

## EQUAÇÕES HIPSOMÉTRICAS PARA *Toona ciliata* COM INCLUSÃO DE COVARIANTES

### HYPSONOMETRIC EQUATIONS FOR *Toona ciliata* WITH INCLUSION OF COVARIATES

Joyce de Almeida Alves<sup>1</sup> Natalino Calegario<sup>2</sup> Sebastião Carlos da Silva Rosado<sup>3</sup>  
Geisi Azevedo Silva<sup>4</sup> Ernani Lopes Possato<sup>5</sup> Elliezer de Almeida Melo<sup>6</sup>

#### RESUMO

A relação hipsométrica é influenciada por muitas variáveis e isso dificulta a sua modelagem. A adição de covariantes em uma equação, por meio da decomposição de seus parâmetros, pode melhorar a precisão da mesma e auxiliar na construção de modelos hipsométricos genéricos. Neste estudo objetivou-se avaliar equações hipsométricas e testar a inclusão de covariantes para *Toona ciliata*, espécie ainda pouco estudada. Foram avaliados quatro modelos não lineares para representar a altura em função da idade. O efeito da progênie foi incluído em uma das equações por meio da decomposição dos parâmetros. Para representar a variação da altura em função do diâmetro foram testadas cinco equações, sendo que quatro delas não lineares. Os parâmetros de uma das equações foram decompostos e associados às variáveis: progênie, idade e altura dominante e codominante. A equação Assintótica foi mais precisa para representar o crescimento em altura. A inclusão da variável progênie na equação Logística aumentou sua precisão. Dentre as equações avaliadas para a relação altura-diâmetro, a Exponencial foi a de menor precisão. A inclusão de covariantes na equação Logística melhorou a precisão do ajuste e dentre as covariantes testadas a altura dominante e codominante permitiu um ganho de precisão de 23%.

**Palavras-chave:** cedro-australiano; relação altura-idade; relação altura-diâmetro; covariáveis.

#### ABSTRACT

The height-diameter relationship is influenced by many variables, making difficult its modeling. The inclusion of covariates by the decomposition of model parameters can improve the model precision and help develop generic height-diameter models. This study aimed to evaluate hypsometric equations and examine the inclusion of covariates for *Toona ciliata*, species still poorly studied. Four nonlinear equations were evaluated to represent the height as a function of age. The effect of the progeny was included in one of the equations, decomposing the parameters. Five equations, which four are nonlinear ones, were tested to represent the variation of height as a function of the diameter. The parameters of the logistic equation were decomposed and associated to the variable progenies, age, dominant and codominant height. The Asymptotic equation was the most precise to represent the height growth. The inclusion of the variable progeny in the Logistic equation improved its precision. From the set of equations tested for the height-

1 Engenheira Florestal, MSc., Doutoranda do Programa de Pós-graduação em Engenharia Florestal, Universidade Federal de Lavras, Campus Universitário, Caixa Postal 3037, CEP 37200-000, Lavras (MG), Brasil. joyce\_a.alves@yahoo.com.br

2 Engenheiro Florestal, PhD., Professor do Departamento de Ciências Florestais, Universidade Federal de Lavras, Campus Universitário, Caixa Postal 3037, CEP 37200-000, Lavras (MG), Brasil. calegari@dcf.ufla.br

3 Engenheiro Florestal, PhD., Professor do Departamento de Ciências Florestais, Universidade Federal de Lavras, Campus Universitário, Caixa Postal 3037, CEP 37200-000, Lavras (MG), Brasil. scrosado@dcf.ufla.br

4 Engenheira Florestal, MSc, Instituto Bioterra, Av. Enos Sadock de Sá, 216-B, Suíssa, CEP 49050-300, Aracaju (SE), Brasil. azevedogeisi@yahoo.com.br

5 Engenheiro Florestal, Dr., Universidade Federal de Uberlândia, Campus Monte Carmelo, Rodovia LMG 746, km 1, CEP 38500-000, Monte Carmelo (MG), Brasil. epossato@yahoo.com.br

6 Engenheiro Florestal, MSc., Professor do Instituto Federal Goiano - Campus Morrinhos, BR-153, Km 633, Zona Rural, CEP 75650-000, Morrinhos (GO), Brasil. elliezer.melo@ifgoiano.edu.br

Recebido para publicação em 2/09/2013 e aceito em 3/09/2015

diameter relationship, the Exponential equation was the least precise. The inclusion of covariates in the logistic equation improved its precision and among all tested covariates, the dominant and codominant height variable presented the highest gain in precision (23%).

**Keywords:** *Toona ciliata*; height-age relationship; height-diameter relationship; covariates.

## INTRODUÇÃO

As florestas plantadas no Brasil são compostas, principalmente, pelas espécies dos gêneros *Eucalyptus* e *Pinus*, que representaram 71,9% e 20,5% da área total de plantios florestais em 2014, respectivamente (INDÚSTRIA BRASILEIRA DE ÁRVORES, 2015). Recentemente, em consequência de seu potencial produtivo e madeireiro, a espécie *Toona ciliata* (cedro-australiano) tem sido empregada em reflorestamentos em diferentes regiões do país.

O conhecimento do comportamento das árvores de cedro-australiano em relação ao crescimento em diâmetro, altura e volume, encontra-se defasado em relação àquelas espécies mais plantadas. Na prática, o uso de modelos estatísticos para descrever as relações existentes entre as variáveis dendrométricas é amplamente difundido. A modelagem da altura total em função da idade e ou diâmetro, por exemplo, é utilizada na estimativa da altura de árvores, a partir de amostras realizadas em campo. Essa modelagem permite a redução de custos no inventário, já que a medição da variável altura resulta em elevados custos por ser um procedimento mais demorado, complexo e sujeito a erros.

Além do diâmetro a altura do peito e da idade (CURTIS, 1967), a variação da altura pode ser explicada por outras variáveis, como, altura dominante, diâmetro dominante, área basal, número de árvores por hectare (CRECENTE-CAMPO et al., 2014; MISIR, 2010; STANKOVA; DIÉGUEZ-ARANDA, 2013), sítio (MENDONÇA et al., 2011) e material genético (MENDONÇA; CARVALHO; CALEGARIO, 2015).

Geralmente, quanto mais variáveis explicativas são incluídas em uma equação, maior a precisão e melhores são as estimativas obtidas pela mesma. A inclusão de novas variáveis permite também a generalização do uso da equação, entretanto, pode torná-la complexa e com excesso de parâmetros, desta maneira deve-se equilibrar a precisão com a parcimônia.

Modelos lineares e não lineares são utilizados na relação hipsométrica. A fundamentação biológica na forma funcional dos modelos não lineares justifica a superioridade destes em termos de estabilidade quando aplicados a diferentes florestas (BATISTA; COUTO; MARQUESINI, 2001). Diferenciam-se, principalmente, em relação ao valor do parâmetro assíntota, mesmo quando ajustados para os mesmos dados (ZHANG, 1997).

Mesmo diante do crescente interesse pelo cedro-australiano, informações biométricas da espécie ainda são escassas. Neste contexto, o presente trabalho foi conduzido com o objetivo de avaliar equações hipsométricas e testar a inclusão de covariantes para *Toona ciliata*.

## MATERIAL E MÉTODOS

### Caracterização da área de estudo

O estudo foi realizado em área pertencente à empresa Bela Vista Florestal, localizada no município de Campo Belo (20°53'49"S e 45°16'37"W), sul de Minas Gerais.

