

Canhão de Gauss

Gauss cannon

Lucas Santos de Alcântara¹, Edvaldo Alves de Souza^{*1}

¹Universidade Federal de Sergipe, Departamento de Física, São Cristóvão, SE, Brasil.

Recebido em 09 de junho de 2022. Revisado em 09 de janeiro de 2023. Aceito em 10 de janeiro de 2023.

O experimento do canhão de Gauss é notável por sua transversalidade dentro de conceitos relevantes para a Física. Ele é simples, rápido, de fácil execução e com um rico conteúdo de mecânica e magnetismo para ser observado. Possui uma construção acessível, feita com algumas esferas de aço e ímãs posicionados linearmente sobre um trilho. Considerando essas vantagens, este trabalho apresenta um estudo teórico e experimental do canhão de Gauss para a aplicação em sala de aula utilizando os conceitos de magnetismo, cinemática e princípios da conservação da energia e conservação do momento linear. O desenvolvimento foi feito baseado em modelos educacionais da conservação da energia do canhão de Gauss e ampliado para apresentar um modelo que utilizasse o princípio de conservação do momento linear e a energia potencial do ímã. O resultado final foi a obtenção de uma equação para a velocidade de ejeção, que pôde ser testada experimentalmente, e que se mostrou capaz de abarcar mais configurações das esferas e ímãs que as dos trabalhos observados na literatura, inclusive com a obtenção de valores de velocidade mais precisos.

Palavras-chave: Ensino de Física, canhão de Gauss, canhão magnético, conservação de momento linear, experimento.

The magnetic cannon (Gauss cannon or Gauss rifle) experiment is notable for its cross-disciplinary nature within relevant physics concepts. It is simple, quick, and easy to execute, with a rich supply of mechanics and magnetism to be observed. It has an easy-to-use structure made of a few steel spheres positioned linearly on a rail. Taking these advantages into account, this paper presents a theoretical and experimental study of the Gauss cannon for classroom application using magnetism, kinematics, and energy and momentum conservation principles. The development was based on educational models of energy conservation in the Gauss cannon and was expanded to present a model that uses the principles of linear energy conservation and the potential energy of the magnets. The end result was the acquisition of an ejection velocity equation that could be tested experimentally. It was capable of accommodating more sphere configurations than the two works observed in the literature, and furthermore, it presents a more accurate values.

Keywords: Physics teaching, magnetic gun, gauss gun, momentum conservation, experiment.

1. Introdução

O canhão de Gauss é um aparato experimental que correlaciona diferentes áreas da Física e que possibilita ao estudante associar um experimento didático simples (executado em sala) a rifles e lançadores de foguetes não explosivos (artefatos tecnológicos estratégicos da indústria bélica) baseados em aceleração magnética. Entre esses, há de se considerar a diferença na forma como o campo magnético é produzido. Nos lançadores de foguetes, por exemplo, eletroímãs são responsáveis pela aceleração magnética, e são chamados de canhão eletromagnético, enquanto que experimentos didáticos utilizam ímãs para o mesmo fim. O primeiro canhão eletromagnético operacional foi desenvolvido e patenteado pelo físico norueguês Kristian Birkeland com o intuito de criar armas de fogo [1]. O objetivo dele era construí-lo para que lançasse projéteis a velocidade de 600 m/s, porém alcançou apenas a velocidade de 100 m/s e

alcance horizontal de 1 km de distância. Uma arma mais moderna e sofisticada baseada nos mesmos princípios da arma de Birkeland foi desenvolvido pelos EUA. Esse “canhão” conhecido como *railgun*, dispara projéteis (de características não identificadas) a velocidades de Mach 7 (8643,6 km/h) [2].

Em sua montagem mais simples o canhão de Gauss tem uma esfera metálica acelerada utilizando interação magnética, que em seguida transfere energia e momento para outras esferas. O grande desafio para projetos profissionais e didáticos é equacionar todas as variáveis envolvidas no experimento. Devido à complexidade, não é comum encontrar um modelo didático sofisticado (com todas as variáveis possíveis do sistema) que associem os dados experimentais e teóricos. O funcionamento do canhão de Gauss pode instigar a curiosidade dos alunos devido a rapidez do fenômeno e aos diversos caminhos mentais percorridos por eles para tentar explicar o experimento. Além disso, fenômenos observados no canhão, tais como transferência de energia, uso da força, realização de trabalho e colisão entre objetos estão presentes

* Endereço de correspondência: edvaldo.alves@academico.ufs.br

diariamente no cotidiano desses alunos em diferentes sistemas (até mesmo em jogos virtuais), o que ajuda a instigar a imaginação e seus conhecimentos na tentativa de entendê-los. Destaca-se, por exemplo, questões de como um projétil é lançado, o motivo do aumento da velocidade, o enfraquecimento do campo magnético com o aumento da distância e a conservação da energia mecânica. As discussões de conteúdo em uma abordagem Teórico/Experimental são uma oportunidade para consolidação de conceitos e para melhorar a percepção de conhecimento entrelaçados. Este trabalho tem como objetivo apresentar a construção e discussão, teórica e experimental, do canhão de Gauss através de um modelo baseado no princípio da conservação de momento linear. O canhão é colocado como um aparato de grande valor didático para a aprendizagem de conceitos de interação do campo magnético de um ímã, conservação de energia e conservação do momento linear.

2. Conservação de Energia e Campo Magnético

O canhão de Gauss pode ser feito de forma bem simples utilizando um trilho, esferas metálicas idênticas e ímãs esféricos. A Figura 1 apresenta uma ilustração das etapas de funcionamento de um rifle do canhão de Gauss dividida em quatro estágios, mostrando os processos de aceleração, choque e ejeção.

