

Referenciais inerciais e não inerciais: Uma abordagem cinemática por meio de videoanálise

Inertial and non-inertial frames of reference: A kinematic approach through video analysis

Maria Lúcia de Moraes Costa^{*1}, Ricardo Robinson Campomanes²,
Leonardo Albuquerque Heidemann³

¹Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Faculdade de Física, 66075-110, Belém, PA, Brasil.

²Universidade Federal de Mato Grosso, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências da Natureza e Matemática, Sinop, MT, Brasil.

³Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Física, Departamento de Física, 91501-970, Porto Alegre, RS, Brasil.

Recebido em 04 de outubro de 2023. Revisado em 09 de dezembro de 2023. Aceito em 19 de dezembro de 2023.

Nas abordagens introdutórias de Mecânica, seja no ensino superior ou na educação básica, as discussões em torno das diferenças entre os conceitos de referencial inercial e não inercial costumam ser restritas à Dinâmica, especialmente com a definição das leis de Newton, sem análises experimentais. No entanto, a noção de referencial é fundamental para a caracterização dos movimentos, mesmo que do ponto de vista estrito da Cinemática. Neste contexto, objetivamos fundamentar os conceitos de referencial inercial e não inercial a partir da exploração de uma atividade experimental com fins didáticos desenvolvida por meio de videoanálise. Especificamente, investigamos o lançamento de uma pequena bola em três situações de movimento relativo entre dois referenciais: movimento retilíneo uniforme; movimento retilíneo uniformemente variado, com aceleração e velocidade de mesmo sentido; e movimento retilíneo uniformemente variado, com aceleração e velocidade em sentidos opostos. Obtemos uma descrição cinemática embasada no Princípio de Relatividade de Galileu e nas relações de transformação entre referenciais inerciais e não inerciais, além dos ajustes das curvas de movimento obtidas pela videoanálise. Sugerimos que outros aspectos, como: invariância de escala, simultaneidade no tempo, e questões históricas relacionadas aos conceitos de referencial, movimento absoluto e relativo, possam ser encaminhadas nas discussões dos experimentos propostos.

Palavras-Chave: Cinemática, Referenciais Inerciais, Referenciais Não Inerciais, Videoanálise.

In introductory approaches to Mechanics, whether in higher education or basic education, discussions regarding the distinctions between the concepts of inertial and non-inertial frames of reference tend to be confined to Dynamics, especially with the establishment of Newton's laws, devoid of experimental analyses. Nevertheless, the notion of a frame of reference holds paramount significance for the characterization of motion, even within the strict purview of Kinematics. In this context, we aspire to underpin the concepts of inertial and non-inertial frames of reference through the exploration of an educational experimental activity conducted via video analysis. Specifically, we inquire into the motion of a small sphere in three situations of relative motion between two frames of reference: uniform rectilinear motion; uniformly accelerated rectilinear motion, with acceleration and velocity in the same direction; and uniformly accelerated rectilinear motion, with acceleration and velocity in opposite directions. We derive a kinematic description grounded in Galilean Relativity's Principle and the transformation relationships between inertial and non-inertial frames of reference, in addition to the adjustments of the motion curves acquired through video analysis. We proffer the notion that other facets such as scale invariance, temporal simultaneity, and inquiries related to the historical development of the concepts of reference frame and absolute and relative motion can also be addressed in the discussions surrounding the proposed experiments.

Keywords: Kinematics, Inertial Reference Frames, Non-Inertial Reference Frames, Video Analysis.

1. Introdução

Ao longo do percurso histórico dos estudos focados na compreensão dos movimentos, o conceito de *referencial* foi se constituindo desde uma forma rudimentar e implícita, marcada pela Física aristotélica [1, 2], até assumir

maior consistência com o estabelecimento da Física de Galileu, Descartes e Newton [3], e posteriormente com a sua reelaboração com a Teoria da Relatividade Restrita [4–6]. Mesmo sendo um conceito fundamental no estudo dos movimentos, tradicionalmente, seja no nível superior, seja no ensino básico, a noção de referencial inercial costuma ser muito ligada à Dinâmica, restrita à declaração das Leis de Newton [7–9], limitada

*Endereço de correspondência: luciacosta@ufpa.br

à representação de sistemas de coordenadas. No que concerne a Cinemática, comumente temos discussões superficiais sobre referenciais, limitadas a noções rudimentares sobre velocidade relativa. Entendemos como importante associar à Cinemática uma discussão descritiva quanto aos movimentos em referenciais mutuamente acelerados, visto que nos livros didáticos raramente são dadas explicações em termos da comparação entre referenciais, para que o aluno compreenda determinados eventos cotidianos relativos a móveis acelerados, como é o caso da ida de uma pessoa para frente ou para trás em um ônibus acelerado.

Uma recente revisão na literatura, que engloba o período de 2009 a 2020, aponta a ausência de abordagens sobre referenciais para o ensino experimental da Mecânica [10]. Procurando amenizar essa lacuna, inspirados na abordagem pioneira do *Physical Science Study Committee*¹, que propuseram discussões sobre referenciais inerciais e não inerciais através da filmagem em vídeo de situações experimentais, apresentamos neste artigo uma alternativa didática para explorar o conceito de referencial, de modo a proporcionar aos estudantes o entendimento de determinados eventos de movimento das suas realidades próximas. Especificamente, contribuindo para a necessária integração de recursos computacionais ao ensino de Física, propomos uma atividade de videoanálise em que relacionamos grandezas cinemáticas em diferentes referenciais em movimento.

Encaminhamos uma abordagem experimental adotando dois referenciais: um fixo ao solo, e outro se movimentando em relação ao solo sobre um suporte com rodas (carrinho) em um trilho numa mesa. Três situações distintas de movimento relativo entre estes referenciais foram exploradas: i. Movimento Retilíneo Uniforme (MRU); ii. Movimento Retilíneo Uniformemente Variado com aceleração e velocidade no Mesmo Sentido (MRUVMS); e iii. Movimento Retilíneo Uniformemente Variado com aceleração e velocidade em Sentidos Opostos (MRUVSO). Particularmente, foi investigada a trajetória de subida de uma bola, lançada a partir de um suporte balístico acoplado ao segundo referencial em movimento na mesa, sendo que implementamos a descrição cinemática desses movimentos por meio do recurso de videoanálise, usando o programa Tracker. O texto segue com a seguinte organização: na Seção 2, derivamos as relações cinemáticas vinculando os dois referenciais em movimento. Na Seção 3, mostramos a esquematização do aparato experimental, seguida das descrições cinemáticas por videoanálise obtidas para referenciais em MRU, MRUVMS e MRUVSO. Na seção 4, temos as considerações finais sobre a abordagem proposta.

¹ O vídeo *Frames of Reference* foi originalmente direcionado ao ensino médio, sendo realizado em 1960, na Universidade de Toronto. Pode ser acessado em: <https://www.youtube.com/watch?v=bJMYoj4hHqU&t=514s>

2. Referenciais em Movimento Relativo

Nas investigações experimentais propostas na próxima seção, precisaremos relacionar os movimentos de um bolinha a partir de dois referenciais distintos: um fixo no laboratório e outro em movimento em relação ao laboratório. Por isso, nesta seção, deduzimos as transformações entre esses referenciais, denominando de S o referencial fixo, e de S' o referencial em movimento. Nossa proposta é que os vídeos explorados na Seção 3² sejam debatidos antes da formalização matemática exposta nesta seção, relacionando-os com casos cotidianos, possibilitando que os estudantes vinculem as representações propostas com os eventos investigados. Trataremos de casos de translação pura, sem rotação, como serão os casos analisados na Seção 3.