A área de estudo é um teste de procedência/progênie de *Toona ciliata* (cedro-australiano) que foi implantado em 6 de fevereiro de 2008 com 78 progênies de meio irmãos, no espaçamento 3 x 3 m. Estas progênies foram formadas a partir de sementes coletadas em árvores matrizes de polinização livre, selecionadas nos estados australianos de *Queensland* e *New South Wales*. O delineamento foi o de blocos casualizados, com três repetições e 16 plantas por unidade amostral (4 linhas x 4 plantas).

Cinco progênies de *Queensland* foram selecionadas para este estudo com base no desenvolvimento dos plantios clonais com mudas produzidas a partir do teste de procedência/progênie.

## Base de dados

A base de dados foi composta por quatro medições irregularmente espaçadas no tempo, realizadas aos 5, 16, 30 e 51 meses de idade. As variáveis medidas para cada progênie foram altura total -  $H_i$  (m) em todas as medições e diâmetro a altura do peito -  $DAP_i$  (cm) nas duas últimas medições.

Apenas as quatro plantas centrais de cada unidade amostral foram consideradas para modelar a altura total em função da idade, já que as árvores da bordadura podem ter suas características biométricas alteradas dependendo do desenvolvimento da progênie vizinha (Figura 1a). Todos os pares de dados de  $H_i$  (m) e  $DAP_i$  (cm) provenientes das 2ª e 3ª medições foram utilizados na modelagem da relação altura-diâmetro (Figura 1b).

## Equações avaliadas

### Relação altura-idade

Foram avaliadas quatro equações para representar a variação das alturas totais das árvores de cedro-australiano em função da idade (Equação 1 a 4).

a. Exponencial: 
$$H_i = \phi_1 \exp\left(\frac{\phi_2}{I_i}\right) + \varepsilon_i \quad (1)$$

b. Assintótica: 
$$H_i = \phi_1 + (\phi_2 - \phi_1) \exp[-\exp(\phi_3) I_i] + \varepsilon_i \quad (2)$$

c. Logística: 
$$H_i = \frac{\phi_1}{1 + \exp[(\phi_2 - I_i)/\phi_3]} + \varepsilon_i \quad (3)$$

d. Gompertz: 
$$H_i = \phi_1 \left[ \exp(-\exp(\phi_2 - \phi_3 I_i)) \right] + \varepsilon_i \quad (4)$$

Em que:  $H_i$  = altura total da  $i$ -ésima árvore (m);  $I_i$  = Idade da  $i$ -ésima árvore (meses);  $\phi_s$  = parâmetros estimados;  $\varepsilon_i$  = erro aleatório.

Dentre as equações, a Logística é a de mais fácil interpretação dos parâmetros (CALEGARIO et al., 2005) e gera, assim como a Gompertz, uma curva de forma sigmoidal. Na equação Logística, o parâmetro  $\phi_1$  é a assíntota da equação e representa o valor médio máximo da variável resposta no tempo

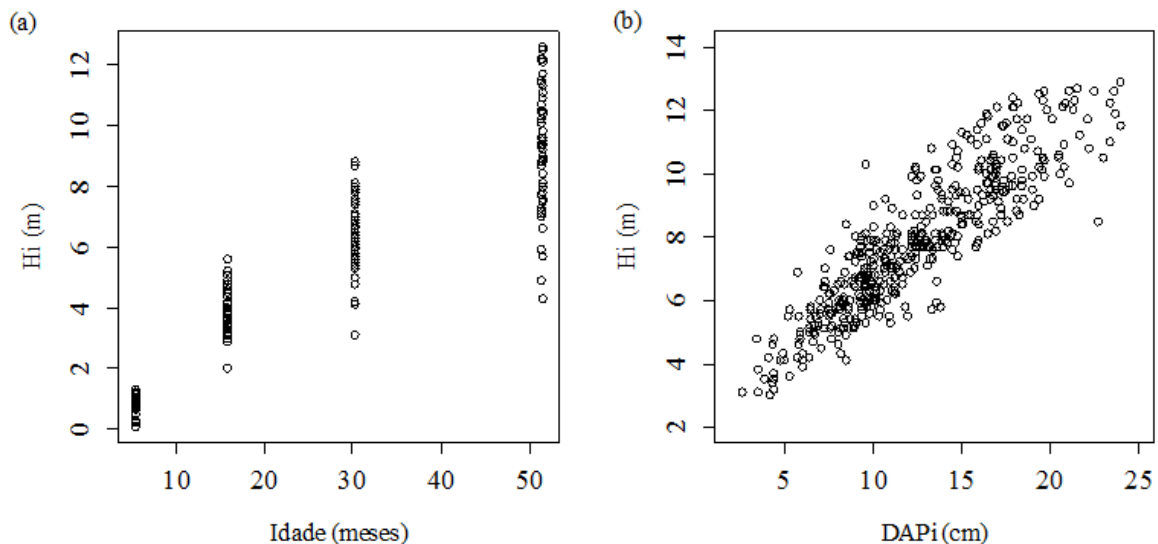


FIGURA 1: Relação entre altura-idade (a) e altura-diâmetro (b) para árvores de *Toona ciliata*.  
 FIGURE 1: Height-age (a) and height-diameter (b) relationships for *Toona ciliata* trees.

e a sua unidade é a mesma da variável resposta. O parâmetro  $\phi_2$ , conhecido como o ponto de inflexão da curva, é o valor de  $x$  no qual a resposta é  $\phi_1/2$  e representa a taxa máxima de crescimento do organismo.  $\phi_3$  é um parâmetro de escala que representa a distância no eixo  $x$  entre o ponto de inflexão e o ponto em que a resposta é aproximadamente  $0,73\phi_1$ .

Na equação Assintótica,  $\phi_1$  é a assíntota,  $\phi_2$  é o valor de  $y$  para  $x=0$  e  $\phi_3$  é o logaritmo da taxa constante (PINHEIRO; BATES, 2000). Para a equação de Gompertz,  $\phi_1$  também representa a assíntota e para que a equação gere uma curva sigmoide positiva, que é o caso do crescimento cumulativo em altura, os parâmetros  $\phi_2$  e  $\phi_3$  devem ser negativos (RITZ; STREIBIG, 2008).

Com o objetivo de verificar diferenças entre o crescimento cumulativo das progênies, a equação Logística foi selecionada para a inclusão da variável progênie. Essa equação foi escolhida por possuir parâmetros de fácil interpretação. Após a análise do efeito significativo da progênie no parâmetro, este foi decomposto e associado a uma variável indicadora, apresentando a seguinte forma:

$$H_i = \frac{\phi_{10} + \sum_{i=1}^4 \phi_{1i} \text{Pr og}_i}{1 + \exp \left[ \left( \phi_{20} + \sum_{i=1}^4 \phi_{2i} \text{Pr og}_i \right) - I_i / \left( \phi_{30} + \sum_{i=1}^4 \phi_{3i} \text{Pr og}_i \right) \right]} + \varepsilon_i \quad (5)$$

Em que:  $H_i$  = altura total da  $i$ -ésima árvore (m);  $I_i$  = Idade da  $i$ -ésima árvore (meses);  $\phi_s$  = parâmetros estimados;  $\sum_{i=1}^4 \phi_{ji} \text{Pr og}_i$  = parâmetro associado a  $i$ -ésima progênie;  $\text{Pr og}_i$  = variável indicadora com valor 1 para a  $i$ -ésima progênie e 0 para as demais progênies, para o  $j$ -ésimo parâmetro.