Estágio I

Estado inicial do canhão de Gauss. Três esferas metálicas são colocadas em contato com o ímã. A quarta esfera (pivô) é posicionada separadamente a uma distância

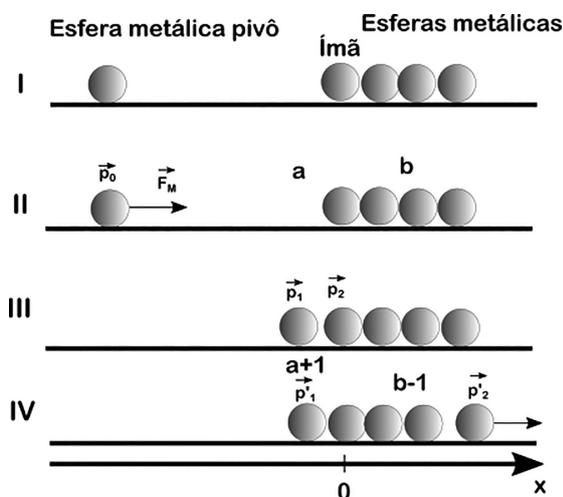


Figura 1: Estágios do funcionamento do Canhão de Gauss. (I) Posicionamento da esfera metálica pivô a 3 cm do ímã. (II) Atração da esfera pivô pelo ímã. (III) Choque e transferência de energia e momento. (IV) Ejeção da esfera metálica. O conjunto apresentado nesta figura é denominado de rifle, em que $a = 0$ e $b = 3$ no estágio 1.

d (aproximadamente 3 cm do ímã), em que o campo magnético seja suficiente para iniciar o movimento. Acima dessa distância limite a velocidade inicial é zero devido a inércia de repouso.

Estágio II

Ao movimentar-se em direção ao ímã, a esfera pivô será atraída por uma força magnética cada vez mais intensa, sendo acelerada ao longo do caminho, conseqüentemente, e sua energia cinética aumenta proporcionalmente com o quadrado da sua velocidade instantânea.

Estágio III

Quando a esfera pivô colidir com o ímã, haverá transferência de energia e momento dela para o ímã, e em seguida transferência para as sucessivas esferas adjacentes. O resultado observado será a transferência de energia e momento, adquirida na aceleração magnética pela esfera pivô, para a última esfera adjacente.

Estágio IV

A última esfera metálica adjacente é acelerada, e separa-se das demais. A ejeção (devido a aceleração da esfera) finaliza a operação do canhão de Gauss, em que a última esfera do trilho irá adquirir energia cinética devido a aceleração magnética experimentada pela esfera pivô.

Para o caso de haver mais rifles, a esfera ejetada se tornará uma nova esfera pivô, a qual seguirá a trajetória em direção a um segundo conjunto de ímã e esferas (segundo rifle), até entrar no alcance do campo magnético do ímã, acelerar e chocar-se com elas. Com o novo choque a última esfera metálica desse segundo rifle será ejetada e poderá seguir para um terceiro rifle.

G. Magkos et al. [3] e Arsène Chemin et al. [4] estudaram o campo magnético e a conservação de energia em um canhão de Gauss. G. Magkos et al. [3] focaram o estudo na análise do comportamento do campo magnético em função da distância entre o ímã e a esfera pivô, utilizando a Equação (1),

$$\vec{B}(d) = (\mu_0 \cdot \vec{m} / 2\pi d^3), \quad (1)$$

em que:

- \vec{m} : momento magnético do ímã;
- d : distância entre os centros das esferas;
- \vec{B} : campo magnético;
- μ_0 : permeabilidade magnética no vácuo.

O estudo da conservação de energia foi feito particularmente por Arsène Chemin et al. [4]. A solução deles fez a consideração de que a esfera pivô teria uma energia cinética inicial nula, e que não haveria nenhuma interação do ímã com a bola ejetada na região das b esferas (Ver Figura 1). O estudo será mostrado a seguir. Por se tratar de dinâmica unidimensional a notação vetorial não será usada.

No sistema do canhão de Gauss a principal força é a magnética, e Arsène Chemin et al. [4] em seu desenvolvimento consideraram o seu comportamento como conservativo, portanto, a energia total antes e depois do impacto obedece ao princípio da conservação da energia. Levando em conta apenas a energia mecânica, a conservação pode ser descrita da seguinte forma:

$$K + U = K_0 + U_0, \tag{2}$$

em que $K_0 + U_0$ é a energia cinética e potencial antes da colisão, e $K + U$ é a energia cinética e potencial depois da colisão.

A energia cinética é dada por $K = Mv^2/2$, sendo M a massa da esfera e v sua velocidade, e a energia potencial será a energia potencial magnética $U = -m_{esfera} \cdot B$, em que m_{esfera} é o momento magnético induzido na esfera e B o campo magnético do ímã. A energia cinética depende da existência do campo magnético para que a força magnética acelere a esfera pivô. Por definição a força magnética pode ser expressa da seguinte forma:

$$F_M(d) = -\nabla[m_{esfera}(d)B(d)]. \tag{3}$$

Em seu trabalho Arsène Chemin et al. [4] consideram o momento de dipolo induzido magnético da esfera de raio R com permeabilidade magnética relativa μ_r inserida em um campo magnético constante e homogêneo B_0 ,

$$m_{esfera} = \frac{4\pi R^3}{3\mu_0} \frac{3(\mu_r - 1)}{(\mu_r + 2)} B_0. \tag{4}$$

Para aplicar o campo magnético na Equação (3), o qual é o mesmo já definido pela Equação (1), os autores consideraram, por simplicidade, que o campo magnético do ímã é constante ao longo do corpo da esfera pivô, de modo que B_0 pode ser substituído por $B(d)$ na equação (4). Daí, a força magnética fica

$$F_M(d) \approx_{\mu_r \gg 1} \frac{6\mu_0 R^3 m^2}{\pi d^7}. \tag{5}$$

A Equação (5) representa a força magnética exercida sobre a esfera pivô em função da distância d até o ímã.