2.1. Referenciais inerciais e transformação de Galileu

Na descrição do movimento de corpos, de modo geral, constituímos um referencial por um sistema de coordenadas cartesiano para medir as três coordenadas espaciais e um relógio para o registro do tempo. Queremos qualificar o movimento de uma partícula situada em P a partir de dois referenciais S e S' (um referencial fixo no laboratório e outro se movimentando em relação ao laboratório), que estão em movimento relativo ao longo da direção horizontal, por exemplo, como ilustra a Figura 1, em que o referencial S' se move com velocidade de módulo constante V em relação ao referencial S . Iremos tratar com velocidades ditas não relativísticas ($V \ll c$, sendo c a velocidade da luz no vácuo), assumindo a hipótese da invariância na contagem do tempo e na escala de comprimento [7].

Sendo x' a coordenada horizontal da partícula no referencial S' e x a respectiva coordenada no referencial S ,

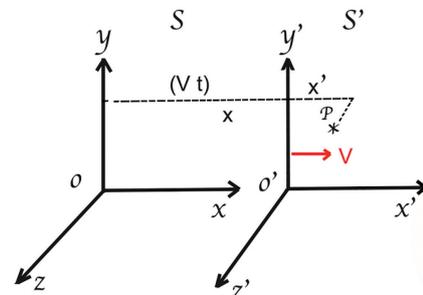


Figura 1: Localização de uma partícula em P no referencial S e em S' , em que S' se move em movimento retilíneo uniforme em relação a S , horizontalmente.

² Os vídeos referentes as três situações de movimento relativo estão disponíveis no sítio: https://www.if.ufrgs.br/gpef/modelagem/rferenciais_nao_inerciais/

obtemos a denominada *transformação de Galileu especial*³, a qual relaciona os referenciais por uma translação espacial (Vt):

$$\begin{aligned} x' &= x - Vt, \\ t' &= t. \end{aligned} \tag{1}$$

Por derivações em relação ao tempo, temos as respectivas transformações entre as velocidades e acelerações da partícula nos referenciais S e S' :

$$\begin{aligned} v' &= v - V, \\ a' &= a, \end{aligned} \tag{2}$$

estabelecendo a invariância da aceleração nos dois referenciais. Tendo a invariância na massa inercial de uma partícula em P , e constatando que a distância mútua entre duas partículas não se altera pela translação espacial, temos a chamada covariância da 2ª. Lei de Newton pela transformação de Galileu [7]. Este comportamento é englobado pelo *Princípio da Relatividade de Galileu*, que refere sobre a validade da Mecânica (Leis de Newton) entre referenciais em repouso ou em movimento retilíneo uniforme relativo, chamados referenciais inerciais, e, portanto, da impossibilidade de se detectar o estado de movimento de um corpo entre estes referenciais [1, 4, 6]. Entretanto, podemos discriminar os referenciais inerciais pelas mudanças das posições e velocidades relativas. No caso deste trabalho, iremos abordar este aspecto no experimento proposto.

2.2. Referenciais não inerciais

Consideramos agora a situação em que o referencial S' encontra-se em movimento retilíneo uniformemente variado em relação ao sistema S , por exemplo, na direção horizontal. Portanto, a relação entre as coordenadas da posição da partícula em P , dadas nos respectivos referenciais, é expressa como:

$$x' = x - V_0t - 1/2A t^2, \tag{3}$$

sendo A e V_0 os módulos da aceleração e da velocidade inicial, respectivamente, do referencial S' em relação ao referencial S . Por derivações no tempo, encontramos as respectivas relações para as velocidades e acelerações da partícula nos referenciais S e S' :

$$\begin{aligned} v' &= v - V_0 - A t, \\ a' &= a - A, \end{aligned} \tag{4}$$

de modo que a aceleração da partícula no referencial S' é distinta da aceleração em S . Nesta condição, o referencial S' é denominado de não inercial, e as Leis de Newton não são válidas nesse referencial [7]. Iremos considerar a relação das acelerações quando analisarmos

o referencial S' dos experimentos com aceleração. Os resultados descritos em 2.1 e 2.2 são válidos também para o movimento relativo em uma direção arbitrária do espaço, bastando estendermos as relações (1) a (4) às coordenadas y e z .

3. Caracterizando os Referenciais por Videoanálise

Os recursos computacionais e de tecnologia da informação têm um papel essencial para a ensino e aprendizagem, desde as ferramentas mais básicas, como editores de texto, planilhas e gráficos, como na geração de conteúdo digital, como as hipermídias, simulações de fenômenos físicos, experimentos remotos e, de modo mais destacado, atualmente o direcionamento de *softwares* e aplicativos digitais livres (flexibilidade de uso e baixo custo) voltados para o ensino de Física. Em especial, destacamos o Tracker⁴, que é um programa gratuito *open source* que permite a análise quantitativa de eventos a partir de vídeos, proporcionando a geração de gráficos e o ajuste de curvas para os dados coletados. Notadamente, podemos trabalhar a modelagem científica com o Tracker [11, 12] e, dessa forma, o recurso se torna bem interessante para promover discussões mais aprofundadas em atividades experimentais, seja no ambiente do laboratório ou em sala de aula [13].

3.1. Proposição experimental

Expomos na Figura 2 a seguir um desenho esquemático do aparato experimental, por meio do qual implementamos uma análise cinemática considerando dois referenciais envolvidos: o referencial S , tomado fixo em relação ao solo, no ambiente do laboratório, o qual dispõe de um tripé com uma câmera digital de um *smartphone*

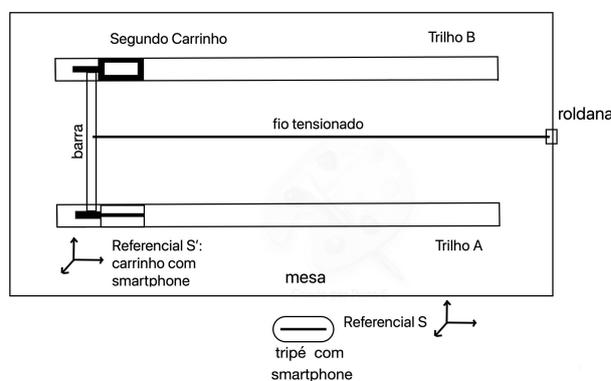


Figura 2: Representação do aparato experimental tomando dois referenciais em movimento relativo.

³ As transformações de Galileu são um caso especial das transformações de Lorentz, para $V \ll c$ [6].

⁴ Tracker, idealizado pela *Open Source Physics*, que desenvolve uma coleção digital de recursos didáticos em Física, Computação e modelagem computacional. Acessível em: <https://www.compadre.org/osp/>

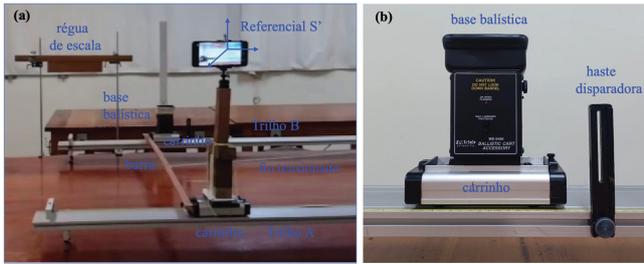


Figura 3: (a) Identificação dos objetos que constituem o aparato experimental sobre a mesa. (b) Dispositivo da base balística afixada ao carrinho sobre o trilho e a haste disparadora.

acoplada; e o referencial S' , com origem fixada em um carrinho que se movimenta sobre o trilho A em cima de uma mesa, o qual também possui uma câmera digital de um *smartphone* conectada. Por meio de uma barra um segundo carrinho, que se move sobre o trilho B paralelo ao trilho A, é acoplado ao primeiro, onde está o referencial S' . Temos também um fio tensionado, ligado a barra pela extremidade esquerda e sustentando um corpo pela extremidade direita, passando por uma roldana.

