Série temporal do mapa logístico. (b) Espaço de fase original, \mathcal{S} para o sistema do mapa logístico. (c) Reconstrução do espaço de fase do mapa logístico, a partir da série temporal de (a). Os pontos vermelhos em (a) são transformados num par coordenado em \mathcal{S}' , dada a dimensão de imersão, $n = 2$, e um tempo de atraso, $\tau = 1$.

consideramos a frequência amostral da série temporal que se tem em mãos, no nosso caso a frequência amostral é igual a 1, e o tempo total mostrado é igual a 150 ver Figura (4)(a). Para sistemas discretos (mapas), é suficiente adotar $\tau = 1$, fazendo da base de \mathcal{S}' o conjunto de vetores $\{h(x(t)), h(x(t+1))\}$. Um exemplo para o procedimento da reconstrução do espaço de fase do mapa logístico é apresentado na Figura (4)(c):

A escolha de τ não é unicamente determinada, sendo assim, podendo ser adotado um tempo de atraso maior que 1 [14]. Entretanto, deve-se garantir a preservação da topologia, para que o espaço de fase possa se dobrar e manter o determinismo do sistema no regime caótico. Podemos ver na Figura (5) os espaços de fase reconstruídos para diferentes valores de atraso τ :

Pode-se perceber que escolhendo diferentes τ 's no mapa logístico, ocorre uma deformação no seu espaço de fase. Na Figura (5), quanto maior o tempo de atraso, mais deformado seu espaço \mathcal{S}' é, não garantindo a preservação das características topológicas para o sistema. Este fato corrobora a necessidade da estimativa do menor tempo de atraso (ver passo 2. na sequência metodológica) para a reconstrução do espaço de fases.

2.4. Estimativa do LLE em espaços reconstruídos

A estimativa do LLE utilizando o método da reconstrução do espaço de fase partindo de uma série temporal apresenta vantagens metodológicas. Segundo Rosenstein [15], as séries temporais podem apresentar poucos pontos, e caso a dimensão de imersão seja bem escolhida, ainda se recuperam as propriedades topológicas de \mathcal{S} ,

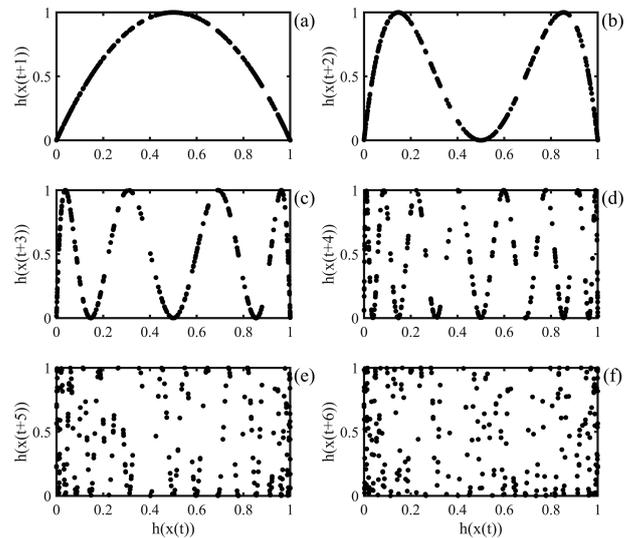


Figura 5: Reconstrução do espaço de fase para o mapa logístico. Dimensão de imersão igual a 2. Espaço de fase com: (a) $\tau = 1$. (b) $\tau = 2$. (c) $\tau = 3$. (d) $\tau = 4$. (e) $\tau = 5$. (f) $\tau = 6$.

tais como o LLE e a dimensão de correlação do sistema. Contudo, se for possível, é preferível ter séries mais longas para garantir que o sistema transita pelo espaço de fase para além do seu período transiente [8, 9, 14].