A conversão da energia potencial magnética em energia cinética pode ser definida de acordo com a seguinte equação da mecânica clássica:

$$W = \Delta K = -\Delta U. \tag{6}$$

Utilizando o conceito de trabalho e a variação da energia potencial magnética, obtém-se pelas equações (5) e (6),

$$W = \int_{-\infty}^{-2(a+1)R} F_M(x) dx = -U_a. \tag{7}$$

A Equação (7) descreve o trabalho que ocorre devido ao surgimento da força magnética sobre a esfera pivô que está sendo acelerada. Os limites aplicados são para um

ímã esférico de raio R com a esferas à esquerda, cada esfera tendo também raio R . O trabalho total realizado sobre a esfera será definido conforme o valor da energia potencial magnética.

Resolvendo a Equação (7) a energia potencial magnética terá a seguinte apresentação:

$$U_a = \frac{\mu_0 R^3 m^2}{\pi [-2(a+1)R]^6}, \tag{8}$$

e para $a = 0$,

$$U_0 = \frac{\mu_0 m^2}{64\pi R^3}. \tag{9}$$

Segundo a Equação (8) a energia potencial magnética é inversamente proporcional ao número de esferas à esquerda do ímã. Esse resultado não leva em consideração o número de esferas do lado direito do ímã, pois essa interação foi desconsiderada pelos autores. Arsène Chemin et al. [4] levam em conta as b 's esferas utilizando o modelo das colisões do pêndulo de Newton como analogia ao canhão de Gauss. Eles utilizaram o conceito de rendimento da transferência de energia cinética da esfera pivô para a esfera ejetada,

$$\eta = \frac{K_{ejetada}}{K_{impacto}}, \tag{10}$$

e experimentalmente determinaram que o rendimento para diversas esferas alinhadas pode ser descrito como:

$$\eta = \eta_0 - 0,024(b + a + 1), \tag{11}$$

em que $\eta_0 = 0,95$.

O resultado da Equação (11) demonstra que as variáveis dissipativas estão presentes nas colisões. Consequentemente, o rendimento do canhão de Gauss não será 100%. Como esperado pela Equação (8) a energia potencial será reduzida conforme o número de esferas a aumenta. Além disso, a equação (11) também mostra que a dissipação de energia será maior quanto maior for o número de esferas a e b alinhadas.

A Equação (2), quando interpretadas observando as equações (8) e (10), se apresenta como:

$$K = \eta(K_0 + U_a) - U_{b-1}. \tag{12}$$

Ou seja, parte da energia inicial ($K_0 + U_a$) será transferida para esfera ejetada, e essa, no instante em que estiver perdendo contato também “sentirá” uma atração com sentido oposto à da velocidade (U_{b-1}). Essa atração pode reduzir a velocidade da esfera ejetada ou deixá-la em repouso caso a energia inicial seja menor que a energia potencial magnética a esquerda da esfera ejetada.

A Equação (12) foi elaborada para um canhão de Gauss composto por apenas um rifle, $N = 1$. Para N rifles de Gauss a velocidade final do primeiro rifle será a velocidade inicial para o segundo rifle, e assim

sucessivamente. A equação que determina a energia para N rifles iguais é dada por:

$$K_N = \eta^N K_0 + U_a \sum_{i=1}^N \eta^i - U_{b-1} \sum_{i=0}^{N-1} \eta^i$$

$$= \eta^N K_0 + \left(\frac{1 - \eta^N}{1 - \eta} \right) (\eta U_a - U_{b-1}). \quad (13)$$

De acordo com a Equação (13) conforme aumenta o número de rifles no canhão de Gauss maior será a velocidade, entretanto a cada rifle acrescentado, diminui-se o ganho de velocidade da esfera em relação a um rifle anterior.

Para encontrar a energia cinética máxima para infinitos rifles Arsène Chemin et al. [4] utilizaram a Equação (13), e consideraram a energia cinética inicial igual a zero. E como $0 < \eta < 1$ e N tende a valores muito altos, obtém-se:

$$K_{max} = \frac{\eta U_a - U_{b-1}}{1 - \eta}. \quad (14)$$

A Equação (14) permite encontrar a energia cinética máxima para infinitos rifles. Portanto, existe um limite de ganho de velocidade para o número de rifles utilizado no experimento.

Para aplicação nos dados experimentais de Arsène Chemin et al. [4] usaram um canhão de Gauss com apenas um rifle (Equação 12), em uma velocidade inicial igual a zero, e sem considerar a existência da energia potencial magnética U_{b-1} . Assim, os dados deles se basearam em,

$$K = \eta U_a. \quad (15)$$

3. Materiais e Métodos

O experimento do canhão de Gauss foi montado a partir de um perfil de alumínio de box de banheiro. Foi aproveitada uma esquadria em desuso, que foi cortada horizontalmente para que as bolinhas pudessem deslizar com pouco atrito e ser vistas com mais facilidade. O perfil foi apoiado sobre uma base de madeira. A Figura 2 apresenta o resultado dos cortes feitos, e como ele se ajusta muito bem para o deslocamento das bolinhas.