### Relação altura-diâmetro

Foram ajustadas as seguintes equações para a relação da altura total ( $H_i$ ) em função do diâmetro ( $DAP_i$ ):

Polinomial de grau 2: 
$$H_i = \beta_0 + \beta_1 DAP_i + \beta_2 DAP_i^2 + \varepsilon_i \quad (6)$$

Exponencial: 
$$H_i = \phi_1 \exp \left( \frac{\phi_2}{DAP_i} \right) + \varepsilon_i \quad (7)$$

Logística: 
$$H_i = \frac{\phi_1}{1 + \exp \left[ (\phi_2 - DAP_i) / \phi_3 \right]} + \varepsilon_i \quad (8)$$

Gompertz: 
$$H_i = \phi_1 \left[ \exp \left( -\exp(\phi_2 - \phi_3 DAP_i) \right) \right] + \varepsilon_i \quad (9)$$

Weibull: 
$$H_i = \phi_1 - \phi_2 \exp \left[ -\exp(\phi_3) DAP_i^{\phi_4} \right] + \varepsilon_i \quad (10)$$

Em que:  $H_i$  = altura total da  $i$ -ésima árvore (m);  $DAP_i$  = diâmetro a altura do peito (cm);  $\phi_s$  e  $\beta_s$  = parâmetros estimados;  $\varepsilon_i$  = erro aleatório.

A relação altura-diâmetro é afetada por diversas variáveis, como idade, sítio, espaçamento, material genético e tratamentos silviculturais. Portanto, as variáveis “progênie”, “altura média das árvores dominantes e codominantes” e “idade” foram incluídas na equação Logística por meio da decomposição de parâmetros.

A Equação 11 representa essa equação com todas as variáveis incluídas, entretanto, optou-se pela inclusão de cada variável de forma separada, gerando três novas equações. A inclusão de todas as variáveis em uma única equação gera muitas combinações a serem testadas, além disso, segundo Mendes et al. (2006), as variáveis incluídas de forma combinada a cada um dos parâmetros estão relacionadas umas com as outras, sendo que a retirada ou a inclusão de uma variável a um parâmetro modifica significativamente a estrutura de todo o ajuste.

$$H_i = \frac{\phi_{10} + \sum_{i=1}^4 \phi_{1i} \text{Pr og}_{(i)} + \phi_{15} \overline{\text{HDC}} + \phi_{16} I}{1 + \exp \left[ \frac{\left( \phi_{20} + \sum_{i=1}^4 \phi_{2i} \text{Pr og}_{(i)} + \phi_{25} \overline{\text{HDC}} + \phi_{26} I \right) - \text{DAP}_i}{\left( \phi_{30} + \sum_{i=1}^4 \phi_{3i} \text{Pr og}_{(i)} + \phi_{35} \overline{\text{HDC}} + \phi_{36} I \right)} \right]} + \varepsilon_i \quad (11)$$

Em que:  $H_i$  = altura total da  $i$ -ésima árvore (m);  $\overline{\text{HDC}}$  = altura média das dominantes e codominantes, segundo o conceito de Hart (m);  $I$  = Idade (meses);  $\phi_{j0}$  = valor do intercepto para o  $j$ -ésimo parâmetro;  $\sum_{i=1}^4 \phi_{ji} \text{Pr og}_i$  = parâmetro associado a  $i$ -ésima progênie;  $\text{Pr og}_i$  = variável indicadora com valor 1 para o  $i$ -ésima progênie e 0 para as demais progênies, para o  $j$ -ésimo parâmetro;  $\phi_{j5}$  e  $\phi_{j6}$  = Efeitos associados a  $\overline{\text{HDC}}$  e  $I$  para o  $j$ -ésimo parâmetro.

### Ajuste e seleção das equações

As equações foram ajustadas no programa R<sup>®</sup> versão 2.15.2 (R CORE TEAM, 2012). As funções *lm* e *nls*, disponíveis no pacote *stats*, foram utilizadas para o ajuste do modelo linear e dos modelos não lineares, respectivamente. As equações com inclusão de covariantes foram ajustadas por meio da função *gnls* do pacote *nlme* (PINHEIRO; BATES, 2000).

A precisão das equações foi verificada pela análise gráfica dos resíduos e pelas seguintes estatísticas:

#### a. Erro padrão residual ( $S_{yx}$ )

O erro padrão residual expressa o quanto em termos médios os valores observados variam em relação aos estimados. A unidade é a mesma da variável dependente, sendo que quanto mais próximo de zero, mais eficiente é a equação.

$$S_{yx} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y - \hat{y})^2}{n - p}} \quad (12)$$

Em que:  $S_{yx}$  = erro padrão residual na unidade da variável resposta;  $y$  = valor observado;  $\hat{y}$  = valor estimado;  $n$  = número de observações;  $p$  = número de parâmetros.

#### b. Critério de informação de Akaike (CIA) e Critério de informação Bayesiano (CIB)

Os critérios CIA (SAKAMOTO; ISHIGURO; KITAGAWA, 1986) e CIB (SCHWARZ, 1978) permitem a seleção de equações mais parcimoniosas, pois penalizam aquelas com número excessivo de variáveis independentes. Quanto menores os valores de CIA e CIB melhor a equação.

$$\text{CIA} = -2 \ln(mv) + 2p \quad (13)$$

$$\text{CIB} = -2 \ln(mv) + p \ln(n) \quad (14)$$

Em que:  $p$  = número de parâmetros da equação;  $mv$  = valor da máxima verossimilhança;  $n$  = número total de observações.

#### c. Teste da razão da máxima verossimilhança (TRMV)

O teste da razão da máxima verossimilhança é dado por:

$$\text{TRMV} = 2 \left[ \ln(mv_2) - \ln(mv_1) \right] \quad (15)$$

Em que:  $\ln$  = logaritmo natural;  $mv_2$  = máxima verossimilhança da equação 2;  $mv_1$  = máxima verossimilhança da equação 1.

Este valor é testado pela estatística  $\chi^2$  com  $p_2$  (número de parâmetros da equação 2) -  $p_1$  (número de parâmetros da equação 1) graus de liberdade. Se o valor de TRMV for significativo a 5%, a equação com maior valor de máxima verossimilhança apresenta maior precisão.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

### Relação altura-idade

Os resultados das estimativas dos parâmetros e os valores de erro padrão residual encontram-se na Tabela 1.

Verifica-se que todas as equações obtiveram seus parâmetros significativos, portanto, podem ser utilizadas para representar a variação da altura total em função da idade. A equação assintótica apresentou o menor valor de erro padrão residual, mas as outras equações apresentaram valores semelhantes.

Em relação às correlações entre os parâmetros, a equação Assintótica apresentou alta correlação entre o parâmetro assintota ( $\phi_1$ ) e o parâmetro escala ( $\phi_3$ ). A de Gompertz também apresentou alta correlação entre esses parâmetros e também entre o parâmetro inflexão ( $\phi_2$ ) e o parâmetro escala ( $\phi_3$ ). A Logística apresentou um valor maior apenas entre  $\phi_1$  e  $\phi_2$ . Os parâmetros da Exponencial foram altamente correlacionados. Uma correlação baixa entre pares de parâmetros indica que esses são necessários na equação e conseqüentemente que não existe um número excessivo de parâmetros. Nesse sentido, isso pode ser considerado uma característica positiva da Logística.

Na Tabela 2, os menores valores de CIA e CIB e o maior valor do logaritmo natural da máxima verossimilhança confirmam a superioridade da equação assintótica.