Dado um espaço reconstruído \mathcal{S}' , para estimar o LLE do sistema, adota-se uma vizinhança ϵ (circunferência verde) tão pequena quanto se queira [ver Fig.6(a)]. Tomando o primeiro ponto e a vizinhança adotada, é possível calcular a distância espacial do primeiro vizinho mais próximo do ponto de referência ($\delta_0(t_0)$). Dado que o ponto de referência e o vizinho mais próximo, ambos devem estar separados temporalmente por uma distância $\Delta t > T$, com T sendo o período médio da série temporal, obtido através da Transformada de Fourier de $h(x(t))$. Com isso, consideramos que ambos os pontos, o de referência e seu vizinho mais próximo, fazem parte de duas trajetórias distintas, tal qual às condições iniciais do espaço \mathcal{S} . Com isso, procedemos com a estimativa do LLE com base na taxa de separação entre as soluções ($\delta_0(t_0), \delta_0(t_1), \delta_0(t_2), \dots$), as quais os dois pontos pertencem ($x_1(t)$ – preto e $x_2(t)$ – amarelo). Desta forma, é possível obter a taxa de afastamento de duas soluções iniciais próximas, e calcular o LLE com base no logaritmo da distância entre as soluções que se iniciam tão próximas quanto se queira, procedimento observado na Figura 6(b).

Após realizar o cálculo do logaritmo das distâncias para o par de soluções $x(t)$ e $x_0(t)$, aplicamos o mesmo procedimento para os demais pontos subsequentes da curva $x(t)$ (linha preta nas Figuras (6)(a) e (c)). Após o cálculo do logaritmo das distâncias para cada ponto em $x(t)$ [ver Fig. 6(c)], é possível calcular a média dos logaritmos ($\bar{\delta}(t)$) das divergências das soluções do sistema [ver Fig. 6(d)]. Como as soluções divergem exponencialmente, é esperada uma saturação no distanciamento,

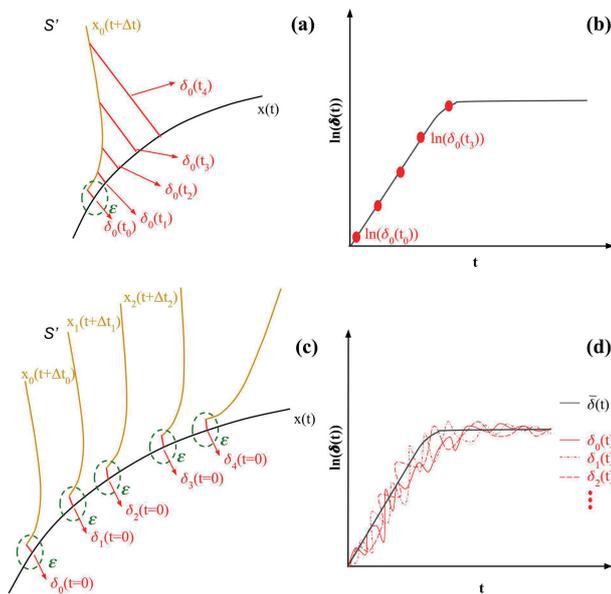


Figura 6: Divergência das soluções e Método dos atrasos temporais. (a) Dada uma vizinhança ϵ (verde), estimamos os pontos iniciais, $x(t = 0)$ e $x(t = 0 + \Delta t)$, dentro desta região verde. Estes pontos definem duas trajetórias em S' (linhas preta e amarela) que se distanciam entre si. As distâncias em cada momento $t > 0$ são calculadas ($\delta_0(t)$, em vermelho) para a etapa seguinte da estimativa. (b) Calculadas as distâncias δ_0 ao longo do tempo, é obtido o $\ln(\delta_0(t))$, e utiliza-se a visualização por meio do gráfico do logaritmo da distância ao longo do tempo. (c) Após a estimativa feita em (a), avançamos para o próximo ponto na trajetória $x(t)$, e procedemos como feito em (a) estimando as distâncias de afastamento. (d) Obtidas as distâncias para cada ponto da trajetória $x(t)$, calculam-se os logaritmos e aplicamos uma média nos logaritmos das distâncias (em preto). Com a média, estimamos o LLE como a inclinação da região do gráfico antes de um determinado tempo t em que o logaritmo satura.

$\delta_i(t)$, que tende a infinito após um longo tempo. Desta maneira, estima-se o LLE através da inclinação da média do logaritmo das distâncias antes da saturação observada na Figura (6(d)).