O experimento podia contar com até 3 rifles ($N = 3$), em que cada rifle está em uma configuração tal qual como apresentada no estágio I da Figura 1 ($a = 0$ e $b = 3$). Isto implica um uso de até 10 esferas de aço e



Figura 2: Cortes do perfil de alumínio. Canhão de Gauss montado com três rifles composto por um ímã e três esferas.

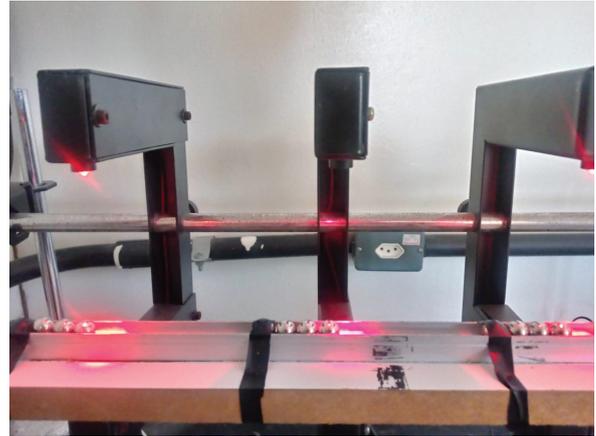


Figura 3: Canhão de Gauss com três rifles e sensores posicionados. Sensor de velocidade e trilho de alumínio com corte na base.

Tabela 1: Características técnicas do ímã. Esses parâmetros foram utilizados nos cálculos teóricos.

Variável	Valores	Referência
Campo	1,17 T *superfície do ímã	Site: Supermagnete
Raio	4,36 mm	Medida
Massa	3,57 g	Medida
Grade magnética do ímã	N35	Especificação de compra

três ímãs (Ver Figura 2). Foram utilizados ímãs esféricos de neodímio composto de NdFeB e com revestimento em níquel.

Para as medidas de velocidade das bolinhas foram usados sensores fotoelétricos acoplados a hastes rígida em forma de U. Para permitir a passagem do feixe de luz, o perfil e a madeira foram cortados. Os sensores foram lidos por um cronômetro microcontrolado que fornecia diretamente o valor da velocidade. A Figura 3 mostra o sistema completamente montado para 3 rifles com o uso de três sensores. Cada um desses sensores foi colocado logo após a última esfera do rifle. Na Figura 3 também pode ser notado o uso de fitas isolantes prendendo o ímã. Essa fixação tinha como objetivo evitar a movimentação do ímã, e das respectivas esferas acopladas, após o choque da esfera pivô. O deslocamento poderia diminuir a energia transferida, além de atrapalhar a medida feita pelo sensor. O início do movimento era feito aproximando a esfera pivô lentamente até que ela se fosse atraída pelo ímã. As características técnicas dos ímãs e esfera foram tiradas do site do fornecedor e são dados na Tabela 1. A massa foi aferida.

4. Resultados e Discussão

As equações desenvolvidas por A. Chemin et al. [4] para o canhão de Gauss foram utilizadas por S. Becker et al. [5] em experimentos, com uma configuração em que $a = 0$ e $b = 2$, e apresentaram erros experimentais abaixo

de 8%. Um valor bem interessante para um experimento simples, com teorias da Física bem entrelaçadas, e por não ter levado em consideração a energia potencial atrativa para a bola ejetada (U_{b-1}). Com o intuito de ampliar esse estudo, este trabalho traz duas novidades para a discussão teórica/experimental do Canhão de Gauss didático. Uma diz respeito a explorar um modelo usando a conservação do momento linear, de forma a complementar o estudo feito com a conservação de energia. A outra é levar em conta a energia potencial magnética U_{b-1} (Equação 12) ignorado pelos trabalhos apresentados. Fez-se um estudo teórico da influência da energia potencial magnética U_{b-1} tanto para o sistema contendo um rifle quanto para o sistema contendo vários rifles, visto que a análise de Becker [5] foi feita apenas um rifle ($a = 0$ e $b = 2$). A importância da energia U_{b-1} é a capacidade de causar desaceleração na esfera ejetada, visto que no exato momento em que perde contato com o ímã, ela ainda está exposta a força magnética de atração dele.

4.1. Conservação do momento linear no canhão de Gauss

O momento linear é uma grandeza essencial para o estudo da transferência de movimento em sistemas com dois ou mais corpos onde ocorrem colisões ou quaisquer formas de interação entre os corpos [6]. Essa grandeza é representada pelo produto de sua massa por sua velocidade [7]:

$$p = Mv \tag{16}$$

A conservação do momento linear em um sistema isolado acontece quando duas ou mais partículas interagem ou colidem entre si e o somatório dos momentos de todas as partículas é constante [8]. No caso do canhão de Gauss a conservação acontece por meio da colisão no instante III da Figura 1, que leva a

$$p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2 = \text{constante}, \tag{17}$$

em que,

- p'_1 – Momento da esfera pivô depois do choque
- p'_2 – Momento da esfera ejetada depois do choque
- p_1 – Momento da esfera pivô antes do choque
- p_2 – Momento da esfera ejetada antes do choque

O momento linear p_2 e p'_1 são nulos em relação a origem por não apresentar estado de movimento (observar Figura 1). Em uma colisão sem perda de quantidade de movimento a Equação (17) se resume a:

$$p_1 = p'_2. \tag{18}$$

Considerando o número de esferas no rifle como a soma dos números de esferas a direita e a esquerda do ímã, e baseando-se no modelo do pêndulo de Newton, da

mesma forma que fez A. Chemin et al. [4], foi utilizado o rendimento já descrito na Equação (12),

$$\eta = \eta_0 - 0,024(a + b + 1),$$

em que $\eta_0 = 0,95$. O rendimento é uma função da quantidade de esferas a e b . Mais detalhes para a obtenção deste rendimento podem ser obtidos nos trabalhos de Herrmann e Seitz [9] e Hutzler et al. [10].

