

Efficiency evaluation of Branson's equivalent inertia to consider physical nonlinearity of beams in simple form

Avaliação da eficiência da inércia equivalente de Branson para considerar a não-linearidade física das vigas de forma simplificada

D.M. OLIVEIRA^a
danielle@demc.ufmg.br

N.A. SILVA^b
ney@dees.ufmg.br

Abstract

In this paper the efficiency of Branson's equivalent inertia to consider the physical nonlinearity of beams in simple form is evaluated. For this purpose, several reinforced concrete plane frames of medium height are analyzed using ANSYS software. Initially, the frames are processed considering both physical and geometric nonlinearities. Next, geometric nonlinear analyses are performed, considering a physical nonlinearity approximated through the stiffness reduction in the structural elements. In the case of the columns, the stiffness was reduced by 20% and, for the beams, the inertia reduction values according to the Branson [1] formula and the NBR 6118:2007 [2] Brazilian Norm were used. It was observed that the inertia reduction according to the Branson [1] formula better represents the actual behavior of the structures at the service limit state. Furthermore, it was verified that the use of Branson's equivalent inertia is more efficient at representing the behavior of the more flexible frames than stiffer frames.

Keywords: reinforced concrete, physical nonlinearity, Branson's equivalent inertia.

Resumo

Neste trabalho busca-se avaliar a eficiência da inércia equivalente de Branson [1] para considerar a não-linearidade física das vigas de forma simplificada. Com este objetivo, são realizadas diversas análises numéricas de pórticos planos medianamente altos em concreto armado utilizando o "software" ANSYS. Inicialmente, os pórticos são processados considerando ambas as não-linearidades geométrica e física. Em seguida, são realizadas análises não-lineares geométricas, considerando a não-linearidade física de forma aproximada, por meio da redução de rigidez dos elementos estruturais. No caso dos pilares, a rigidez foi reduzida em 20% e, para as vigas, foram utilizados os valores de redução de inércia segundo a formulação de Branson [1] e aqueles recomendados pela NBR 6118:2007 [2]. Observa-se que a redução de inércia segundo a formulação de Branson [1] representa o comportamento das estruturas com maior precisão no estado limite de serviço. Além disso, mostra-se que a utilização da inércia equivalente de Branson [1] é mais eficiente para representar o comportamento dos pórticos mais flexíveis do que dos pórticos mais rígidos.

Palavras-chave: concreto armado, não-linearidade física, inércia equivalente de Branson.

^a Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia, Deptº de Engenharia de Materiais e Construção, danielle@demc.ufmg.br, Av. Antônio Carlos 6627, bl. 1, sala 3315, Pampulha, 31270-901, Belo Horizonte, MG, Brasil;

^b Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia, Deptº de Engenharia de Estruturas, ney@dees.ufmg.br, Av. Antônio Carlos 6627, bl. 1, Pampulha, 31270-901, Belo Horizonte, MG, Brasil.

1. Introdução

Nas últimas décadas, seguindo o exemplo de outras áreas, a engenharia sofreu grandes avanços, particularmente a de projetos e a de construção civil. As técnicas de otimização no que diz respeito ao peso e à forma, o desenvolvimento de equipamentos de teste e computacionais e modelagens numéricas eficientes levaram a construções mais econômicas e esbeltas, e edifícios mais elevados e arrojados.

Dessa forma, questões antes não convenientemente abordadas passaram a assumir fundamental importância no projeto estrutural. Dentre estas questões, destacam-se a análise da estabilidade e a avaliação dos efeitos de segunda ordem.

Os efeitos de segunda ordem surgem quando o estudo do equilíbrio da estrutura é efetuado considerando a configuração deformada. Dessa forma, as forças existentes interagem com os deslocamentos, produzindo esforços adicionais. Os esforços de segunda ordem introduzidos pelos deslocamentos horizontais dos nós da estrutura, quando sujeita a cargas verticais e horizontais, são denominados efeitos globais de segunda ordem; estes efeitos podem ser extremamente importantes e significativos em algumas estruturas; em outras, não precisam ser levados em conta.

Em estruturas mais rígidas, os deslocamentos horizontais dos nós são pequenos e, conseqüentemente, os efeitos globais de segunda ordem têm pequena influência nos esforços totais, podendo então ser desprezados. Estas estruturas são denominadas estruturas de nós fixos.