A Figura 3(a) apresenta o aparato experimental a partir da imagem captada pelo *smartphone* situado no referencial S , fixo ao solo, onde mais a frente sobre a mesa se observa o primeiro carrinho sobre o trilho A, contendo um *smartphone* e constituindo o referencial S' . Uma barra delgada conecta esse carrinho ao segundo carrinho que está no trilho B, no qual é acoplada uma base balística⁵, que é um dispositivo que lança uma bola aproximadamente verticalmente quando o carrinho passa por um acionador (uma haste vertical). Um fio tensionado ligado à barra controlou o movimento do sistema composto pelos dois carrinhos apoiados nos trilhos, e uma régua foi afixada à mesa, servindo de escala na videoanálise. Na Figura 3(b), temos a base balística afixada ao carrinho sobre o trilho B, seguida de uma haste vertical afixada também ao trilho e que serve para acionar o disparo de uma bolinha contida no interior da base balística, quando o sensor *fotogate* da base balística intercepta a haste.

Quando este conjunto, englobando o carrinho com um *smartphone* (referencial S') e a base balística, estão em movimento, em um dado ponto, quando o carrinho do trilho B passa pelo acionador, uma bolinha (de pequena massa e aproximadamente esférica) é lançada para cima a partir da base balística. Nosso interesse é descrever o movimento da bolinha a partir dos referenciais S e S' para três situações de movimento em relação ao referencial S (com origem no *smartphone*

fixo no laboratório): com o referencial S' (com origem no carrinho do trilho A) aproximadamente em MRU; com o referencial S' aproximadamente em MRUVMS; e com o referencial S' aproximadamente em MRUVSO. Para produzir o MRU, nivelamos os trilhos de modo que o conjunto dos carrinhos se desloquem com velocidade aproximadamente constante a partir de um empurrão sobre a barra, vencendo a inércia de rolamento. Para produzir o movimento acelerado, conectamos um fio de barbante na barra que conecta os carrinhos, e na outra extremidade do fio, passando por uma roldana, deixamos cair um corpo de massa de $200,0 \pm 0,5$ g, provocando, assim, o movimento acelerado do conjunto. Para o movimento retardado, produzimos um empurrão na barra em sentido contrário ao do corpo suspenso pelo fio.

Na próxima seção, apresentamos a experimentação executada por meio da videoanálise para os três movimentos relativos mencionados, onde propomos ajustes às curvas de movimento usando o programa SciDavis⁶, que é *open source*, para que tivéssemos controle sobre as incertezas atribuídas às grandezas medidas na videoanálise, visto que o programa Tracker propõem ajustes, mas não permite este tipo de ingerência.

3.2. Vídeo análise para MRU relativo

Assumimos que o referencial S , associado ao solo, é um referencial inercial, desprezando efeitos decorrentes da rotação da Terra; o referencial S' , por sua vez, é posto a se mover aproximadamente em MRU relativo ao referencial S . Nesse caso, ambos os referenciais S e S' são então considerados inerciais (uma explicação sobre por que a Terra pode ser considerada um referencial inercial pode ser consultada em [14]). A experiência consiste em investigar o movimento de subida da bolinha lançada da base balística a partir do vídeo captado pelo referencial S' e pelo vídeo gerado no referencial S' ⁸. Na Figura 4, temos a imagem que ilustra o movimento de subida da bolinha a partir do referencial S , após ter sido lançada pela base balística, que segue em movimento em conjunto com o carrinho do referencial S' sobre os trilhos. As marcações em vermelho obtidas pela videoanálise consistem na trajetória da bolinha, a qual é um arco de parábola, e na parte direita da Figura 4 temos os gráficos correspondentes das coordenadas horizontal e vertical da posição da bolinha em função do tempo. Observamos ainda a escala de comprimento (linha azul) de 0,600 m, estabelecida pela régua afixada na extremidade esquerda da mesa, a qual é colocada aproximadamente coplanar ao plano do movimento da

⁶ Acesso ao SciDavis: <https://sourceforge.net/projects/scidavis/>
⁷ Vídeo da situação de MRU, gerado no referencial S : https://www.if.ufrgs.br/gpef/modelagem/referenciais_ao_inerciais/Referencial-S-Solo-MRU.mp4

⁸ Vídeo da situação de MRU, gerado no referencial S' : https://www.if.ufrgs.br/gpef/modelagem/referenciais_ao_inerciais/Referencial-S'-Mesa-MRU.mp4

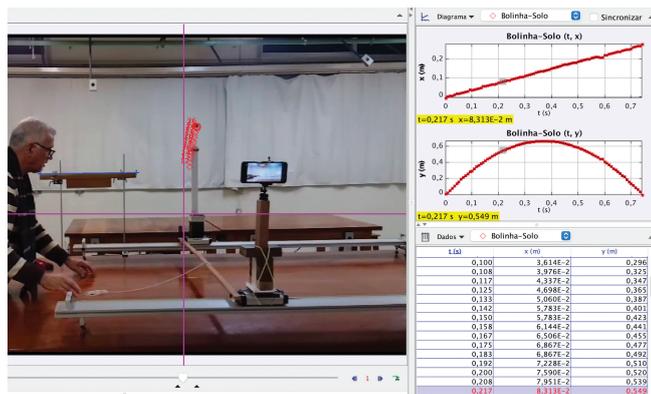


Figura 4: Videoanálise do movimento da bolinha a partir do referencial S .

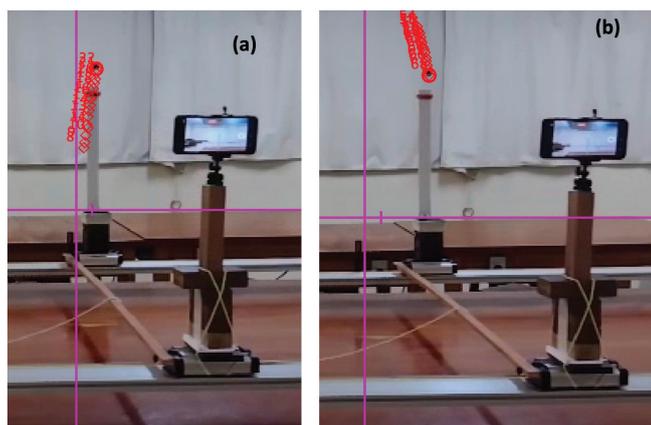


Figura 5: Trajetórias de subida (a) e descida (b) da bolinha obtidas por videoanálise a partir do referencial S .

bolinha, sendo também paralela às câmeras digitais dos smartphones⁹.

A Figura 5 mostra duas marcações da trajetória da bolinha no referencial S , no trajeto de subida (a) e descida (b), indicando um movimento típico de lançamento oblíquo.

Na sequência, a Figura 6 apresenta as marcações da trajetória da base balística, associadas ao referencial S , de modo a observarmos o movimento entre referenciais. A posição horizontal sugere um comportamento linear, e a posição vertical apresenta uma flutuação da ordem de 10^{-2} m decorrente das pequenas imprecisões na marcação das posições utilizando o Tracker e da vibração da base balística. Como essas flutuações são da

⁹ Em [13], V. L. B. de Jesus esclarece efeitos de paralaxe em vídeos destacando que, estando a câmera entre 4 a 5 metros de distância do objeto de interesse, diferenças de 10 a 15 cm entre os planos do movimento do objeto e da régua de escala de referência, podem interferir na videoanálise. Nos três experimentos em questão, a régua se encontra acima do trilho B que contém o suporte balístico, aproximadamente à 120 cm da câmera posicionada à mesa e a 220 cm de distância da câmera posicionada ao solo, nos possibilitando concluir que efeitos de paralaxe são desprezíveis nos estudos realizados.