O caso a ser analisado aqui é para o princípio da conservação do momento linear. Então manipulando algebricamente a Equação (10) temos que

$$K_{ejetada} = \eta K_{impacto}. \tag{19}$$

Sendo $K = \frac{p^2}{2M}$, então:

$$\frac{p_{ejetada}^2}{2M_1} = \eta \frac{p_{impacto}^2}{2M_2}. \tag{20}$$

Para esferas com a mesma massa,

$$p_{ejetada} = \eta^{1/2} p_{impacto}. \tag{21}$$

Ou,

$$p_{ejetada} = \eta' p_{impacto}. \tag{22}$$

Logo, podemos definir que o rendimento para a conservação do momento linear é dado por um η' , tal que:

$$\eta' = \eta^{1/2} = [\eta_0 - 0,024(a + b + 1)]^{1/2}, \tag{23}$$

e que de acordo com as Equações (22) e (23) fica,

$$p'_2 = [\eta_0 - 0,024(a + b + 1)]^{1/2} p_1. \tag{24}$$

Ela também pode ser reescrita como,

$$v'_2 = [\eta_0 - 0,024(a + b + 1)]^{1/2} v_1, \tag{25}$$

em que v'_2 é a velocidade de ejeção da esfera metálica.

Seja agora, a Equação (12),

$$\frac{1}{2} M v^2 = \eta(K_0 + U_a) - U_{b-1},$$

resolvendo para a velocidade de ejeção da esfera,

$$v'_2 = \left[\left(\frac{2}{M} \right) [\eta(K_0 + U_a) - U_{b-1}] \right]^{1/2}. \tag{26}$$

Por simplicidade pode-se considerar a velocidade inicial igual a zero, portanto,

$$v'_2 = \left[\left(\frac{2}{M} \right) [\eta(U_a) - U_{b-1}] \right]^{1/2}. \tag{27}$$

Reescrevendo a Equação (27) com as equações (8) e (23), e considerando que as duas representam velocidade de ejeção, obtém-se:

$$v'_2 = \left\{ \left(\frac{2}{M} \right) [\eta_0 - 0,024(a + b + 1)] \left[\frac{\mu_0 R^3 m^2}{\pi[-2(a + 1)R]^6} - \frac{2}{M} U_{b-1} \right] \right\}^{1/2}. \tag{28}$$

Utilizamos a origem do eixo x da Figura 1 como ponto de referência para encontrar U_{b-1} por analogia e estabelecer os intervalos de integração. Da Equação (5) e (7),

$$U_{b-1} = \int_{2bR}^{\infty} F_M(x)dx = \frac{\mu_0 R^3 m^2}{\pi(2bR)^6}. \tag{29}$$

O limite da equação foi definido considerando a distância do centro do ímã ao centro da esfera metálica ejetada.

Adicionando a Equação (29) em (28),

$$v'_2 = \left\{ \left(\frac{2}{M} \right) [\eta_0 - 0,024(a+b+1)] \left[\frac{\mu_0 R^3 m^2}{\pi[-2(a+1)R]^6} \right] - \frac{2}{M} \frac{\mu_0 R^3 m^2}{\pi(2bR)^6} \right\}^{1/2}, \tag{30}$$

e utilizando a aproximação definida por A. Chemin et al. [4] para o momento de dipolo magnético por unidade de volume,

$$m \sim \frac{4\pi R^3}{3\mu_0} B_r, \tag{31}$$

obtem-se a velocidade de ejeção da partícula como,

$$v'_2 \sim \left\{ \left[\frac{\eta_0 - 0,024(a+b+1)}{(a+1)^6} - \frac{1}{b^6} \right] \frac{2\pi \cdot R^3 B_r^2}{36\mu_0 M} \right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{32}$$

em que:

- M : massa da esfera ejetada;
- R : O raio da esfera;
- B_r : Campo magnético na superfície do ímã;
- μ_0 : Permeabilidade magnética do vácuo.

O termo $\left\{ \frac{2\pi \cdot R^3 B_r^2}{36\mu_0 M} \right\}^{\frac{1}{2}}$ tem dimensão de velocidade. Logo, pode ser considerado que o novo rendimento γ , apenas para um rifle após a inserção da U_{b-1} , e a velocidade de impacto podem ser expressos por:

$$\gamma = \left[\frac{\eta_0 - 0,024(a+b+1)}{(a+1)^6} - \frac{1}{b^6} \right]^{1/2}, \tag{33}$$

e

$$v_1 \sim \left(\frac{2\pi \cdot R^3 B_r^2}{36\mu_0 M} \right)^{1/2}, \tag{34}$$

sendo:

$$v'_2 = \gamma v_1. \tag{35}$$

Também foi obtida a equação para um sistema de infinitos rifles, o qual bastou adicionar o termo $\left(\frac{1}{1-\eta} \right)^{\frac{1}{2}}$ na equação geral (32), assim

$$v'_{max, ejeção} \sim \left\{ \left[\frac{\eta_0 - 0,024(a+b+1)}{(a+1)^6} - \frac{1}{b^6} \right] \times \frac{2\pi \cdot R^3 B_r^2}{36\mu_0 M(1-\eta)} \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{36}$$

Tabela 2: Configurações do canhão de Gauss. O primeiro termo da coluna configuração significa número de rifles, o segundo é o número de esferas a esquerda (a) e o terceiro o número de esferas a direita (b).