Desta maneira, podemos resumir o método da estimativa do LLE em espaços reconstruídos da seguinte maneira:

1. Proceda com a reconstrução do espaço de fases;
2. Defina a vizinhança, tão pequena quanto se queira, ϵ , para o sistema;
3. Calcule, por meio da Transformada de Fourier, o período médio da série temporal, \bar{T} ;
4. Para um ponto $x_0(t)$, calcule o primeiro vizinho, $x(t + \Delta t)$, tal que a distância, $\delta_0(t = 0)$ entre eles seja menor que a vizinhança ϵ , e a distância temporal entre os dois pontos seja maior que o período médio da série temporal ($\Delta t > \bar{T}$).
5. Evolua o ponto $x_0(t)$ e seu primeiro vizinho, calculando a cada passo a distância entre eles, $\delta_0(t)$;

6. Realize os passos [4.] e [5.] para os pontos da série temporal ($x_i(t)$, com $i > 0$);
7. Estime a média das distâncias obtidas após o passo [6.], e esboce ela em um gráfico mono-log (com a escala logarítmica no eixo y);
8. Estime a inclinação do gráfico feito em [7.], através de regressão linear, até o ponto de saturação da curva obtida (a saturação ocorre no ponto em que a média das distâncias deixa de ser reta no gráfico de [7.]);
9. A inclinação obtida em [8.] é o Maior Exponente de Lyapunov para o sistema.

Na próxima seção é estimado o LLE do mapa logístico, por meio do espaço de fase reconstruído, utilizando a função *lyapunovExponent* da plataforma MATLAB (v.2019b) [24, 25].

2.4.1. Estimativa do LLE no mapa logístico

Na presente seção são expostos os resultados obtidos para as estimativas do LLE para o mapa Logístico. Os resultados serão comparados com referências da literatura e discutidos na seção posterior do trabalho.

Para o mapa logístico, foram performados quatro valores específicos do parâmetro de controle, r , e estes foram comparados com valores obtidos na literatura de sistemas dinâmicos [8, 9, 26]. A comparação se deu assumindo que os valores presentes na literatura são valores padrões, e com os resultados obtidos pelo método das coordenadas atrasadas foram feitas estimativas de erros relativos, em porcentagem, utilizando os padrões. Desta forma, foi obtida a Tabela 2 com os resultados.

Posteriormente, foi feita a estimativa do LLE para valores de r entre 0 e 4, e gerado o gráfico presente na Figura (7).

Tabela 2: LLE para o mapa Logístico.

r	λ_{lit}	λ_{rec}	erro (%)
1	0	-0.2630	26.3
3	0	-0.0136	1.3
4	0.693	0.6942	0.2

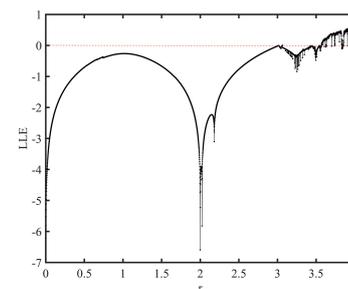


Figura 7: LLE para valores do parâmetro r do mapa logístico. Observe que o gráfico cruza o eixo $y = 0$ para valores de $r > 3.5$, indicando que a partir deste valor deve existir regime caótico no sistema.

Todos os resultados para o mapa logístico foram obtidos para os parâmetros $\text{passo} = 1$, $\tau = 1$, $n = 2$. É perceptível na Figura (7), que existem regiões em que o LLE é menor que zero, para $r < 3.6$, mas apresentando valores nulos nos casos de $r = 3$ e $r = 3.5$, indicando transições de regime dinâmico. Para os valores de $r > 3.6$, observamos que o LLE é positivo, indicando a presença de regime caótico, igualmente observado para o LLE da literatura [8, 9].