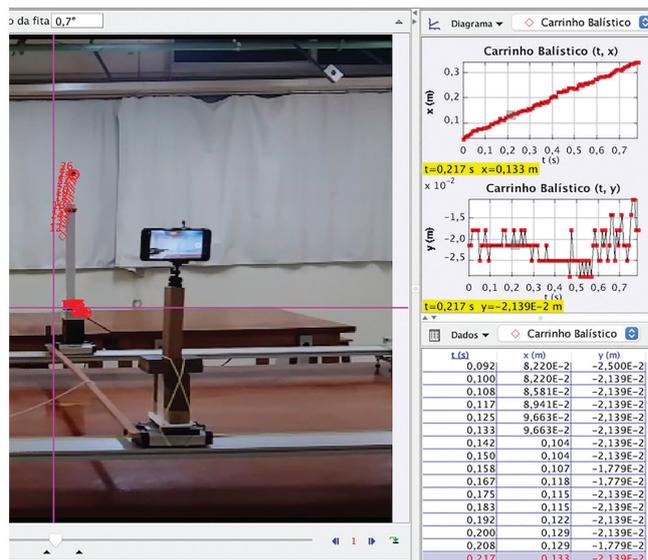


Figura 6: Videoanálise do movimento da base balística a partir do referencial S .

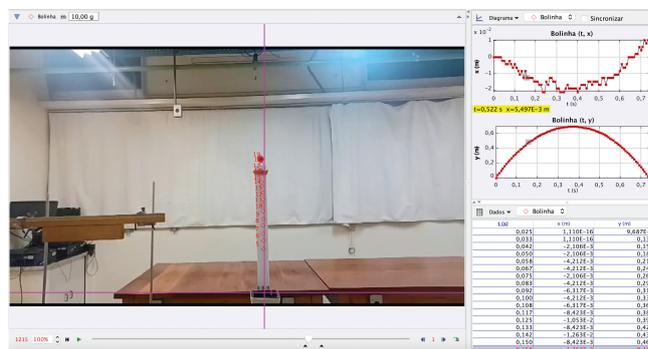


Figura 7: Trajetória do movimento da bolinha, a partir do referencial S' , que se encontra aproximadamente em MRU.

ordem da incerteza dos dados coletados, a consideramos desprezíveis.

A Figura 7 mostra as marcações da trajetória da bolinha a partir do referencial S' , que se move sobre o trilho A em relação ao solo, correspondendo ao mesmo movimento de subida captado simultaneamente pelo referencial S , em repouso no solo. Entretanto, vemos que, no referencial S' , a trajetória da bolinha se aproxima de um segmento de reta vertical. Do lado direito da Figura 7, o comportamento temporal da coordenada horizontal da posição da bolinha evidencia uma flutuação da ordem de 10^{-2} m devido ao movimento da câmera no referencial S' e as incertezas na coleta de dados com o Tracker, sendo, pelo mesmo motivo anterior, desprezível. A evolução temporal da coordenada vertical da posição da bolinha indica um movimento aproximadamente vertical sob a ação da gravidade [7, 8].

A partir dos dados da posição obtidos a partir da videoanálise, em ambos os referenciais S e S' , podemos

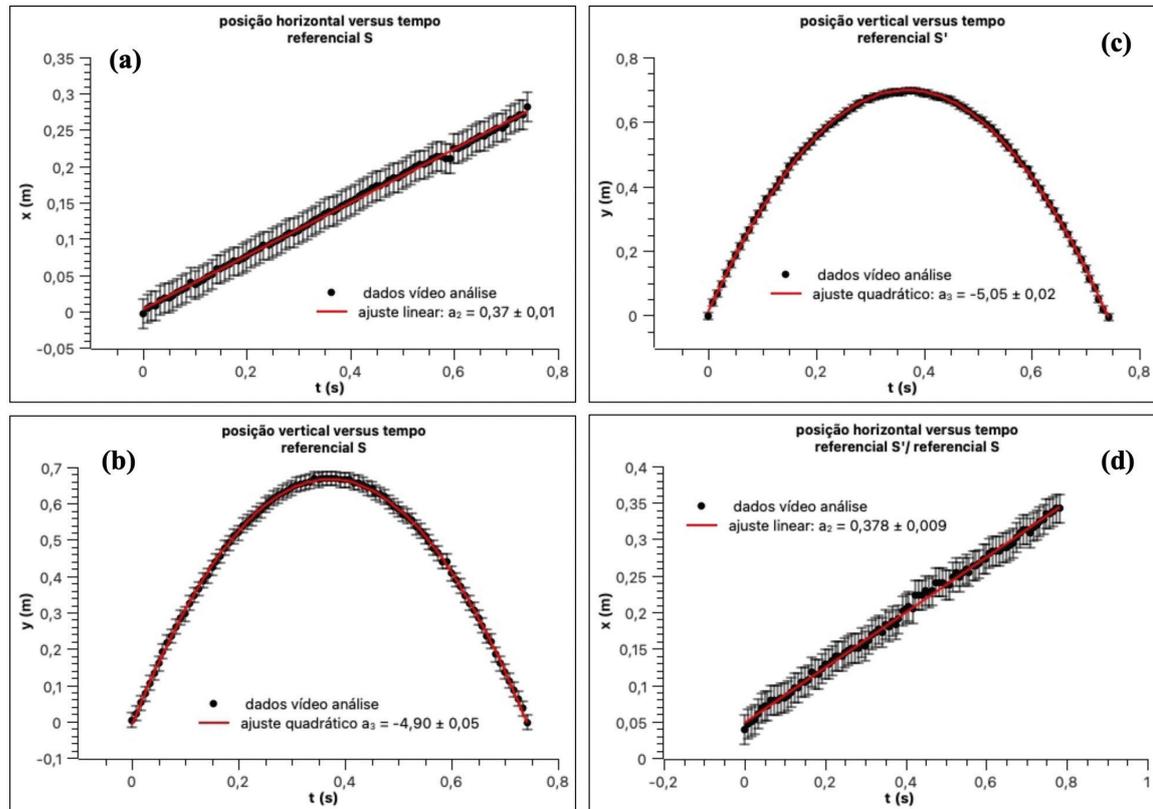


Figura 8: Os gráficos (a) e (b) são os ajustes às curvas de movimento da bolinha segundo o referencial S e (c) segundo o referencial S' , e (d) do movimento da base balística segundo o referencial S . Os dados da videoanálise são os círculos em negrito, os ajustes são as curvas em vermelho, e as barras são as incertezas nas coordenadas horizontal e vertical da posição.

investigar as relações entre os dois movimentos por meio de ajustes de curvas aos dados de movimento da bolinha e da base balística (círculos em negrito nos gráficos da Figura 8). Nas Figuras 8(a) e (b) temos os ajustes (curvas em vermelho) para as curvas da posição da bolinha em função do tempo no referencial S : para a coordenada horizontal, o ajuste linear corresponde à função horária $x(t) = a_1 + a_2t$, com o coeficiente angular $a_2 = 0,37 \pm 0,01$ m/s, associado com a componente horizontal da velocidade considerada constante; para a coordenada vertical, o ajuste quadrático corresponde à função horária $y(t) = a_1 + a_2t + a_3t^2$, com $a_3 = -4,90 \pm 0,05$ m/s². Sendo o diâmetro da bolinha $25,00 \pm 0,05$ mm e a massa $10,0 \pm 0,5$ g, desprezamos as forças de arrasto e de empuxo sobre a bolinha¹⁰ e, portanto, associamos o coeficiente a_3 ao termo $(-g/2)$, sendo g o módulo da aceleração da gravidade, e estimamos $g = 9,8 \pm 0,1$ m/s². Segundo Silveira [15], o valor da aceleração gravitacional no local em que o experimento foi realizado está compreendido entre $9,79$ m/s² e $9,83$ m/s².