Por outro lado há estruturas mais flexíveis, cujos deslocamentos horizontais são significativos e, portanto, os efeitos globais de segunda ordem representam uma parcela importante dos esforços finais, não podendo ser desprezados; é o caso das estruturas de nós móveis.

De acordo com a NBR 6118:2007 [2], se os efeitos globais de segunda ordem forem inferiores a 10% dos respectivos esforços de primeira ordem a estrutura pode ser classificada como de nós fixos. Neste caso, as barras podem ser calculadas isoladamente, com suas extremidades vinculadas, onde são aplicados os esforços obtidos pela análise de primeira ordem. Entretanto, se os efeitos globais de segunda ordem forem superiores a 10% dos de primeira ordem, a estrutura é classificada como de nós móveis, e deve ser analisada considerando os efeitos das não-linearidades geométrica e física.

Fica claro, portanto, que a análise de uma estrutura de nós móveis é bem mais complexa que a de uma estrutura de nós fixos. Isso porque a realização de uma análise que considere os efeitos das não-linearidades geométrica e física, para as estruturas de concreto armado, pode resultar em uma tarefa árdua, demandando grande esforço computacional e ferramentas nem sempre disponíveis nos escritórios de cálculo. Torna-se essencial, portanto, o desenvolvimento de métodos simplificados capazes de simular, com segurança, os efeitos das não-linearidades geométrica e física da estrutura.

A consideração da não-linearidade geométrica demanda análises mais refinadas, que levam em conta algum grau de modificação na matriz de rigidez da estrutura, ou a utilização de processos simplificados, como o método de avaliação dos esforços finais (que incluem os de segunda ordem) empregando o coeficiente de instabilidade global γ_z como majorador dos esforços horizontais.

Levar em conta a não-linearidade física implica em determinar a

rigidez de cada elemento estrutural a partir das relações constitutivas dos materiais, da quantidade e disposição de armadura no elemento e do nível de sollicitação do mesmo. Como trata-se de um processo trabalhoso, tem-se realizado vários estudos que consideram a não-linearidade física de forma aproximada, por meio da redução da rigidez dos elementos estruturais.

Neste trabalho busca-se avaliar a eficiência da inércia equivalente de Branson [1] para considerar a não-linearidade física das vigas de forma simplificada. Com este objetivo, são realizadas diversas análises numéricas de pórticos planos medianamente altos em concreto armado utilizando o "software" ANSYS. Inicialmente, os pórticos são processados considerando ambas as não-linearidades geométrica e física. Em seguida, são realizadas análises não-lineares geométricas, considerando a não-linearidade física de forma aproximada, por meio da redução de rigidez dos elementos estruturais. No caso dos pilares, a rigidez foi reduzida em 20% e, para as vigas, foram utilizados os valores de redução de inércia segundo a formulação de Branson [1] e aqueles recomendados pela NBR 6118:2007 [2]. Os resultados das análises não-lineares geométricas, com consideração simplificada da não-linearidade física, são, então, comparados com aqueles obtidos a partir das análises não-lineares geométricas e físicas, capazes de representar com maior precisão o comportamento real das estruturas.

2. Consideração simplificada da não-linearidade física segundo a NBR 6118:2007 [2]

A NBR 6118:2007 [2] adota, para a consideração aproximada da não-linearidade física, os seguintes valores de rigidez dos elementos estruturais:

- lajes: $(EI)_{sec} = 0,3 E_{ci} I_c$;
- vigas: $(EI)_{sec} = 0,4 E_{ci} I_c$ para $A'_s \neq A_s$ ou $(EI)_{sec} = 0,5 E_{ci} I_c$ para $A'_s = A_s$;
- pilares: $(EI)_{sec} = 0,8 E_{ci} I_c$;

sendo:

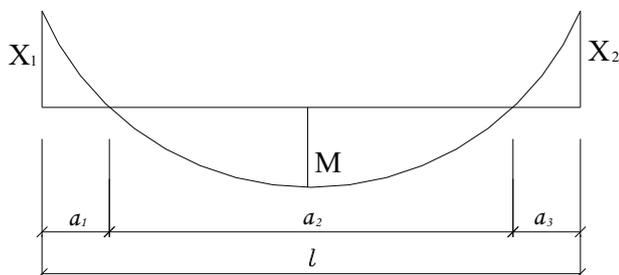
- I_c - momento de inércia da seção bruta de concreto;
- A'_s - área da armadura de compressão;
- A_s - área da armadura de tração;
- E_{ci} - módulo de elasticidade inicial do concreto, dado por:

$$E_{ci} = 5600 \sqrt{f_{ck}} \quad (MPa) \quad (1)$$

- f_{ck} - resistência característica do concreto à compressão, em MPa. A norma ainda permite, quando a estrutura de contraventamento for composta apenas por vigas e pilares e o coeficiente de instabilidade global γ_z for menor que 1,3, adotar $(EI)_{sec} = 0,7 E_{ci} I_c$ para ambos os elementos.