Configuração	N (Rifles)	a	b
101	1	0	1
102	1	0	2
103	1	0	3
104	1	0	2
105	1	0	3
106	1	0	2
107	1	0	3
111	1	1	1
112	1	1	2
202	2	0	2
203	2	0	3
302	3	0	2
303	3	0	3

Tabela 3: Casos de não ejeção da esfera.

Configuração	Velocidade final de ejeção (m/s)
101	Não houve ejeção
111	Não houve ejeção
112	Não houve ejeção

A Equação (32) conseguiu estabelecer um novo rendimento para o sistema com a inclusão da energia potencial magnética U_{b-1} . Ela foi testada experimentalmente em diferentes configurações do Canhão de Gauss, indicadas na Tabela 2, para verificação da velocidade final da esfera ejetada. As Tabelas de 3 a 7 mostram os resultados. Na Tabela 3 vê-se os valores para o caso de um rifle em que não houve ejeção da esfera, caso $(a,b) = (0,1); (1,1)$ e $(1,2)$.

Um cálculo da velocidade teórica usando a Equação (32) para os casos da Tabela 3 dará como resultado um valor irracional para o rendimento. Nesse caso a energia cinética não é suficiente para fazer com que a partícula seja ejetada devido a atração exercida pela energia potencial magnética U_{b-1} ser oposta a esse movimento. Os casos da Tabela 3 possuem uma característica em comum: $b - a \leq 1$. Não se pode afirmar se essa é uma condição geral, ou apenas para esse sistema em particular, visto a necessidade de testes em conjuntos de ímãs e esferas com outras características, mas analisando a Equação (32) é possível dizer que esse comportamento pode se repetir para esse tipo de configuração, pois para $b \leq a + 1$ deveríamos ter $\eta_0 - 0,024(a+b+1) > 1$ para que γ fosse real, ou seja, para que houvesse ejeção do rifle. Portanto, é um resultado que pode ser previsto pela Equação (32) devido ao processo de adição da energia potencial magnética U_{b-1} no sistema.

Considerando a discussão acima, as tentativas seguintes fizeram alterações apenas de N e b, o valor de a foi ajustado para zero. A Tabela 4 mostra resultados para o caso em que apenas um rifle foi usado. As medidas foram repetidas cinco vezes e uma média foi obtida.

Tabela 4: Sistemas com $N = 1$, $a = 0$ e $b = 2, 3, 4, 5, 6$ e 7 .

Configuração	Velocidade média (m/s)	Velocidade teórica de ejeção (m/s)	Erro relativo (%)
102	$1,99 \pm 0,09$	1,95	2,0
103	$2,25 \pm 0,05$	1,94	13,8
104	$2,05 \pm 0,03$	1,91	6,8
105	$2,03 \pm 0,06$	1,89	6,9
106	$2,08 \pm 0,05$	1,86	10,6
107	$1,83 \pm 0,16$	1,83	0,0

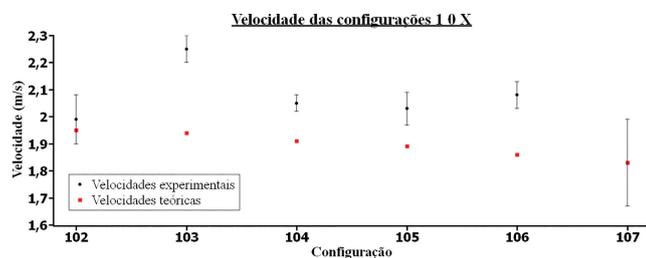


Figura 4: Velocidade média em função das configurações do sistema do canhão de Gauss.

Um gráfico da velocidade média de ejeção versus configurações, feito usando os dados da Tabela 4, é apresentado na Figura 4. O resultado expressa a velocidade da esfera ejetada à medida que a interação do ímã diminui sobre ela (aumento do valor b). O que se observa é que há um aumento da velocidade da configuração 103, em relação a 102, seguida de uma diminuição nas configurações seguintes (embora com flutuações, ver barras de incerteza) até 107, quando a velocidade cai abaixo de qualquer outro valor registrado. Uma das funções do ímã, em relação as esferas do lado b , é manter uma ligação coesa entre as esferas, e isso contribui com uma maior eficiência de transferência de energia. Quando alguma esfera fica fracamente atraída há uma perda parcial de contato, e a colisão tende a ficar mais inelástica, fazendo com que ela adquira menor velocidade do que poderia ter. Foi justamente o que aconteceu com a posição 107 que se tornou uma posição cuja a interação do ímã já não atraía tanto a última esfera quanto as anteriores e a velocidade caiu, apresentando, inclusive, uma das maiores flutuações nas medidas realizadas, com uma incerteza de 0,16 m/s. Esse limite foi confirmado ao tentar uma oitava esferas, com as colisões ela nem sequer obteve energia necessária para deslocar-se ao longo do trilho por ter perdido contato devido a fraca atração magnética. O resultado evidencia a importância da atração para a transferência de energia. Por outro lado, uma atração do ímã muito forte impede que a esfera se acelere (isso é nítido em uma configuração 101, em que nenhuma bolinha é ejetada). Na configuração 102 ainda há uma forte influência do ímã sobre a esfera é ejetada, e por isso uma considerável perda de energia devido a energia potencial do ímã é observada. O pico de velocidade para o sistema nas configurações (1 0 X) é observado em 103.