¹⁰ Para o movimento da bolinha, estimamos a força peso como aproximadamente 19,6 vezes a força de arrasto, e 1.090 vezes o empuxo do ar, onde estimamos o coeficiente de arrasto igual a unidade; a densidade do ar igual a $1,21$ kg/m³ [16]; a área superficial da bolinha igual a $5 \cdot 10^{-4}$ m²; 4 m/s aproximadamente

Na Figura 8(c) também consideramos um ajuste quadrático (curva em vermelho) para a componente vertical da posição da bolinha a partir do referencial S' , com o coeficiente $a_3 = -5,05 \pm 0,02$ m/s² e, da mesma forma, fornecendo $g = 10,10 \pm 0,04$ m/s². A Figura 8(d) apresenta um ajuste linear (curva em vermelho) para o movimento da base balística em relação ao referencial S , com o coeficiente angular $a_2 = 0,378 \pm 0,009$ m/s, correspondendo a uma velocidade horizontal considerada constante. Nos ajustes de curvas realizados, consideramos as incertezas (barras em negrito) associadas às medidas de posição como aproximadamente $0,01$ m (40% do diâmetro da bolinha) para as medidas obtidas pelo vídeo mais próximo do objeto de interesse, ou seja, geradas pela câmera do *smartphone* localizado na mesa, e de $0,02$ m (80% do diâmetro da bolinha) para as medidas obtidas pelo vídeo mais distante do objeto, ou seja, geradas pela câmera do *smartphone* localizado no chão¹¹. A partir da eq. (2), da transformação de Galileu das velocidades, concluímos:

a velocidade máxima da bolinha segundo o Tracker; e o módulo da aceleração da gravidade igual a $9,81$ m/s² [15].

¹¹ Em [13], V. L. B. de Jesus orienta que a incerteza associada à medida da posição do objeto de interesse depende de vários fatores: condições da filmagem, contraste, iluminação e escolha do ponto de referência do objeto. No capítulo 3, o autor realiza a videoanálise

- A velocidade do referencial S' em relação ao referencial S , a mesma velocidade da base balística em relação ao solo, devido ao acoplamento, indica que o movimento de S' é aproximadamente um MRU (Figura 8(d)), com velocidade $V = 0,378 \pm 0,009$ m/s.
- A velocidade horizontal da bolinha dada no referencial S é $v = 0,37 \pm 0,01$ m/s (Figura 8(a)).
- A velocidade horizontal da bolinha dada no referencial S' é estimada como: $v' = -0,01 \pm 0,01$ m/s, ou seja, dentro da precisão das medidas, a bolinha, projetada a partir da base balística, possui velocidade horizontal semelhante ao referencial S' . Isto está em acordo com a Figura 7, em que, pela videoanálise da câmera do referencial S' , a bolinha apresenta um movimento predominantemente vertical de subida e descida e, após seu movimento, retorna à base balística de lançamento.
- Em ambos os referenciais S e S' , o movimento vertical da bolinha é determinado pela aceleração gravitacional, apesar da bolinha descrever trajetórias distintas em ambos os referenciais.

Propomos que sejam realizadas discussões em sala de aula sobre a equivalência entre repouso e MRU, no caso, entre realizar o lançamento vertical da bolinha, com a base balística em repouso, e em movimento uniforme; a distinção das trajetórias entre os referenciais S e S' ; a independência observada entre os movimentos vertical e horizontal; relacionando às argumentações históricas sobre uma pedra lançada verticalmente retornar à base de uma torre; e do corpo que cai do alto de um mastro de um navio em MRU, em relação aos observadores em terra e no navio, culminando com a distinção entre os conceitos de *espaço absoluto* e *referencial inercial* no desenvolvimento da Mecânica, e o Princípio da Relatividade de Galileu [1, 3, 4, 17].

3.3. Videoanálise para MRUVMS relativo

Provocamos o movimento do referencial S' por meio de um fio tensionado no mesmo sentido do seu movimento, realizado em relação ao referencial S , que está em repouso no solo. A Figura 9 apresenta a videoanálise do movimento da bolinha¹² em relação a S , cuja trajetória é um arco de parábola, com as coordenadas da posição indicando um lançamento oblíquo. Mantemos a escala de comprimento dada pela régua afixada à mesa, e estimamos as incertezas nas posições da mesma forma anterior.

de uma bola de borracha em queda, que tem aproximadamente 50 mm de diâmetro e infere uma incerteza de 10% do seu tamanho. Em nosso caso, fizemos uma estimativa da incerteza da posição a partir da análise das diferentes escolhas de posição que poderíamos fazer usando o Tracker, e assumimos também o diâmetro da bola como uma escala de referência para estimar a incerteza.

¹² Vídeo da situação de MRUVMS, gerado no referencial S : https://www.if.ufrgs.br/gpef/modelagem/referenciais_ao_inerciais/Referencial-S-Solo-MRUVMS.mp4

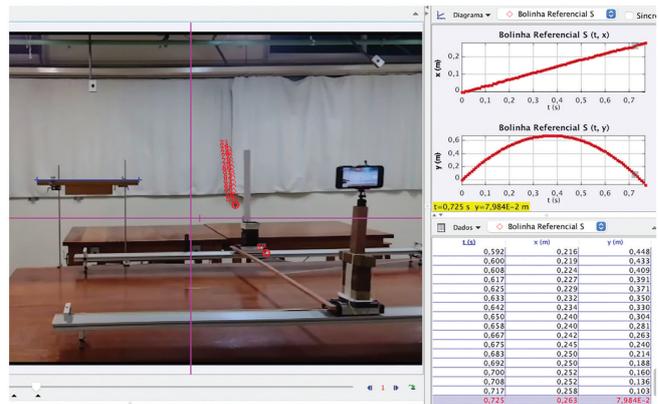


Figura 9: Videoanálise do movimento da bolinha a partir do referencial S , com a base balística executando um movimento horizontal no mesmo sentido do fio tensionado.

A Figura 10(a) apresenta o ajuste linear (curva em vermelho) da coordenada horizontal da posição da bolinha, correspondendo a uma velocidade horizontal constante $0,369 \pm 0,009$ m/s, e a Figura 10(b) mostra o ajuste quadrático (curva em vermelho) para a coordenada vertical, em que inferimos o módulo da aceleração gravitacional como $g = 9,8 \pm 0,1$ m/s². As barras nos gráficos são as incertezas nas coordenadas horizontal e vertical da posição.

Na Figura 11(a), temos a videoanálise referente à base balística, a partir do referencial S , gerada a partir do mesmo vídeo anterior, caracterizando um movimento horizontal acelerado, e com uma flutuação desprezível na coordenada vertical, visto que a variação da posição em y é 0,006 vezes a variação em x . Na Figura 11(b), o ajuste quadrático (curva em vermelho) da coordenada horizontal fornece uma aceleração horizontal de $0,2 \pm 0,1$ m/s², associada ao coeficiente a_3 . As barras são as incertezas na coordenada horizontal da posição.

Com a câmera no referencial S' , caracterizamos o movimento da bolinha a partir desse referencial¹³, em que a videoanálise, exposta na Figura 12, apresenta uma trajetória parabólica, indicando um movimento acelerado em ambas as coordenadas de posição.

A Figura 13(a) mostra o ajuste quadrático (curva em vermelho) para a coordenada horizontal da posição da bolinha, possibilitando se inferir uma aceleração de $-0,30 \pm 0,04$ m/s², no sentido contrário ao movimento da base balística. A Figura 13(b) mostra o ajuste quadrático (curva em vermelho) da coordenada vertical da bolinha, indicando que o módulo da aceleração gravitacional é $g = 10,32 \pm 0,04$ m/s² no evento investigado. As barras são as incertezas nas coordenadas horizontal e vertical da posição.