Vale comentar que, de acordo com os resultados de Pinto et al. [3], as reduções de rigidez iguais a $0,4 EI$ e $0,5 EI$ para as vigas e $0,8 EI$ para os pilares se mostram seguras, inclusive o valor de $0,4 EI$ para as vigas nas quais $A'_s \neq A_s$, que é a situação mais comum, esteja até um pouco baixo. Além disso, parece mais racional adotar diferentes reduções de rigidez para vigas e pilares, uma vez que o estado de fissuração destes elementos não é o mesmo, devido às sollicitações a que eles são submetidos.

Figura 1 – Obtenção da rigidez equivalente ponderada para vigas contínuas



A adoção do valor único de $0,7 EI$ para as vigas e pilares provavelmente foi feita buscando facilitar a análise da estrutura. Porém, segundo Lima [4], este procedimento deve ser utilizado com cautela, principalmente quando a contribuição das vigas na rigidez global for significativa.

3. Rigidez equivalente segundo a formulação de Branson [1]

No caso de vigas de concreto armado, as diferentes quantidades de armadura e a distribuição variável de fissuração ao longo do vão fazem com que a rigidez à flexão EI não seja uma constante. Segundo a NBR 6118:2007 [2], a verificação das rotações e deslocamentos em elementos estruturais lineares deve ser realizada por meio de modelos que considerem a rigidez efetiva das seções transversais dos elementos, levando em conta a presença da armadura, a fissuração do concreto ao longo dessa armadura e as deformações diferidas no tempo.

Branson [1] apresenta uma expressão empírica para a determinação da rigidez efetiva em qualquer seção transversal particular de uma viga. Esta rigidez efetiva é função do momento fletor, das propriedades da seção e da resistência do concreto.

A rigidez equivalente dada pela formulação de Branson [1], e adotada pela NBR 6118:2007 [2], para uma avaliação aproximada da flecha imediata em vigas, pode ser escrita como:

$$(EI)_{eq} = E_{cs} \left\{ \left(\frac{M_r}{M_a} \right)^3 I_c + \left[1 - \left(\frac{M_r}{M_a} \right)^3 \right] I_{II} \right\} \leq E_{cs} I_c \quad (2)$$

onde:

- E_{cs} é o módulo de elasticidade secante do concreto, dado por:

$$E_{cs} = 0,85 E_{ci} \quad (3)$$

com E_{ci} definido pela equação (1);

- I_c é o momento de inércia da seção bruta de concreto;

- I_{II} é o momento de inércia da seção fissurada de concreto no estágio II;

- M_a é o momento fletor na seção crítica do vão considerado, momento máximo no vão para vigas biapoiadas ou contínuas e momento no apoio para balanços, para a combinação de ações considerada nessa avaliação;

- M_r é o momento de fissuração do elemento estrutural, calculado por:

$$M_r = \frac{\alpha \cdot f_{ct} \cdot I_c}{y_t} \quad (4)$$

sendo α igual a 1,5 para seções retangulares e 1,2 para seções T ou duplo T, y_t a distância do centro de gravidade à fibra mais tracionada, e f_{ct} a resistência à tração direta do concreto, conforme o item 8.2.5 da NBR 6118:2007 [2].