As curvas de crescimento cumulativo possuem como característica a forma sigmoide e, mesmo para períodos curtos de crescimento, tendem a seguir este padrão (HUSCH; MILLER; BEERS, 1982). Entretanto, a base de dados do estudo é atípica em relação às bases comumente utilizadas em estudos de crescimento florestal, as quais possuem dados de unidades amostrais medidas em diferentes espaços de tempo e alocadas em florestas com diferentes idades, apresentando um ponto de inflexão evidente.

Na base de dados deste estudo, o ponto de inflexão não está claro, principalmente, porque as unidades amostrais foram alocadas em um povoamento de mesma idade e foram medidas sempre na mesma época, apresentando assim, esta tendência assintótica (Figura 2). Esse pode ser um dos motivos da equação assintótica ter representado melhor os dados.

Os resíduos foram semelhantes entre as equações Logística e Gompertz, com problemas de superestimativa e subestimativa. Esses problemas, apesar de menos evidentes, ocorreram para a equação Exponencial. Para a Assintótica, os resíduos apresentaram uma melhor distribuição ao redor de zero (Figura 3).

Observa-se um aumento da variabilidade dos resíduos com os valores ajustados para todas as equações. Esse padrão em forma de cunha pode estar ligado a correlação entre as observações de uma mesma árvore e não a heterocedasticidade (PINHEIRO; BATES, 2000). Entretanto, na Figura 2, nota-se um aumento da amplitude dos dados à medida que a idade aumenta, podendo ser um indício de que a base de dados é heterocedástica.

Estas violações podem ser remediadas modelando a estrutura geral de covariância, utilizando mínimos quadrados generalizados (CALEGARIO et al., 2005), ou modelos de efeito misto (FANG; BAILEY, 2001).

### Inclusão de covariante

Os gráficos apresentados na Figura 4 representam a tendência de crescimento em altura para cada progênie. Nota-se que as progênies P24, P78 e P79 apresentam uma tendência de crescimento superior.

Antes do ajuste, foi realizada uma análise exploratória para saber quais parâmetros da equação Logística seriam influenciados pelo efeito da progênie. A Figura 5 sugere que somente o parâmetro assintota varia com a progênie. Sendo assim, a inclusão dessa variável foi testada apenas nesse parâmetro.

TABELA 1: Estimativas e correlações para as equações da altura em função da idade.

TABLE 1: Estimates and correlations for height-age equations.

Parâmetro	Estimativa	EP	Valor-t	Valor-p	Correlações	
					$\phi_2$	$\phi_3$
Exponencial ( $S_{yx}=1,29$ m)						
$\phi_1$	12,86196	0,4063	31,65	<0,0001	-0,90	-
$\phi_2$	-18,54188	0,9981	-18,58	<0,0001	-	-
Assintótica ( $S_{yx}=1,25$ m)						
$\phi_1$	12,235475	0,8954	13,67	<0,0001	0,68	-0,98
$\phi_2$	-0,936185	0,2905	-3,22	0,0015	-	-0,78
$\phi_3$	-3,554290	0,1436	-24,76	<0,0001	-	-
Gompertz ( $S_{yx}=1,28$ m)						
$\phi_1$	9,966986	0,3342	29,82	<0,0001	-0,47	0,84
$\phi_2$	1,128994	0,0741	15,24	<0,0001	-	-0,81
$\phi_3$	0,069692	0,0058	12,02	<0,0001	-	-
Logística ( $S_{yx}=1,33$ m)						
$\phi_1$	9,512695	0,2453	38,78	<0,0001	0,79	0,66
$\phi_2$	21,421514	0,8598	24,91	<0,0001	-	0,58
$\phi_3$	9,324290	0,6646	14,03	<0,0001	-	-

Em que: EP = erro padrão;  $S_{yx}$  = erro padrão residual;  $\phi_1$ = parâmetro assintota;  $\phi_2$ = parâmetro inflexão;  $\phi_3$ = parâmetro escala.

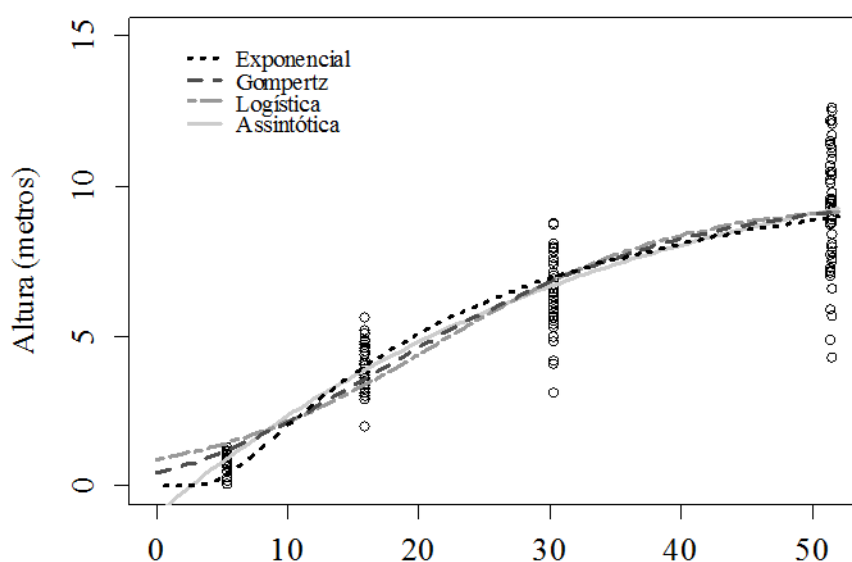


FIGURA 2: Curvas ajustadas para as equações de altura em função da idade.

FIGURE 2: Fitted curves for height-age equations.

TABELA 2: Critérios de informação estatística para as equações ajustadas.  
 TABLE 2: Information criterion statistics for fitted equations.

Equação	CIA	CIB	lnmv
Exponencial	776,58	786,91	-385,29
Assintótica	762,20	775,97	-377,10
Gompertz	775,37	789,14	-383,68
Logística	790,89	804,66	-391,44

Em que: CIA = critério de informação de Akaike; CIB = critério de informação Bayesiano; lnmv = logaritmo neperiano da máxima verossimilhança.

Observou-se a significância do efeito da progênie no parâmetro assíntota como sugerido pela Figura 5. Todas as progênies associadas ao parâmetro assíntota foram significativas (Tabela 3), sugerindo que elas atingem valores médios máximos em alturas diferentes.

A comparação entre a equação reduzida (sem o efeito da progênie) e completa (com o efeito da progênie) é apresentada na Tabela 4. O teste da razão da máxima verossimilhança mostra a superioridade da equação com a inclusão do efeito da progênie na assíntota.

A inclusão de covariantes, como o material genético ou outras referentes à árvore individual e/ou povoamento, tem sido apresentada em diversos trabalhos como um método de obter estimativas mais precisas (GUIMARÃES et al., 2009; MENDONÇA et al., 2011; MENDONÇA; CARVALHO; CALEGARIO, 2015). Além disso, esta técnica permite o desenvolvimento de modelos genéricos, que eliminam a necessidade de se estratificar o povoamento e conseqüentemente reduzem o número de equações ajustadas no inventário florestal.

### Relação altura-diâmetro

Os parâmetros estimados foram significativos para todas as equações e os valores de  $S_{yx}$  foram semelhantes. A equação Exponencial apresentou o maior valor de erro padrão residual e a Polinomial de grau 2 o menor valor (Tabela 5). Entretanto, esses valores foram semelhantes, com diferença de apenas de 10 cm entre o mais preciso e o menos preciso.