¹³ Vídeo da situação de MRUVMS, gerado no referencial S' : https://www.if.ufrgs.br/gpef/modelagem/referenciais_ao_inerciais/Referencial-S'-Mesa-MRUVMS.mp4

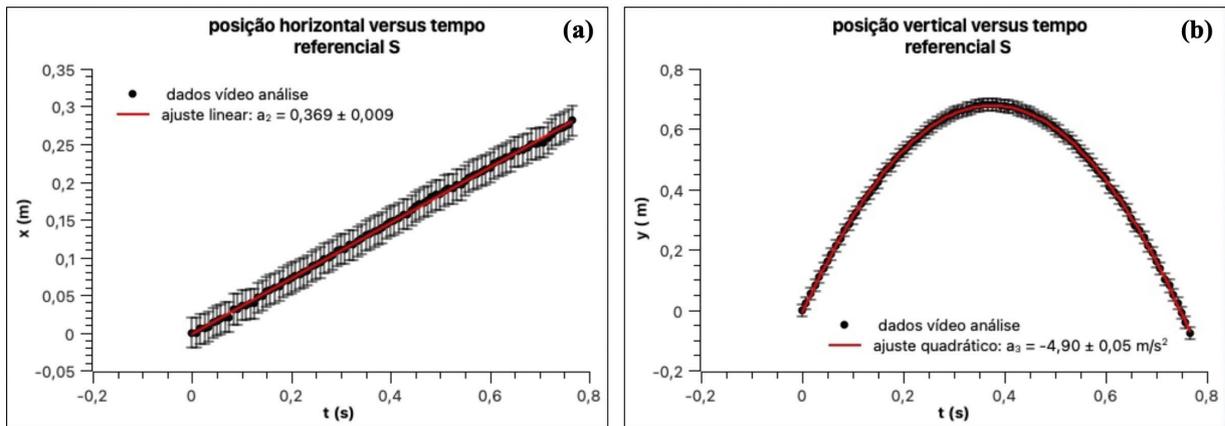


Figura 10: Ajustes das curvas de posição do movimento da bolinha, a partir do referencial S , com a base balística em movimento horizontal no mesmo sentido ao fio tensionado.

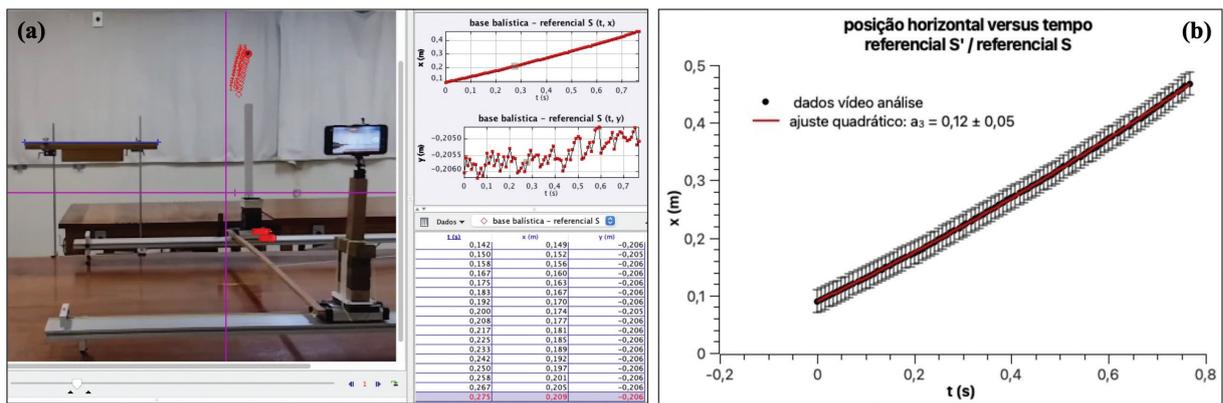


Figura 11: Videoanálise da base balística indicando um movimento acelerado, a partir do referencial S .

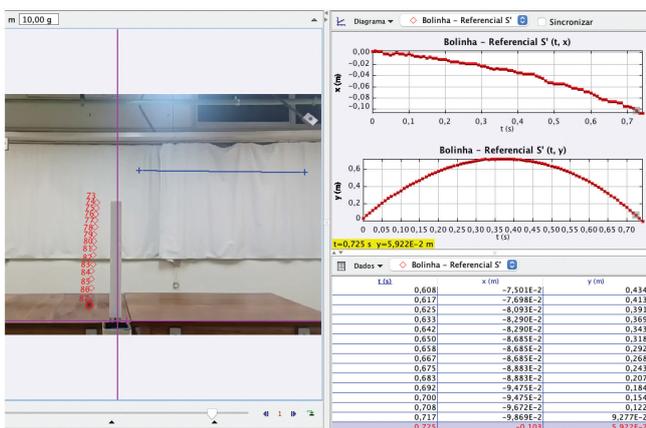


Figura 12: Videoanálise do movimento da bolinha, a partir do referencial S' , com a base balística em movimento horizontal acelerado.

A partir da eq. (4), para as acelerações entre os referenciais S e S' , concluímos:

- O movimento do referencial S' é similar ao da base balística, devido ao acoplamento, com uma

aceleração horizontal em relação ao referencial S dada por $A = 0,2 \pm 0,1 \text{ m/s}^2$, conforme Figura 11. Desse modo, o referencial S' é um referencial não inercial.

- Em relação ao referencial S , a bolinha descreve aproximadamente um movimento oblíquo, sob a ação gravitacional, conforme as Figuras 9 e 10. Portanto, apresenta aceleração horizontal aproximadamente nula ($a = 0$), de modo que observamos que a bolinha não encontra a base balística em seu movimento de retorno (Figura 9).
- Em relação ao referencial S' , é previsto que o movimento da bolinha deve ter uma aceleração horizontal dada por $a' = -A$. Corroborando essa previsão, identificamos pela videoanálise que $a' = -0,30 \pm 0,04 \text{ m/s}^2$, conforme Figura 13(a).
- Na direção vertical, em que não há movimento relativo entre os referenciais, o movimento da bolinha é regido em ambos os referenciais pela aceleração gravitacional (Figura 10(b) e Figura 13(b)).

Deste experimento, podemos encaminhar um debate em torno da descrição cinemática em um referencial

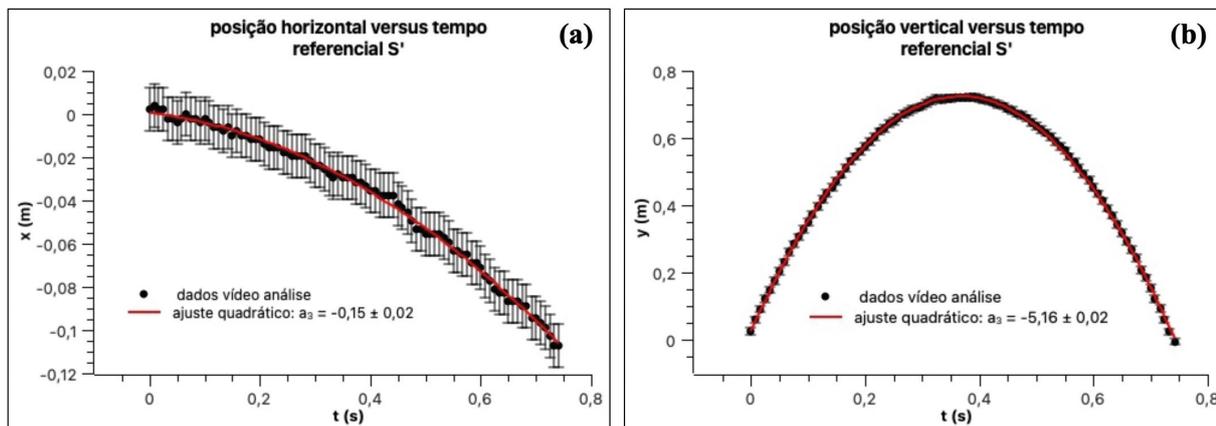


Figura 13: Ajustes das curvas de posição da bolinha, a partir do referencial S' , com a base balística em movimento horizontal acelerado.

acelerado, associando a situações reais, como o caso do movimento acelerado em um elevador ou um ônibus com aceleração [7, 8, 18].