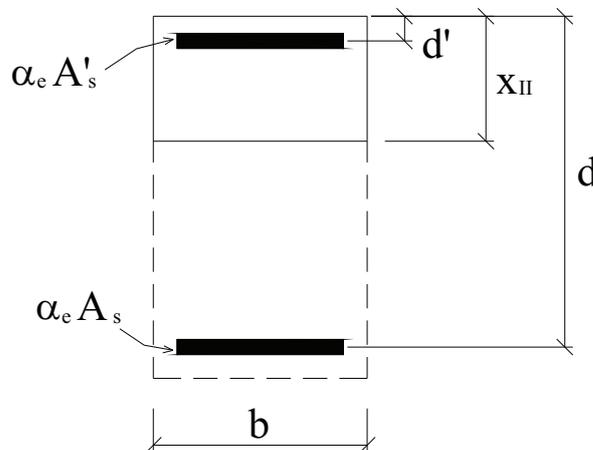
Segundo o ACI Committee 435 [5], pode-se obter a rigidez equivalente com maior precisão, para vãos de vigas contínuas, através da ponderação das rigidezes equivalentes dos trechos. Assim, para o vão mostrado na figura [1], o valor ponderado da rigidez equivalente é dado por:

$$(EI)_{eq,pond} = [(EI)_{eq,1} \cdot a_1 + (EI)_{eq,2} \cdot a_2 + (EI)_{eq,3} \cdot a_3] / l \quad (5)$$

onde $(EI)_{eq,i}$ representa a rigidez equivalente nos três trechos da figura [1]. Em cada um dos trechos a rigidez equivalente deve ser calculada por meio da equação (2), usando para M_a os valores X_1 , M e X_2 , respectivamente.

Para a determinação do momento de inércia da seção fissurada I_{II} da equação (2), admite-se comportamento elástico e linear para o aço e o concreto à compressão, desprezando-se a tração do concreto (figura [2]).

Figura 2 – Seção fissurada (estádio II)



Deve-se inicialmente homogeneizar a seção, usando a seguinte relação entre os módulos de elasticidade do aço e concreto:

$$\alpha_e = E_s / E_{cs} \quad (6)$$

Em seguida obtém-se a profundidade da linha neutra no estágio II, x_{II} , igualando-se o momento estático da área acima da linha neutra (Q_{sup}) com o da área abaixo (Q_{inf}). Dessa forma tem-se:

$$Q_{sup} = Q_{inf} \quad (7)$$

$$[(b \cdot x_{II}) \cdot x_{II} / 2 - A'_s \cdot (x_{II} - d')] + \alpha_e \cdot A'_s \cdot (x_{II} - d') = \alpha_e \cdot A_s \cdot (d - x_{II}) \quad (8)$$

$$(b \cdot x_{II}) \cdot x_{II} / 2 + (\alpha_e - 1) \cdot A'_s \cdot (x_{II} - d') = \alpha_e \cdot A_s \cdot (d - x_{II}) \quad (9)$$

Substituindo

$$\alpha'_e = \alpha_e - 1 \quad (10)$$

na equação (9), obtém-se a seguinte equação de segundo grau em x_{II} :

$$(b/2) \cdot x_{II}^2 + (\alpha_e \cdot A_s + \alpha'_e \cdot A'_s) \cdot x_{II} - (\alpha_e \cdot A_s \cdot d + \alpha'_e \cdot A'_s \cdot d') = 0 \quad (11)$$

que fornece:

$$x_{II} = -A + (A^2 + B)^{1/2} \quad (12)$$

sendo

$$A = (\alpha_e \cdot A_s + \alpha'_e \cdot A'_s) / b \quad (13)$$

$$B = 2 \cdot (\alpha_e \cdot A_s \cdot d + \alpha'_e \cdot A'_s \cdot d') / b \quad (14)$$

Para o momento de inércia da seção fissurada I_{II} , resulta:

$$I_{II} = (b/3) \cdot x_{II}^3 + \alpha'_e \cdot A'_s \cdot (x_{II} - d')^2 + \alpha_e \cdot A_s \cdot (d - x_{II})^2 \quad (15)$$

É importante comentar que a equação (2) só deve ser utilizada quando o momento fletor M_a for igual ou superior ao momento de fissuração M_f , ou seja, quando $M_f/M_a \leq 1$ (estádio II). Quando $M_f/M_a > 1$, a estrutura se encontra no estágio I, e portanto deve-se utilizar a rigidez da seção bruta, $E_{cs} \cdot I_c$.