Os critérios de informação de Akaike e Bayesiano confirmam a semelhança em termos de precisão entre as funções Polinomial de grau 2, Gompertz, Logística e Weibull. Além disso, evidenciam a inferioridade

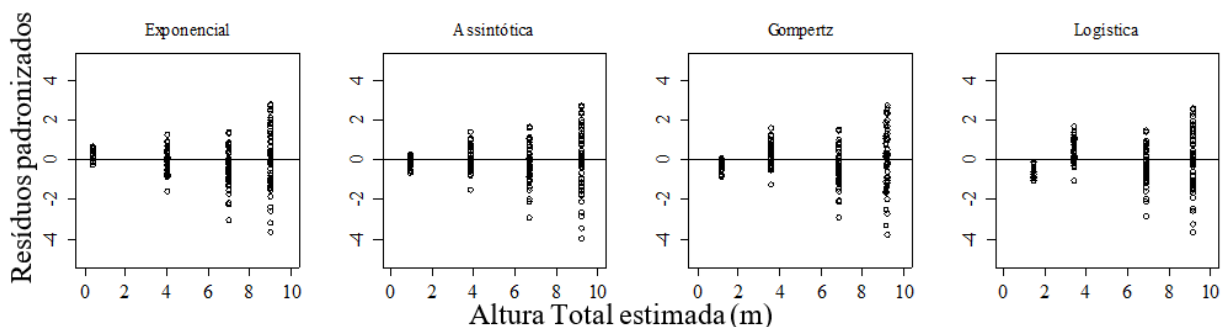


FIGURA 3: Resíduos padronizados versus alturas estimadas para as equações Exponencial, Assintótica, Gompertz e Logística.

FIGURE 3: Standardized residuals versus height fitted for Exponential, Asymptotic, Gompertz and logistic equations.



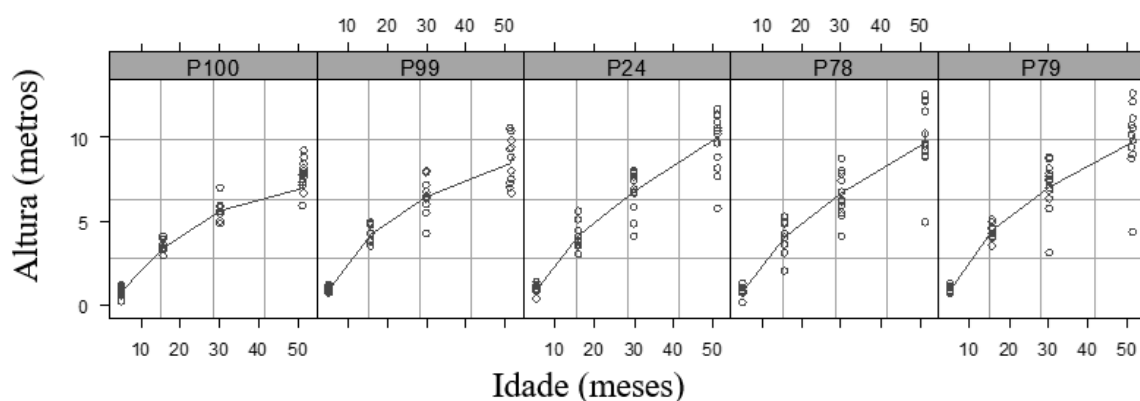


FIGURA 4: Altura total observada por árvore para diferentes idades e progênes.

FIGURE 4: Total tree height observed for different ages and progenies.

TABELA 3: Parâmetros estimados para a equação com covariante progênie associada ao parâmetro assíntota e respectivas estatísticas.

TABLE 3: Parameters estimated for the equation with progeny as covariate associated to the asymptote parameter and the respective statistics.

Parâmetro	VA	Estimativa	EP	Valor-t	Valor-p
	Intercepto (P100)	8,039793	0,3241	24,80	<0,0001
Assíntota	P24	1,885445	0,4011	4,70	<0,0001
	P78	2,090506	0,4015	5,21	<0,0001
	P79	2,284286	0,4019	5,68	<0,0001
	P99	1,180803	0,3994	2,96	0,0035
Inflexão	-	21,490809	0,7936	27,08	<0,0001
Escala	-	9,348539	0,6129	15,25	<0,0001

Em que: VA = variável associada ao parâmetro; EP = erro padrão; P100 = progênie 100; P24 = progênie 24; P78 = progênie 78; P79 = progênie 79 e P99 = progênie 99.

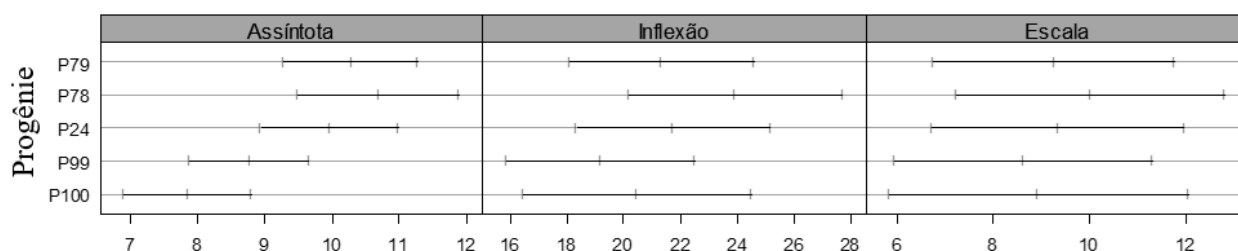


FIGURA 5: Intervalos de confiança de 95% para os parâmetros da equação Logística por progênie.

FIGURE 5: Ninety-five percent confidence intervals on the logistic equation parameters for each progeny.

TABELA 4: Comparação entre a equação Logística reduzida sem o efeito da progênie e a equação Logística completa com o efeito da progênie na assíntota.

TABLE 4: Comparison between the reduced logistic equation without the progeny effect and the complete logistic equation with the progeny effect.

Equação	GL	CIA	CIB	lnmv	TRMV	Valor-p
1- Reduzida (sem progênie)	4	790,89	804,66	-391,44		
2- Completa (com progênie)	8	757,96	785,50	-370,98	40,93	<0,0001

Em que, GL= grau de liberdade; CIA = critério de Informação de Akaike; CIB = critério de informação Bayesiano; lnmv = logaritmo neperiano da máxima verossimilhança; TRMV = Teste da razão da máxima verossimilhança; Valor-p = valor da probabilidade acima do valor do qui-quadrado calculado.

TABELA 5: Parâmetros estimados para as equações da altura como função do diâmetro e respectivas estatísticas.

TABLE 5: Estimated parameters for the height-diameter equations and the respective statistics.

Parâmetro	Estimativa	EP	Valor-t	Valor-p
Polinomial de grau 2 ( $S_{yx} = 0,98$ m)				
$\beta_0$	1,4737362	0,3329	4,43	<0,0001
$\beta_1$	0,6030479	0,0530	11,37	<0,0001
$\beta_2$	-0,0065403	0,0020	-3,32	0,0010
Exponencial ( $S_{yx} = 1,08$ m)				
$\phi_1$	15,296834	0,2972	51,47	<0,0001
$\phi_2$	-7,653869	0,2397	-31,94	<0,0001
Logística ( $S_{yx} = 0,99$ m)				
$\phi_1$	13,478386	0,6114	22,05	<0,0001
$\phi_2$	9,903211	0,6713	14,75	<0,0001
$\phi_3$	6,944107	0,5519	12,58	<0,0001
Gompertz ( $S_{yx} = 0,99$ m)				
$\phi_1$	15,330686	1,0976	13,97	<0,0001
$\phi_2$	1,935784	0,0565	34,25	<0,0001
$\phi_3$	0,916577	0,0094	97,18	<0,0001
Weibull ( $S_{yx} = 0,99$ m)				
$\phi_1$	14,165995	2,0588	6,88	<0,0001
$\phi_2$	11,313355	2,6123	4,33	<0,0001
$\phi_3$	-4,385523	0,6740	-6,51	<0,0001
$\phi_4$	1,537996	0,3170	4,86	<0,0001

Em que: EP= erro padrão;  $S_{yx}$  = erro padrão residual.

da equação Exponencial para a representação dos dados (Tabela 6).