3. Discussões e Conclusão

O principal objetivo do presente trabalho é apresentar o método da estimativa do LLE no espaço de fase reconstruído através das coordenadas atrasadas. Desta maneira, pelo resultado mostrado na Figura (7), a ferramenta apresentada foi capaz de estimar, com boa precisão e sem muito custo computacional, valores de LLE próximos dos descritos na literatura [8, 9]. A menor precisão observada no LLE estimado, foi para o valor de $r = 1$. Isso ocorre em virtude do fenômeno de transição de regimes em sistemas dinâmicos. Ou seja, quando o parâmetro do sistema é escolhido para um valor que está entre duas topologias no espaço de fase, a série temporal do sistema pode exibir comportamentos complexos, transitórios e sensíveis, e pequenas variações no valor do parâmetro podem levar a grandes mudanças no comportamento do sistema. Além disso, quando o parâmetro do sistema atravessa a região transiente, podem emergir novas estruturas ou padrões no espaço de fase (mudança de topologia) que não estavam presentes nas regiões adjacentes. Consequentemente, ocorre um aumento no período transiente, ou seja, a série temporal do sistema pode exibir um comportamento transitório que não se estabiliza rapidamente [2, 8–10].

Esse aumento no período transiente impacta diretamente o processo de reconstrução do espaço de fase, resultando em um aumento no erro estimado. O aumento do período transiente no sistema é observado principalmente no caso da bifurcação transcítica que o mapa logístico sofre [8, 9], em que os pontos fixos coalescem no valor $r = 1$, e trocam a estabilidade entre si. A precisão do método, portanto, é sensível ao tipo de bifurcação exibida pelo sistema, como podemos observar ao comparar o erro cometido pelo método nos valores $r = 1$ e $r = 3$, que são bifurcações distintas e impactam na duração do período transiente, bem como na formação das bacias de atração para as estabilidades. Estas alterações topológicas distintas são o motivo na diferença de precisão apresentada pelo método nas duas bifurcações específicas (em $r = 1$ o sistema sofre uma bifurcação transcítica, caracterizada pela troca de estabilidade entre os pontos fixos do sistema, e em $r = 3$ temos uma bifurcação tipo *flip*, em que ocorre uma duplicação de período, em que não há coalescência dos pontos fixos, mas sim a criação de duas estabilidades no espaço de fase). Contudo, a qualidade do método

é exibida para os demais valores, como discutido em outros trabalhos [13–15]. Ainda, é notável que apesar do erro em torno de 26% apresentado na tabela 2 para $r = 1$, o método é vantajoso quando comparado com o método de Wolf, principalmente no que se refere a simplicidade de implementação [13–16]. Vale ressaltar a qualidade da estimativa do LLE através do espaço de fase reconstruído, principalmente para a estimativa em regime caótico, como mostrado através da estimativa do erro (pequeno) quando $r = 4$ para o mapa logístico. Para a implementação em sistemas contínuos, recomendamos as referências [13–15].

Tradicionalmente, o método para a estimativa do LLE é performado pelo algoritmo de Wolf [8, 12]. Entretanto, o método de Wolf é custoso do ponto de vista computacional e teoricamente complexo, tendo como necessidade uma reortonormalização e uma decomposição QR [8, 12, 15, 27]. O método das coordenadas atrasadas, utiliza a reconstrução do espaço de fase pelo método de Takens [8, 17], para aplicar um difeomorfismo específico (simplectomorfismo, ou transformação canônica) [22] para recuperar, mediante séries temporais, os invariantes topológicos de \mathcal{S} , e especificamente o LLE. Por conseguinte, o algoritmo de Sato [16], para a estimativa por atraso temporais, foi melhorado e generalizado por Rosenstein [15]. Este, por sua vez, diminui a complexidade da estimativa ao adaptar a necessidade de uma dimensão de imersão menor que a necessária pelo critério de Takens [15]. Uma dimensão de imersão menor que a imposta pelo critério de Takens, é possível para características topológicas que não tem necessidade para a completa reconstrução do espaço de fase, ou seja, nem toda propriedade do sistema está ligada a descrição completa da topologia de \mathcal{S} .

Por fim, mesmo apresentando dispersão nos valores dos erros estimados, em relação aos valores esperados conforme a literatura, a simplicidade e baixo custo computacional são fatores que favorecem a utilização do método das coordenadas atrasadas para estimar o LLE de sistemas físicos. O método da reconstrução do espaço de fase pelas coordenadas atrasadas apresenta, inclusive, grande aplicabilidade, a exemplo de sistemas de equações diferenciais que descrevem dinâmicas neuronais [4, 7], por meio das séries temporais do tipo evento [14, 19], indicando novas perspectivas em sistemas biológicos.