Supondo, por exemplo, $M_f/M_a = 0,5$, a equação (2) fica:

$$(EI)_{eq} = E_{cs} \cdot \{ (0,5)^3 \cdot I_c + [1 - (0,5)^3] \cdot I_{II} \} \quad (16)$$

$$(EI)_{eq} = E_{cs} \cdot (0,125 \cdot I_c + 0,875 \cdot I_{II}) \quad (17)$$

Nota-se que, neste caso, a rigidez equivalente $(EI)_{eq}$ é determinada, predominantemente, pela rigidez da seção fissurada $(EI)_{II}$, sendo bastante reduzida a contribuição da rigidez correspondente à seção bruta de concreto. É comum, portanto, para relações M_f/M_a superiores a 2, adotar aproximadamente $(EI)_{eq}$ igual a $(EI)_{II}$.

4. Aplicações numéricas

No presente trabalho, diversos pórticos planos pertencentes a edifícios usuais de concreto armado (cujos pavimentos tipos podem ser encontrados em Oliveira [6]) são analisados pelo método dos elementos finitos utilizando o "software" ANSYS-9.0. A tabela [1] resume as principais características dos exemplos estudados.

Inicialmente, foram realizadas análises elásticas lineares dos edifícios, utilizando modelos tridimensionais. O carregamento atuante nas estruturas divide-se em dois grupos: o carregamento vertical e o carregamento horizontal.

O carregamento vertical é composto pelas cargas permanentes e pela carga acidental ou sobrecarga. As cargas permanentes consideradas foram o peso próprio da estrutura, as cargas de alvenaria e o revestimento das lajes.

O carregamento horizontal é constituído pelas cargas equivalentes à ação do vento, nas direções paralelas aos eixos X e Y. As forças de arrasto foram calculadas de acordo com as prescrições da NBR 6123:1988 [7] e as combinações últimas normais seguem o disposto na NBR 6118:2007 [2].

A partir da envoltória dos esforços obtidos para cada combinação de carregamento foram determinadas as armaduras dos pilares e

Tabela 1 – Características gerais dos exemplos analisados

Exemplo	Nº de pavimentos	Pé-direito (m)	Nº de vãos	Comprimento dos vãos (m)	fck (MPa)
1	16	2,90	2	6,0	20
2	20	Variável	3	Variável	40
3	20	2,75	4	Variável	45
4	30	2,85	2	7,5	20
5	16	2,88	2	6,0	25
6	15	2,90	3	4,2	25

vigas constituintes dos pórticos estudados. As vigas foram dimensionadas à flexão normal composta e os pilares à flexão normal composta ou à flexão oblíqua composta. Utilizou-se aço CA-50 para todos os elementos estruturais, com módulo de elasticidade igual a 210 GPa.

Os pórticos planos foram, então, processados considerando ambas as não-linearidades geométrica e física. Aplicou-se a parcela de carregamento correspondente à combinação que considera o vento (que atua paralelamente aos eixos X ou Y, dependendo da direção do pórtico analisado) como a ação variável principal. Os quinhões de carga de vento que os pórticos receberam foram calculados em função de suas rigidezes laterais.

Dentre os diversos modelos constitutivos não-lineares oferecidos pelo ANSYS, dois se destacam como mais adequados para representar o comportamento do concreto: o modelo elastoplástico baseado no critério de escoamento de Drucker-Prager e o modelo específico para determinação da ruptura de materiais frágeis, obtido a partir do critério de Willam-Warnke. Para o aço, pode-se escolher entre modelos bilineares ou multilíneares, cinemáticos ou isotrópicos, com ou sem encruamento, segundo o critério de escoamento de Von Mises.

A utilização do modelo baseado no critério de ruptura de Willam-Warnke é limitada a um único elemento, definido como “solid 65”. Trata-se de um elemento sólido tridimensional, possuindo oito nós, com três graus de liberdade por nó (três translações, nas direções X, Y e Z). É possível considerar a ruptura frágil associada à fissuração e ao esmagamento do concreto, admitindo também a consideração do comportamento elastoplástico baseado nos critérios de Drucker-Prager e Von Mises. Existe a possibilidade de incluir as armaduras como um material disperso no interior do elemento, orientado segundo três diferentes direções.