Nota-se nos gráficos de resíduos, que a equação Exponencial subestimou até cinco metros (Figura 6). Além disso, essa equação gerou uma curvatura diferente da tendência dos dados (Figura 7). Para as demais funções, os gráficos foram semelhantes em relação à dispersão dos resíduos e não indicaram problemas de superestimativa e ou subestimativa. Entretanto, a variância até 5 m foi menor, mantendo-se constante somente a partir desse valor (Figura 6). A pressuposição de normalidade dos erros não foi violada em nenhum dos ajustes.

Resultados semelhantes foram encontrados por Mendonça et al. (2011), ao testar modelos

TABELA 6: Critérios de informação estatística para as equações ajustadas.

TABLE 6: Information criterion statistics for fitted equations.

Equação	CIA	CIB	lnmv
Polinomial de grau 2	1253,42	1269,80	-622,71
Exponencial	1333,40	1345,68	-663,70
Gompertz	1252,13	1268,52	-622,07
Logística	1251,76	1268,15	-621,88
Weibull	1254,09	1274,57	-622,05

Em que: CIA = critério de informação de Akaike; CIB = critério de informação Bayesiano; lnmv = logaritmo neperiano da máxima verossimilhança.

hipsométricos para a espécie *Pinus caribaea* var. *hondurensis*. Os autores verificaram que os modelos Polinomial de grau 2 e Logístico apresentaram menor erro padrão e que o de Curtis, ou Exponencial, apresentou o pior ajuste.

Batista, Couto e Marquesini (2001), ao analisar a estabilidade de modelos hipsométricos, verificaram que os polinomiais são inadequados e artificiais para representar a curva altura-diâmetro, sendo que os polinômios de segundo e terceiro grau apresentaram uma curvatura inexistente. Para a equação Exponencial ajustada na forma linear, esses autores observaram uma semelhança em relação a outros modelos não lineares, entretanto, com uma curvatura menos acentuada. No entanto, no presente estudo, a equação Exponencial diferiu das demais equações testadas e apresentou uma curvatura diferente da tendência dos dados.

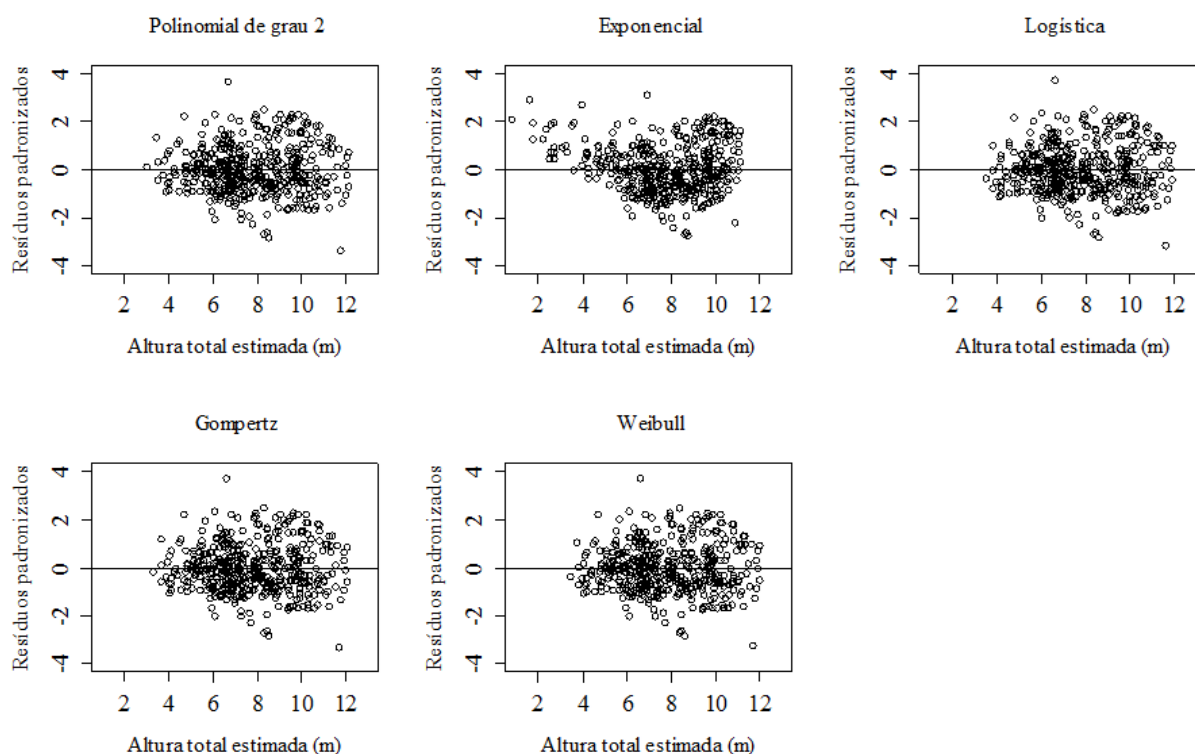


FIGURA 6: Resíduos padronizados versus alturas estimadas para as equações Polinomial de grau 2, Exponencial, Logística, Gompertz e Weibull.

FIGURE 6: Standardized residuals versus height fitted for Polinomial of degree 2, Exponential, Logistic, Gompertz and Weibull equations.

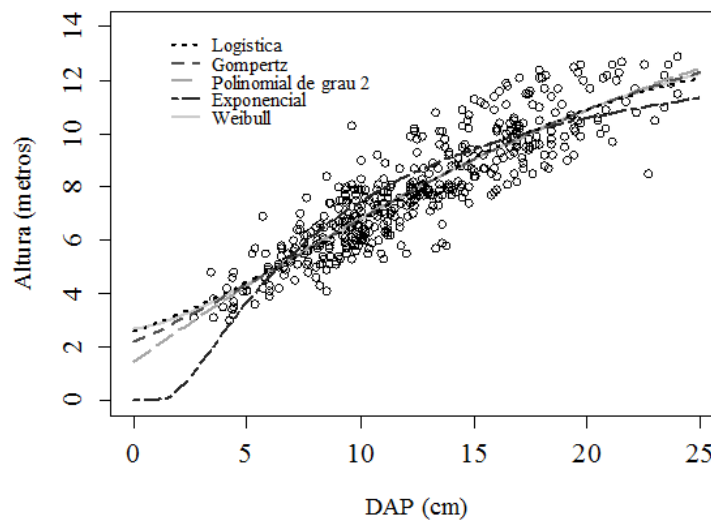


FIGURA 7: Curvas ajustadas para as equações da altura em função do diâmetro.  
 FIGURE 7: Fitted curves for height-diameter equations.

TABELA 7: Parâmetros estimados para cada equação com covariantes e respectivas estatísticas.  
 TABLE 7: Parameters estimated of each equation with covariates and respective statistics.