Tabela 5: Variação do número de rifles para $a = 0$ e $b = 3$.

Configuração	Velocidade final de ejeção (m/s)	Incremento ($\Delta_{Nab+1} - \Delta_{Nab}$) (m/s)
103	$2,25 \pm 0,05$	-
203	$2,98 \pm 0,04$	0,73
303	$3,1 \pm 0,1$	0,12

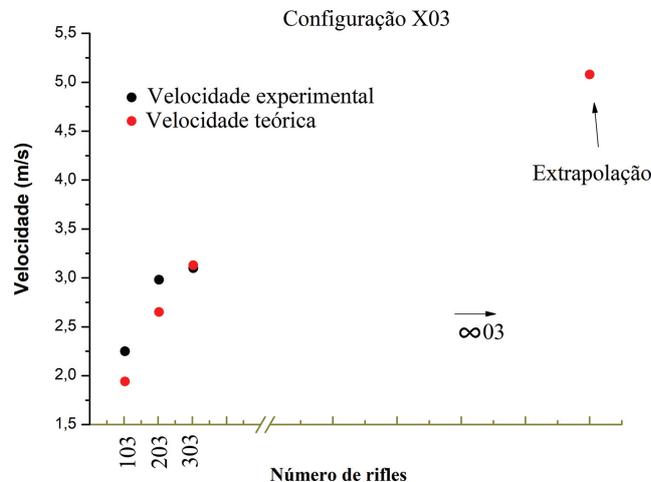


Figura 5: Velocidade de ejeção conforme o aumento do número de rifles. A extrapolção é a velocidade limite teórica para infinitos rifles de Gauss com sistema $a = 0$ e $b = 3$.

Essa velocidade mostra que se alcançou uma distância em que a energia potencial U do ímã é minimizada, e ao mesmo tempo a coesão magnética permite uma alta transferência de energia. Essa maximização para o valor da velocidade na configuração 103 também foi observado no trabalho de Arsène Chemin et al. [4], mesmo sem considerar a interação da energia potencial do ímã com a esfera ejetada.

Chama-se atenção de que os resultados também demonstram que não há um perfeito acoplamento entre o modelo teórico e o experimental, fato que poderia estar relacionado a simplificação do uso do campo magnético constante do ímã ao longo da esfera pivô, perdas de energia por vibração, atrito das esferas com o trilho e mesmo interações devido a indução magnética nas esferas adjacentes.

A Tabela 5 mostra os resultados levando em consideração a variação do número de rifles. A configuração 103 é repetida para ajudar na comparação.

Um gráfico da Tabela 5 foi feito para apresentar a evolução da velocidade com o aumento de rifles (Figura 5). Um ponto extra foi acrescentado, o qual está relacionado a velocidade de infinitos rifles ($\infty 03$), mostrado na Tabela 7. Seria uma extrapolção apenas para ilustrar como deveria se dar o desenvolvimento dos dados conforme o número de rifles aumenta. O gráfico também mostra que os acréscimos são cada vez menores conforme aumenta o número de rifles, fato observado já no trabalho de Arsène Chemin et al. [4]. A origem para essa perda está na mudança de velocidade inicial durante

cada passagem pelos diversos rifles, o que afeta o ganho de velocidade. Se para o primeiro rifle a velocidade inicial da esfera pivô era nula, para o segundo rifle a velocidade inicial será igual a velocidade de ejeção da esfera do primeiro rifle. Leve em conta também que a energia magnética não será a única responsável pela energia que será transferida para ejetar a esfera do segundo rifle, haverá a energia cinética transferida pelo primeiro rifle. Entretanto, há um valor limite de aceleração que o ímã pode fornecer as diversas esferas pivô, o que leva a um valor limite de energia mecânica, e conseqüentemente de velocidade, que o sistema pode adquirir. Os ganhos de energia devido a interação magnética, a cada rifle, são fundamentais para que velocidades bem acima da inicial sejam atingidas, mas a importância da aceleração magnética vai diminuindo à medida que os rifles aumentam dado a aceleração devido aos choques. O rendimento cai com a passagem dos rifles, pois a energia de impacto aumenta cada vez mais. Com um número muito grande de rifles praticamente os choques nos últimos rifles serão apenas transferências de energia mecânica entre eles, pois a ganho de velocidade possibilitado pela aceleração magnética será pequeno em comparação com a transferência de momento. Um experimento interessante de se fazer é lançar a esfera pivô com diferentes velocidades iniciais. Poderia ser percebido que uma maior velocidade da esfera pivô não irá garantir uma maior velocidade da esfera ejetada. O rendimento para N rifles pode funcionar como um parâmetro para ter uma relação de custo benefício. Será que vale a pena o acréscimo de mais rifles para um ganho que tão pequeno?

A Tabela 6 representa a mesma ideia da Tabela 5, mas com a diferença do valor b ser igual a 2.

A Equação (32) foi utilizada para encontrar os valores de todas as configurações obtidas experimentalmente neste trabalho. A comparação com os resultados experimentais foi feita utilizando as informações da Tabela 1, e os resultados são apresentados na Tabela 7. Os valores teóricos para os rifles infinitos utilizaram a Equação (36).