3.4. Vídeo análise para MRUVSO relativo

Provocamos o movimento do referencial S' executando um movimento horizontal para a direita em relação ao referencial S , mantendo o fio conectado na barra que acopla os carrinhos tensionado em sentido oposto. Novamente, mantemos a escala de comprimento dos experimentos já relatados, assim como as incertezas nas posições, geradas a partir dos dois referenciais. A Figura 14 mostra a bolinha descrevendo uma trajetória aproximadamente parabólica em relação ao referencial S^{14} . Nesse caso, o movimento da bolinha, cujas coordenadas de posição indicam um movimento oblíquo, é adiantado em relação à base balística, já que a velocidade do carrinho é reduzida pela ação do fio tensionado.

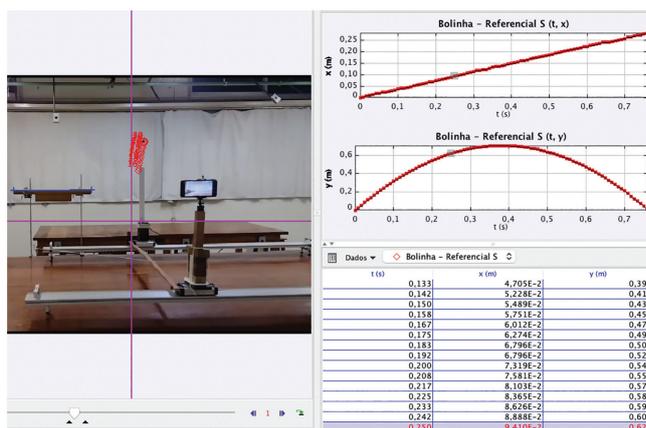


Figura 14: Videoanálise do movimento da bolinha a partir do referencial S , com a base balística executando um movimento horizontal em sentido oposto ao fio tensionado.

da coordenada horizontal fornece uma aceleração horizontal de $-0,2 \pm 0,1 \text{ m/s}^2$. As barras são as incertezas na coordenada horizontal da posição.

Investigamos o movimento da bolinha, a partir da câmera do referencial S'^{15} , com a videoanálise exposta na Figura 17, evidenciando uma trajetória aproximadamente parabólica, indicando um movimento acelerado em ambas as coordenadas de posição, apesar de uma discreta flutuação inicial na coordenada horizontal, devido à vibração da base balística pelo disparo da bolinha e, conseqüentemente, da câmera do referencial S' .

A Figura 18(a) mostra o ajuste quadrático (curva em vermelho) para a coordenada horizontal da posição da bolinha, indicando uma aceleração de $0,20 \pm 0,08 \text{ m/s}^2$, no sentido do movimento da base balística. A Figura 18(b) indica o ajuste quadrático (curva em vermelho) da coordenada vertical, o qual associamos

¹⁴ Vídeo da situação de MRUVSO, gerado no referencial S : https://www.if.ufrgs.br/gpef/modelagem/referenciais_ao_inerciais/Referencial-S-Solo-MRUVSO.mp4

¹⁵ Vídeo da situação de MRUVSO, gerado no referencial S' : https://www.if.ufrgs.br/gpef/modelagem/referenciais_ao_inerciais/Referencial-S'-Mesa-MRUVSO.mp4

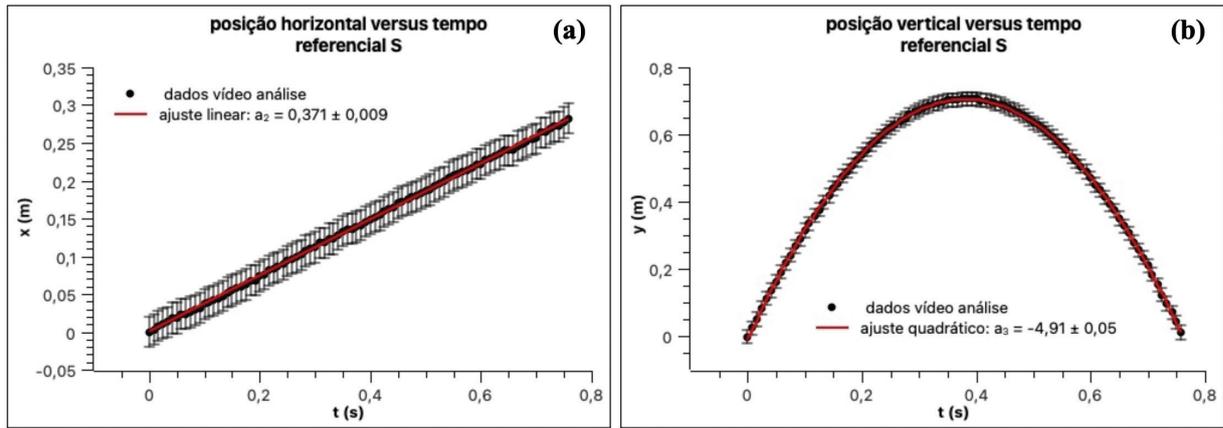


Figura 15: Ajustes das curvas de posição do movimento da bolinha, a partir do referencial S , com a base balística com movimento horizontal em sentido oposto ao fio tensionado.

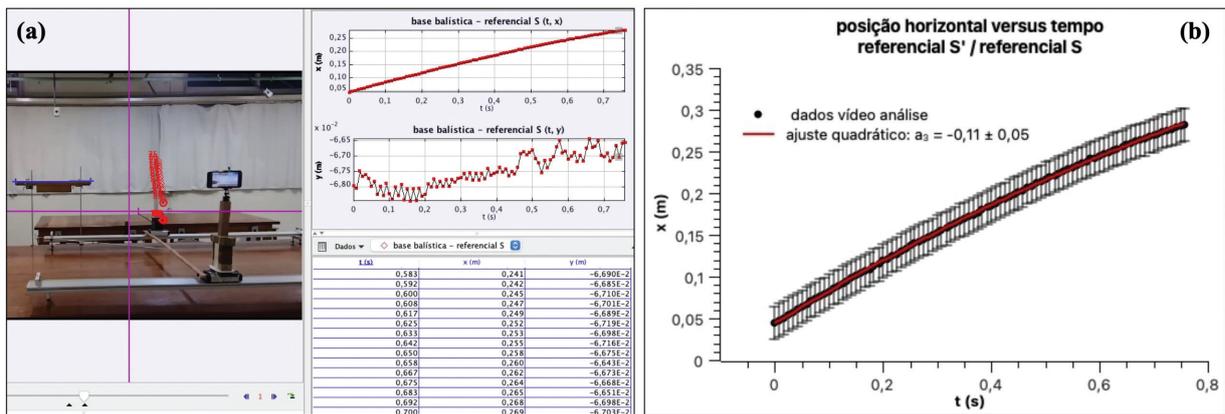


Figura 16: Videoanálise da base balística indicando um movimento retardado, a partir do referencial S .

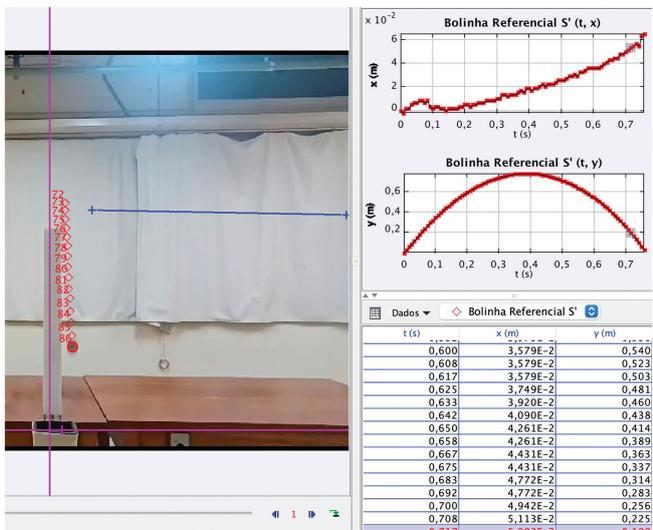


Figura 17: Videoanálise do movimento da bolinha, a partir do referencial S' , com a base balística em movimento horizontal retardado.

a aceleração gravitacional, de módulo $g = 10,60 \pm 0,04 \text{ m/s}^2$. As barras são as incertezas nas coordenadas horizontal e vertical da posição.