Agradecimentos

GMC é bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq – Brasil) número (#140895/2021-3). MPBS é bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES – Brasil) número (#88887.704426/2022-00). SLSS é bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq – Brasil) número (#129231/2022-3). GZDL é bolsista

do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq – Brazil) número (#309440/2022-0).

Referências

- [1] P. Bak, *How nature works: the science of self-organized criticality* (Springer Science & Business Media, Berlin, 2013).
- [2] H.M. Nussenzveig, *Complexidade e caos* (UFRJ/COPEA, Rio de Janeiro, 1999).
- [3] E.M. Izhikevich, *Dynamical systems in neuroscience* (MIT press, Cambridge, 2007).
- [4] G.M. Cunha, G. Corso, J.G.V. Miranda e G.Z.S. Lima, *Scientific Reports* **12**, 1629 (2022).
- [5] A.L. Hodgkin e A.F. Huxley, *The Journal of Physiology* **117**, 500 (1952).
- [6] H.M. Nussenzveig, *Curso de física básica: Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor* (Editora Blucher, São Paulo, 2015), v. 2.
- [7] G.M. Cunha, G. Corso, M.M. Miranda e G.Z.S. Lima, *Scientific Reports* **13**, 11974 (2023).
- [8] N. Fiedler-Ferrara e C.P.C. Prado, *Caos: uma introdução* (Editora Blucher, São Paulo, 1994).
- [9] K.T. Alligood, T.D. Sauer e J.A. Yorke, *Chaos: an introduction to dynamical systems* (Springer, Berlin, 1996).
- [10] S.T. Thornton e J.B. Marion, *Dinâmica clássica de partículas e sistemas* (Cengage Learning, São Paulo, 2011).
- [11] E.N. Lorenz, *Journal of Atmospheric Sciences* **20**, 130 (1963).
- [12] A. Wolf, J.B. Swift, H.L. Swinney e J.A. Vastano, *Physica D: Nonlinear Phenomena* **16**, 285 (1985).
- [13] H. Kantz e T. Schreiber, *Nonlinear time series analysis* (Cambridge University Press, Cambridge, 2004).
- [14] G. Datsis e U. Parlitz, *Nonlinear Dynamics: A Concise Introduction Interlaced with Code* (Springer Nature, Berlin, 2022).
- [15] M.T. Rosenstein, J.J. Collins e C.J. De Luca, *Physica D: Nonlinear Phenomena* **65**, 117 (1993).
- [16] S. Sato, M. Sano e Y. Sawada, *Progress of Theoretical Physics* **77**, 1 (1987).
- [17] F. Takens, em: *Dynamical Systems and Turbulence, Warwick 1980: proceedings of a symposium held at the University of Warwick 1979/80* (Berlin, 2006).
- [18] G.S. Bortolotto, *Sincronização, informação e criticidade em sistemas neuronais eficientes*. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis (2018).
- [19] B. Boaretto, R. Budzinski, T. Prado, J. Kurths e S. Lopes, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **28**, 106304 (2018).
- [20] S.R. Salinas, *Introdução a física estatística* (Edusp, São Paulo, 1997), v. 9.
- [21] N.A. Lemos, *Mecânica analítica* (Editora Livraria da Física, São Paulo, 2007).
- [22] H. Goldstein, C. Poole e J. Safko, *Classical mechanics*, (Pearson, Edimburgo, 2001).
- [23] R.M. May, *Nature* **261**, 459 (1976).
- [24] MathWorks, *lyapunovExponent – Characterize the rate of separation of infinitesimally close trajectories*, disponível em: <<https://www.mathworks.com/help/predmaint/ref/lyapunovexponent.html>>, acessado em: 08/08/2023.
- [25] MathWorks, *Predictive Maintenance Toolbox – Design and test condition monitoring and predictive maintenance algorithms*, disponível em: <<https://www.mathworks.com/help/predmaint/ref/phases-pacereconstruction.html>>, acessado em: 08/08/2023.
- [26] V.S. Freitas e E. Macau, *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics* **4**, 010089 (2016).
- [27] K. Geist, U. Parlitz e W. Lauterborn, *Progress of theoretical physics* **83**, 875 (1990).