Neste exemplo, foi utilizado o elemento “solid 65” com armadura dispersa (nas três direções) para representar os pilares e vigas. O critério de Willam-Warnke permite que a condição de ruptura seja desabilitada e substituída por uma condição de plastificação, utilizando, por exemplo, os critérios de Drucker-Prager ou de Von Mises. Na análise realizada, manteve-se o critério de ruptura de Willam-Warnke à tração, e empregou-se, para compressão do concreto, o critério de escoamento de Von Mises, também utilizado para o aço. É importante mencionar que os critérios de Von Mises apresentam, tanto para o concreto quanto para o aço, comportamentos elastoplásticos perfeitos segundo diagramas tensão-deformação bilineares. Na verdade, a fim de se evitar possíveis dificuldades numéricas, considerou-se um encruamento mínimo,

adotando-se, no lugar de zero, um pequeno valor para o módulo tangente. Vale ressaltar que todos os parâmetros utilizados nas análises não-lineares (modelos de materiais, discretização adotada e recursos numéricos envolvidos) foram “calibrados” a partir de diversos estudos de peças estruturais e pórticos de concreto armado já testados experimentalmente, como os realizados por Oliveira & Silva [8] e Oliveira [6]. Tais estudos revelaram a proximidade entre os resultados experimentais e àqueles obtidos das análises não-lineares geométricas e físicas realizadas no ANSYS, consideradas, portanto, capazes de representar com boa precisão o comportamento real das estruturas.

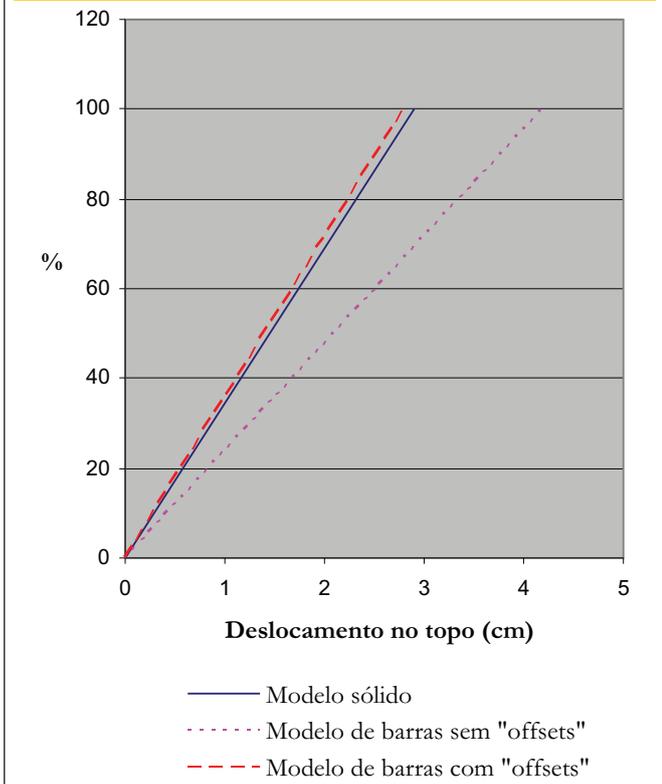
Para a realização das análises não-lineares, o ANSYS utiliza o método incremental-iterativo de Newton-Raphson. Nesse método, são fornecidos o número de incrementos de carga e o número de iterações para cada passo de carga. A partir de uma configuração de equilíbrio conhecida e de um dado incremento de carga, a estrutura responderá com um nível de esforço menor do que aquele aplicado, o que resulta em um esforço residual que deve ser aplicado novamente, observando os limites de iterações e tolerância admitidos. Dessa forma, a matriz de rigidez pode ou não ser atualizada em cada iteração, dependendo da opção desejada pelo usuário. Utilizou-se nestes processamentos o algoritmo de Newton-Raphson pleno, incrementos automáticos de carga e um limite de 60 iterações por incremento, com tolerância de 0,1% aplicada à raiz quadrada do somatório dos quadrados dos desequilíbrios de forças. Foram também realizadas análises não-lineares geométricas dos pórticos, considerando a não-linearidade física de forma aproximada, por meio da redução de rigidez dos elementos estruturais. No caso dos pilares, a rigidez foi reduzida em 20% e, para as vigas, foram utilizados os valores de redução de inércia segundo a formulação de Branson [1] e aqueles recomendados pela NBR 6118:2007 [2].