Novamente, considerando a eq. (4) sobre referenciais não inerciais, concluímos:

- O referencial S' tem um movimento similar à base balística, com aceleração horizontal em relação ao referencial S dada por $A = -0,2 \pm 0,1 \text{ m/s}^2$, conforme Figura 16, sendo um referencial não inercial.
- Em relação ao referencial S , a bolinha descreve um movimento oblíquo, sob a ação gravitacional, conforme Figuras 14 e 15, com aceleração horizontal $a = 0$, em que a bolinha não encontra a base balística em seu movimento de retorno, como observado nas marcações de sua trajetória, na Figura 16(a).
- Em relação ao referencial S' , é previsto que a bolinha deve apresentar uma aceleração horizontal

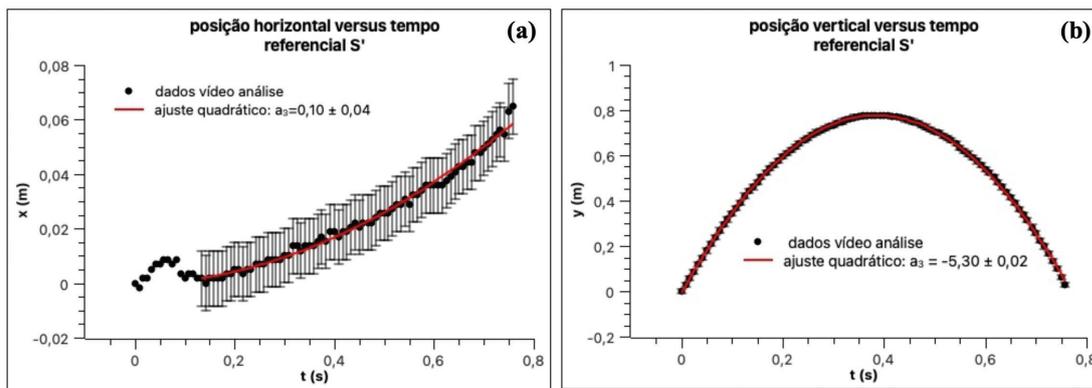


Figura 18: Ajustes das curvas de posição da bolinha, a partir do referencial S' , com a base balística em movimento horizontal retardado.

dada por $a' = -A$. Isso é corroborado pela videoanálise, já que concluímos que $a' = 0,2 \pm 0,08 \text{ m/s}^2$, conforme Figura 18(a).

- Na direção vertical, em que não há movimento relativo entre os referenciais, o movimento da bolinha é regido em ambos os referenciais pela aceleração gravitacional (Figura 15(b) e Figura 18(b)).

Propomos que, a partir deste experimento, seja realizado um debate em torno da descrição cinemática em um referencial não inercial retardado, comparando com o referencial acelerado, com ambos mantendo a simultaneidade no tempo, entretanto, onde as trajetórias da bolinha, mesmo que parabólicas, exibem uma inversão no sentido horizontal de movimento (Figura 12 e Figura 17), além de compararmos com situações reais de movimento [7, 8, 18].

4. Considerações Finais

A proposta experimental das três situações de movimento relativo apresentadas constituiu uma abordagem satisfatória direcionada à compressão da descrição cinemática do movimento de corpos em referenciais inerciais e não inerciais, visto que, dentro das incertezas das medidas, os dados obtidos a partir das videoanálises deram apoio empírico para as construções teóricas que são tema de ensino dentro da Mecânica Newtoniana sobre a mudança de referenciais, de uma forma acessível para um estudante que está tendo o primeiro contato com esses conceitos cinemáticos, podendo vir a servir de um estudo preparatório para a abordagem dinâmica dessas situações. Através das análises empreendidas, podem-se discutir a invariância de escala e a simultaneidade no tempo; os conceitos cinemáticos típicos e a classificação dos movimentos delineando uma análise de modelagem; o desenvolvimento histórico do conceito de referencial e de movimento absoluto e relativo; o Princípio da Relatividade de Galileu e a relação de transformação para os referenciais inerciais e não inerciais, servindo ainda de introdução à relatividade especial einsteiniana,

especificamente ao que se refere a transformação de Lorentz [6].

Os materiais utilizados no aparato experimental são comumente encontrados nos laboratórios de Física Básica das universidades, de modo que a atividade pode ser desenvolvida como uma proposição experimental em disciplinas de Física introdutória ou em disciplinas de laboratório. No ensino básico, dada a ausência destes recursos na maioria das escolas, disponibilizamos, utilizando licenças permissivas *Creative Commons*, os vídeos dos três movimentos realizados, onde os professores e alunos podem, por exemplo, realizar a videoanálise independentemente, usando o *software* Tracker. Ressaltamos também que os elementos utilizados, como carrinhos, trilhos, roldana e fio tensionado, contribuem nas discussões junto aos alunos de que estes mesmos objetos técnicos, associados às descrições teóricas dos livros didáticos, podem produzir movimentos semelhantes às situações físicas reais.

Agradecimentos

Gostaríamos de agradecer ao Sr. Ricardo Ferrari Severo, técnico dos Laboratórios de Ensino do Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, pelo seu auxílio na montagem e realização dos experimentos.

Referências

- [1] C.M. Porto, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **31**, 4601 (2009).
- [2] A. Campos e E.C. Ricardo, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **34**, 3601 (2012).
- [3] C.M. Porto e M.B.D.S.M. Porto, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **31**, 4601 (2009).
- [4] V.B. Leite e A.V. Andrade-Neto, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **45**, 20220321 (2023).
- [5] L.F. Dias, *A Noção de Referencial: uma Interação Cognitiva entre Mecânica Newtoniana e a Relativística*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre (2010).

- [6] A. Einstein e L. Infeld, *A evolução da Física* (Zahar, Rio de Janeiro, 2008), 1 ed.
- [7] M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica: Mecânica* (Blucher, São Paulo, 2013), v. 1, 5 ed.
- [8] H.D. Young e R.A. Freedman, *Física I: Mecânica* (Addison Wesley, São Paulo, 2008), 12 ed.
- [9] M. Pietrocola, A. Pogibin, R. Andrade e T.R. Romero, *Física em Contextos, 2: ensino médio* (Editora do Brasil, São Paulo, 2016), 1 ed.
- [10] I. Diniz e A.F. Faria, *Revista de Enseñanza de la Física* **33**, 87 (2021).
- [11] L.A. Heidemann, I.S. Araújo e E.A. Veit, *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, **29**, 965 (2012).
- [12] M.S. Silva, L.A. Heidemann e R.R. Campomanes, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **45**, e20230082 (2023).
- [13] V.L.B. De Jesus, *Experimentos e Vídeoanálise – Dinâmica* (Livraria da Física, São Paulo, 2014) 1 ed.
- [14] F.L. Silveira, CREF: Referenciais inerciais e não inerciais: por que a Terra pode ser tomada como um bom referencial inercial?, disponível em: <https://cref.if.ufrgs.br/?contact-pergunta=referenciais-inerciais-e-nao-inerciais-por-que-a-terra-pode-ser-tomada-como-um-bom-referencial-inercial>, acessado em: 10/08/2023.
- [15] F.L. Silveira, *Revista de Enseñanza de la Física* **10**, 29 (1995).
- [16] D. Halliday, R. Resnick e J. Walker, *Fundamentos de Física: gravitação, ondas e termodinâmica* (LTC, Rio de Janeiro, 2009), v. 2, 8 ed.
- [17] R.A. Martins, *Cadernos de História e Filosofia da Ciência* **9**, 69 (1986).
- [18] R.P. Carvalho, *Física do dia a dia: 105 perguntas e respostas sobre física fora da sala de aula* (Autêntica Editora, Belo Horizonte, 2019), v. 1, 3 ed.