Parâmetro	VA	Estimativa	EP	Valor-t	Valor-p
Equação com Progênie - $S_{yx} = 0,89$ m; CIA = 1164,74; CIB = 1213,89					
Assíntota	Intercepto (P100)	11,357760	0,7147	15,89	<0,0001
	P24	1,030414	0,6450	1,60	0,1109
	P78	3,888009	0,7757	5,01	<0,0001
	P79	2,413434	0,6583	3,67	0,0003
	P99	1,105889	0,7010	1,58	0,1154
Inflexão	Intercepto (P100)	8,737395	0,9953	8,78	<0,0001
	P24	-0,324586	1,0412	-0,31	0,7554
	P78	2,298370	0,9846	2,33	0,0200
	P79	0,865478	1,0039	0,86	0,3891
Escala	P99	-0,077880	1,0655	-0,07	0,9418
Escala	-	6,866805	0,5150	13,33	<0,0001
Equação com HDC - $S_{yx} = 0,76$ m; CIA = 1022,55; CIB = 1047,13					
Assíntota	Intercepto	2,418107	0,5196	4,65	<0,0001
	HDC	0,747491	0,0439	17,04	<0,0001
Inflexão	Intercepto	0,405585	1,1185	0,36	0,7171
	HDC	0,497567	0,1073	4,64	<0,0001
Escala	-	4,180440	0,3161	13,23	<0,0001
Equação com Idade - $S_{yx} = 0,95$ m; CIA = 1218,30; CIB = 1238,78					
Assíntota	Intercepto	9,892074	0,6529	15,15	<0,0001
	Idade	0,054929	0,0085	6,48	<0,0001
Inflexão	-	8,150429	0,5881	13,59	<0,0001
Escala	-	6,727570	0,5728	11,74	<0,0001

Em que: VA = variável associada ao parâmetro; EP = erro padrão;  $S_{yx}$  = erro padrão residual; CIA = critério de informação de Akaike; CIB = critério de informação Bayesiano; P100 = progênie 100; P24 = progênie 24; P78 = progênie 78; P79 = progênie 79; P99 = progênie 99.

Batista Couto e Marquesini (2001) afirmam ainda que os modelos não lineares apresentam uma constância no padrão da curva, independentemente do tipo de floresta, diferindo apenas na assíntota, o que se deve à fundamentação biológica e que esses modelos têm permitido também maior segurança nas extrapolações.

### Inclusão de covariantes

Os parâmetros assíntota e escala foram mais sensíveis às variáveis  $\overline{HDC}$  e *Idade*. O valor desses parâmetros aumentou com o aumento dessas variáveis. Já para a variável *progênie*, ocorreu pouca variação e sobreposição dos intervalos de confiança para todos os parâmetros (Figura 8).

Apenas os parâmetros assíntota e inflexão foram influenciados significativamente pela variável *Progênie*. A *progênie* 78 apresentou os maiores valores de assíntota e inflexão. As *progênie*s 24 e 99 não foram significativamente diferentes da *progênie* 100 (intercepto) para os dois parâmetros, portanto, poderiam ser agrupadas. A *progênie* 79 não foi significativamente diferente da *progênie* 100 apenas para o parâmetro inflexão (Tabela 7). Como as variáveis *H* e *DAP* são correlacionadas com o volume pode-se inferir que, para valores superiores de *DAP*, a *progênie* 78 possuirá maior valor de altura e, conseqüentemente, maior volume.

A variável  $\overline{HDC}$  influenciou significativamente os parâmetros assíntota e inflexão, sendo que para a inflexão o valor do intercepto não foi significativo, mas por ajudar a manter a curva passando pela base de dados, não forçando a curva a passar pela origem, o mesmo foi mantido na função. Apenas o parâmetro assíntota foi influenciado pela variável *idade* (Tabela 7).

Todas as equações com inclusão de covariantes foram melhores que a equação Logística original (Tabela 8), e a equação com inclusão da variável  $\overline{HDC}$  foi a que possuiu maior ganho em precisão (23%). Esta permite diferenciar as *H* de árvores de mesmo *DAP* crescendo em sítios com potenciais diferentes. A

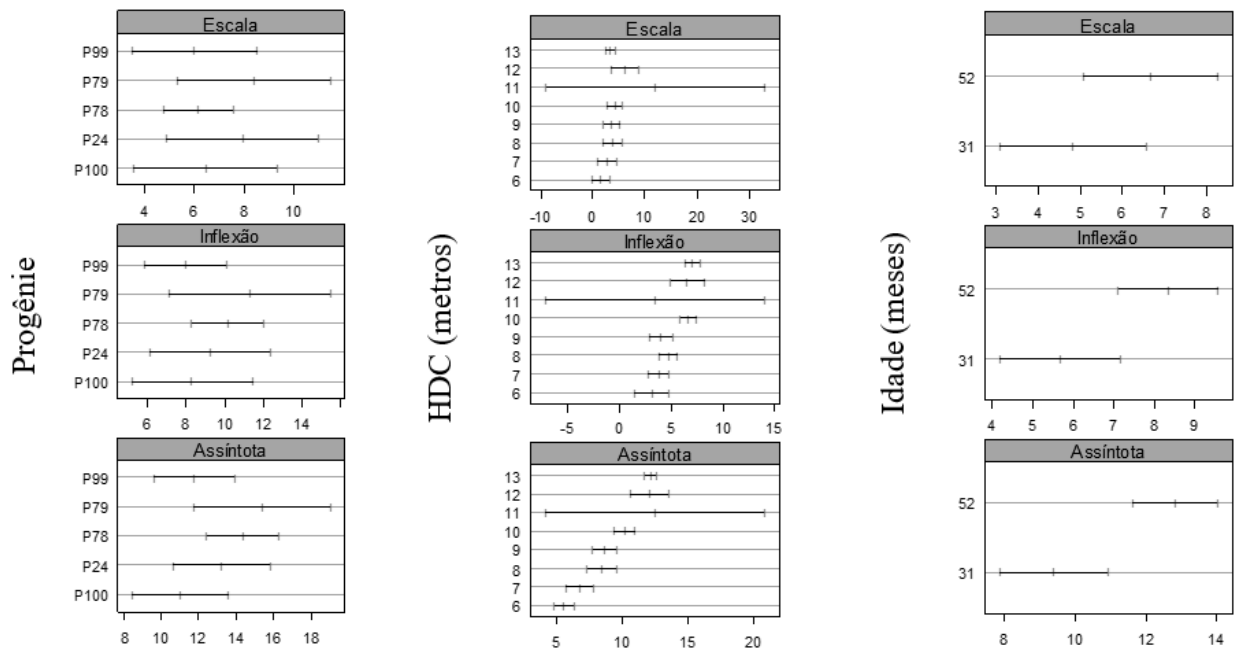


FIGURA 8: Intervalos de confiança de 95% para os parâmetros da equação Logística por progênie, altura média das árvores dominantes e codominantes (HDC) e idade.

FIGURE 8: Ninety-five percent confidence intervals on the logistic equation parameters for progeny, average height of the dominant and codominant trees and age.

TABELA 8: Comparação entre a equação Logística sem o efeito de covariantes e com o efeito de covariantes.  
 TABLE 8: Comparison between the logistic equation without the covariate effect and the logistic equation with the covariate effect.