Assim, foram adotados os seguintes valores para a inércia efetiva dos elementos estruturais:

- $I_{pil} = 0,8 I_c$ e $I_{vig} = 0,4 I_c$;
- $I_{pil} = 0,8 I_c$ e $I_{vig} = 0,5 I_c$;
- $I_{pil} = 0,8 I_c$ e $I_{vig} = I_{eq}$ dado pela equação (2), ou seja:

$$I_{eq} = \left(\frac{M_r}{M_a} \right)^3 I_c + \left[I - \left(\frac{M_r}{M_a} \right)^3 \right] I_{II} \leq I_c \quad (18)$$

Figura 3 – Relação entre carga e deslocamento para a análise elástica linear realizada com o modelo sólido e com os modelos de barra (pórtico do exemplo 1)



Neste caso, as inércias equivalentes ponderadas foram determinadas para várias porcentagens do carregamento aplicado (P). Dessa forma, o desempenho da inércia equivalente de Branson [1] para considerar a não-linearidade física das vigas de forma simplificada pôde ser avaliado para os carregamentos correspondentes aos estados limites último (definido como 100% P), de serviço (considerado aproximadamente igual a 45% P) e para o carregamento sem majoração (75% P).

Para a realização das análises não-lineares geométricas dos pórticos no "software" ANSYS-9.0, os pilares e vigas foram representados através de elementos de barra, com três graus de liberdade em cada nó: duas translações nas direções X e Y e uma rotação na direção Z. É importante comentar que, no modelo sólido, os vãos da viga são considerados de face a face dos pilares, o que o torna mais rígido que o modelo de barras, no qual os vãos são considerados de eixo a eixo dos apoios. Tal diferença implicou na necessidade de se utilizar o elemento definido como "beam 54" para representar as extremidades das vigas no modelo de barra. Este elemento permite a introdução de "offsets" nos trechos viga-pilar, tornando-os rígidos. Com isto, é possível comparar os dois modelos em igualdade de condições. Vale ressaltar que, para determinar os comprimentos dos trechos rígidos a serem adotados, foram realizadas análises comparativas (elásticas lineares) entre o modelo sólido e o modelo de barra que utiliza "offsets". A figura

Figura 4 – Relação entre carga e deslocamento para as análises não-lineares realizadas (pórtico do exemplo 2)

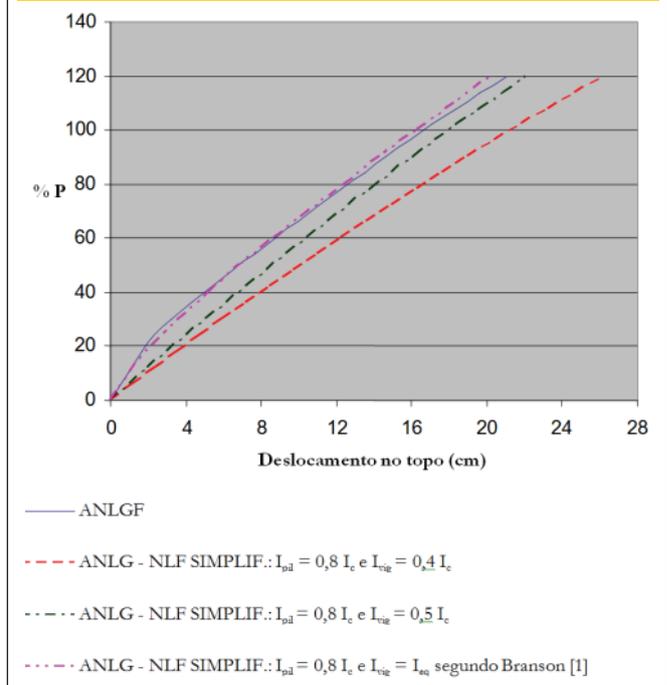


Figura 5 – Relação entre carga e deslocamento para as análises não-lineares realizadas (pórtico do exemplo 3)