Os erros relativos mostram que foi alcançado bom resultado para o cálculo da velocidade de ejeção da esfera com o uso da conservação de momento, todos abaixo de 20%. Comparando os resultados da velocidade teórica versus experimental obtidos por G. Magkos et al. [3] (configurações $N = 1$, $a = 0$, $b = 2, 3, 4$ e 5) com os dados obtidos neste trabalho, observa-se claramente uma melhoria significativa na acurácia (Ver Figura 4), sugere-se comparar com os dados do trabalho do G. Magkos et al. [3]). Acredita-se que a introdução do termo energia potencial para os cálculos da conservação de momento

Tabela 6: Variação do número de rifles para $a = 0$ e $b = 2$.

Configuração	Velocidade final de ejeção (m/s)	Incremento ($\Delta_{Nab+1} - \Delta_{Nab}$) (m/s)
202	$2,90 \pm 0,03$	
302	$3,11 \pm 0,07$	0,21

Tabela 7: Resultados experimentais e teóricos.

Configuração	Velocidade teórica de ejeção (m/s)	Velocidade média experimental de ejeção (m/s)	Erro relativo (%)
102	1,95	1,99	1,8
103	1,94	2,25	15,7
202	2,72	2,90	6,3
203	2,65	2,98	12,4
302	3,24	3,11	4,0
303	3,13	3,11	0,6
$\infty 0 2$	5,59	–	–
$\infty 0 3$	5,08	–	–

tenha contribuído para essa melhora. Para ilustrar isso, considere a configuração 102. Pelo gráfico da Figura 4, e a discussão que foi feita sobre ele, a posição $b = 2$ é a que sofreria a maior influência da energia potencial, e que inclusive impede uma maior aceleração da esfera. Quando esse termo foi levado em conta um erro relativo de apenas 1,8% foi obtido. O que indica um excelente resultado, melhor do que os obtidos na literatura. Ou seja, não há como obter bons resultados em uma região U_{b-1} que esteja sob forte influência do campo magnético do ímã sem levar em conta o termo da energia potencial. Esse é um dos pontos altos deste trabalho. Ressalta-se, como reforço, uma comparação com resultado do trabalho de Becker et al. [5] para a configuração $a = 0$ e $b = 2$, o qual apresentou erro percentual relativo de 7,4%. Portanto, a Equação (32) aceita muito bem os outros parâmetros indicados, assim, apresentando-se como uma fórmula mais precisa para o cálculo de velocidade de um canhão de Gauss didático.

5. Conclusões

O canhão de Gauss trata-se de um experimento simples e educativo, feito com um trilho, ímãs, esferas metálicas e sensores de velocidade, mas que, por simplicidade, poderiam facilmente ser substituídos por um software de análises de vídeo, como Tracker. O experimento em sala de aula pode permitir discussões bastante relevantes para os estudos de mecânica e magnetismo, visto que possibilita entrelaçar conceitos de campo e interação magnética, energia magnética e mecânica e as conservações de energia e momento. Para ampliar as discussões teórico/experimentais da literatura, uma equação de velocidade de ejeção da esfera foi obtida alicerçada nos conceitos da conservação de momento linear do sistema, até então não explorado. A base para esta abordagem foram modelos da literatura, que desenvolveram fórmulas com o mesmo objetivo, utilizando os conceitos da conservação de energia. O resultado do trabalho se destaca por levar em conta as dissipações de energia para ejeção da esfera provocada pela interação dela com o ímã (Energia potencial magnética), fato ignorado por todos outros trabalhos. Os resultados demonstraram a

importância dessa abordagem, principalmente quando a interação magnética do ímã com a esfera a ser ejetada foi bastante relevante. Isso ocorre, por exemplo, quando há apenas um ímã e uma esfera metálica separando a esfera pivô da esfera a ser ejetada. Em um experimento como esse, os valores de velocidade teórica e experimentais apresentaram um erro relativo médio de 6,8%. A equação também permitiu a obtenção de valores de várias outras configurações do canhão de Gauss, que também foram testadas experimentalmente, e mostraram a capacidade da equação em prever a velocidade de ejeção do canhão de Gauss.

Agradecimentos

Aos revisores do artigo, cujos comentários e as sugestões auxiliaram na revisão deste trabalho.

Referências

- [1] A. Egeland, IEEE Transactions on Plasma Science **17**, 73 (1989).
- [2] R. Bicalho, *Marinha Norte Americana testa com sucesso uma railgun (catapulta eletromagnética)*, disponível em: <https://www1.tecnoblog.net/meiobit/13686/marinha-norte-americana-testa-com-sucesso-uma-railgun-catapu/>, acessado em 04/03/2022.
- [3] G. Magkos, B. Gabritchidze e K. Patatoukos, Emergent Scientist **1**, 4 (2017).
- [4] A. Chemin, P. Besserve, A. Caussarieu, N. Taberlet e Nicolas Plihon, American Journal of Physics **85**, 495 (2017).
- [5] S. Becker, M. Thees e J. Kuhn, The Physics Teacher **56**, 484 (2018).
- [6] R. Helerbrock, *O que é momento linear?*, disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/o-que-e/fisica/o-que-e-momento-linear>, acessado em 25/07/2020.
- [7] H.M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica 1: Mecânica* (Edgard Blücher, São Paulo, 2002), 4 ed.
- [8] M. Alonso e E.J. Finn, *Física - Um Curso Universitário - Mecânica* (Edgard Blücher, São Paulo, 1972), v.1, 2 ed.
- [9] F. Herrmann e M. Seitz, Am. J. Phys. **50**, 977 (1982).
- [10] S. Hutzler, G. Delaney, D. Weaire e F. MacLeod, Am. J. Phys. **72**, 1508 (2004).