Equação	GL	CIA	CIB	lnmv	TRMV	Valor-p
<u>Progênie</u>						
1- Equação Logística	4	1251,76	1268,15	-621,88		
2- Equação Logística (com progênie)	12	1164,74	1213,89	-570,37	103,0283	<0,0001
<u>HDC</u>						
1- Equação Logística	4	1251,76	1268,15	-621,88		
2- Equação Logística (com HDC)	6	1022,55	1047,13	-505,28	233,2103	<0,0001
<u>Idade</u>						
1- Equação Logística	4	1251,76	1268,15	-621,88		
2- Equação Logística (com idade)	5	1218,30	1238,78	-604,15	35,4620	<0,0001

Em que: GL = grau de liberdade; CIA = critério de Informação de Akaike; CIB = critério de informação Bayesiano; lnmv = logaritmo neperiano da máxima verossimilhança; TRMV = teste da razão da máxima verossimilhança; Valor-p = valor da probabilidade acima do valor do qui-quadrado calculado.

inclusão das variáveis de forma combinada poderia aumentar ainda mais a precisão da equação, entretanto, como afirmado por Mendes et al. (2006), retirar ou incluir qualquer variável associada a qualquer parâmetro modifica significativamente a estrutura de todo o ajuste e isto requer um estudo detalhado para cada situação de interesse.

A variável altura é comumente utilizada em equações volumétricas, por isso é importante obter boas estimativas dessa variável. Leite e Andrade (2003) mostraram que a utilização de equações volumétricas de dupla entrada (*DAP*, *H*) resultam em menor viés na estimativa do volume no inventário florestal, e que este viés é ainda menor quando as alturas são estimadas por equações com a inclusão da variável  $\overline{HDC}$ . A equação hipsométrica com  $\overline{HDC}$  desenvolvida neste trabalho, associada a uma equação volumétrica adequada, propiciará uma boa estimativa do volume e garantirá um planejamento mais adequado das atividades florestais.

## CONCLUSÕES

Para as equações de altura em função da idade:

- A precisão entre as equações testadas foi semelhante, entretanto, pela tendência dos dados e ausência de um ponto de inflexão claro na base de dados, a equação assintótica apresentou melhor distribuição de resíduos e menores valores de  $S_{yx}^2$ , CIA e CIB.
- Os gráficos de resíduos sugerem violações das pressuposições de homogeneidade da variância e, possivelmente, independência dos erros, já que os dados são compostos de remedições dos mesmos indivíduos no tempo, sugerindo a modelagem da heterocedasticidade e autocorrelação temporal por meio do ajuste por mínimos quadrados generalizados ou utilizando os modelos de efeito misto.
- O parâmetro assintota foi influenciado significativamente pela variável progênie, sugerindo que existem diferenças entre progênies em relação à altura total das árvores, até a idade avaliada. A inclusão do efeito da progênie no parâmetro assintota melhorou a precisão da equação.

Para as equações de altura em função do diâmetro:

- A equação Exponencial correspondeu ao maior valor de erro padrão residual, CIA e CIB, portanto, com menor precisão em relação às outras equações. Isso foi confirmado pelo gráfico de resíduos. As demais equações foram semelhantes entre si em termos de precisão e distribuição dos resíduos.
- A inclusão de covariantes na equação hipsométrica Logística aumentou a precisão da mesma e a variável  $\overline{HDC}$  permitiu um ganho em precisão de 23%.

## AGRADECIMENTOS

À CAPES pela concessão de bolsa de estudo, à FAPEMIG, ao CNPq e à empresa Bela Vista Florestal pelo apoio prestado.

## REFERÊNCIAS

- BATISTA, J. L. F.; COUTO, H. T. Z.; MARQUESINI, M. Desempenho de modelos de relações hipsométricas: estudo em três tipos de floresta. **Scientia Forestalis**, Piracicaba, n. 60, p. 149-162, dez. 2001.
- CALEGARIO, N. et al. Melhoria da qualidade de ajuste de modelos biométricos florestais pelo emprego da teoria dos modelos não lineares generalizados. **Scientia Forestalis**, Piracicaba, n. 69, p. 38-50, 2005.
- CRECENTE-CAMPO, F. et al. Can random components explain differences in the height-diameter relationship in mixed uneven-aged stands? **Annals of Forest Science**, Les Ulis, v. 71, n.1, p. 51-70, jan. 2014.
- CURTIS, R. O. Height-diameter and height-diameter-age equations for second-growth Douglas-fir. **Forest Science**, Washington, v. 13, n. 4, p. 365-375, dec. 1967.
- FANG, Z.; BAILEY, R. L. Nonlinear mixed effects modeling for Slash Pine dominant height growth following intensive silvicultural treatments. **Forest Science**, Washington, v. 47, n. 3, p. 287-300, aug. 2001.
- GUIMARÃES, M. A. M. et al. Height-diameter models in forestry with inclusion of covariates. **Cerne**, Lavras, v. 15, n. 3, p. 313-321, jul./sept. 2009.
- HUSCH, B.; MILLER, C. I.; BEERS, T. W. **Forest mensuration**. 3. ed. New York: J. Wiley, 1982. 402 p.
- INDÚSTRIA BRASILEIRA DE ÁRVORES. **Relatório IBÁ 2015**. Brasília: IBÁ, 2015. 64 p. Disponível em: <[http://www.iba.org/images/shared/iba\\_2015.pdf](http://www.iba.org/images/shared/iba_2015.pdf)>. Acesso em: 13 jul. 2015.
- LEITE, H. G.; ANDRADE, V. C. L. Importância das variáveis altura dominante e altura total em equações hipsométricas e volumétricas. **Revista Árvore**, Viçosa, MG, v. 27, n. 3, p. 301-310, 2003.
- MENDES, B. R. et al. Desenvolvimento de modelos de crescimento de árvores individuais fundamentado em equações diferenciais. **Cerne**, Lavras, v. 12, n. 3, p. 254-263, 2006.
- MENDONÇA, A. R. et al. Modelos hipsométricos e de crescimento em altura das árvores dominantes e codominantes para *Pinus caribaea* var. *hondurensis*. **Scientia Forestalis**, Piracicaba, v. 39, n. 90, p. 151-160, jun. 2011.
- MENDONÇA, A. R.; CARVALHO, S. P. C.; CALEGARIO, N. Modelos hipsométricos generalizados mistos na predição da altura de *Eucalyptus* sp. **Cerne**, Lavras, v. 21, n. 1, p. 107-115, 2015.
- MISIR, N. Generalized height-diameter models for *Populus tremula* L. stands. **African Journal of Biotechnology**, Ebène, v. 9, n. 28, p. 4348-4355, jul. 2010.
- PINHEIRO, J. C.; BATES, D. M. **Mixed-Effects Models in S and S-Plus**. New York: Springer-Verlag, 2000. 528 p.
- R CORE TEAM. **R: a language and environment for statistical computing**. Vienna: R Foundation for Statistical Computing, 2012.
- RITZ, C.; STREIBIG, J. C. **Nonlinear regression with R**. New York: Springer, 2008. 148 p.
- SAKAMOTO, Y.; ISHIGURO, M.; KITAGAWA, G. **Akaike information criterion statistics**. Dordrecht: Kluwer Academic, 1986. 256 p.
- SCHWARZ, P. H. Estimating the dimension of a model. **Annals of Statistics**, California, v. 6, p. 461-464, 1978.
- STANKOVA, T. V.; DIÉGUEZ-ARANDA, U. Height-diameter relationships for Scots pine plantations in Bulgaria: optimal combination of model type and application. **Annals of Forest Research**, Voluntari, v. 56, n. 1, p. 149-163, 2013.
- ZHANG, L. Cross-validation of non-linear growth functions for modeling tree height-diameter relationships. **Annals of Botany**, London, v. 79, n. 3, p. 251-257, mar. 1997.