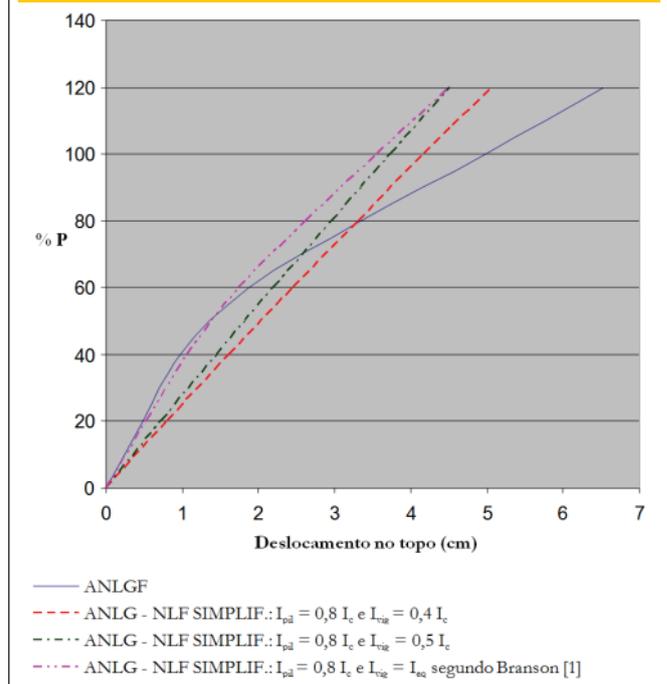
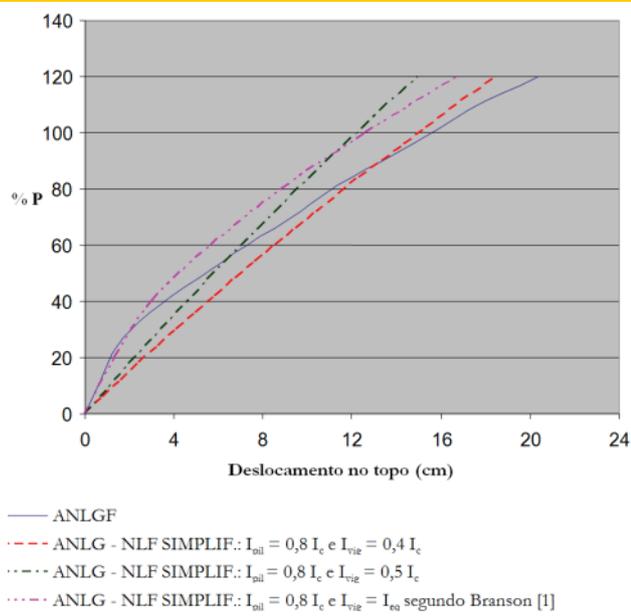


Figura 6 – Relação entre carga e deslocamento para as análises não-lineares realizadas (pórtico do exemplo 4)



[3] apresenta o gráfico carga aplicada *versus* deslocamento horizontal do topo do pórtico do exemplo 1 para a análise elástica linear realizada com o modelo sólido e com os modelos de barra (utilizando ou não "offsets"). Observa-se que o modelo de barras sem "offsets" é realmente bem mais flexível que o modelo sólido;

este, por sua vez, é muito bem representado pelo modelo de barras que utiliza "offsets".

Foram construídos gráficos que mostram a variação do deslocamento horizontal do topo dos pórticos com a carga aplicada, para as análises não-lineares geométricas e físicas (ANLGF) e não-lineares geométricas, com consideração simplificada da não-linearidade física. Os gráficos dos pórticos dos exemplos 2, 3 e 4 estão apresentados nas figuras [4], [5] e [6] (os demais gráficos, correspondentes aos exemplos 1, 5 e 6, podem ser encontrados em Oliveira [6]). A partir da análise dos gráficos carga x deslocamento foi possível visualizar as reduções de inércia que melhor descreveram o comportamento dos pórticos estudados, considerando o carregamento sem majoração e os correspondentes aos estados limites último e de serviço (tabela [2]).

Nota-se na tabela [2] que, no estado limite de serviço, as análises realizadas com $I_{pil} = 0,8 I_c$ e $I_{vig} = I_{eq}$ segundo Branson [1] e $I_{pil} = 0,8 I_c$ e $I_{vig} = 0,5 I_c$ mostraram-se mais adequadas para representar o comportamento de 83% e 67% dos pórticos estudados, respectivamente. Portanto, para esta intensidade de carregamento, a análise que utiliza reduções de inércia iguais a $0,8 I_c$ para os pilares e I_{eq} segundo Branson [1] para as vigas pode ser considerada a mais eficiente.

Ainda na tabela [2] observa-se que, para o carregamento sem majoração e o correspondente ao estado limite último, na maior parte dos exemplos analisados, a utilização dos valores de redução de inércia adotados pela NBR 6118:2007 [2] para os casos mais gerais, ou seja, $I_{pil} = 0,8 I_c$ e $I_{vig} = 0,4 I_c$, forneceu os resultados mais próximos dos obtidos a partir da análise não-linear geométrica e física. Observa-se também que apenas para os exemplos 2 e 6 a análise realizada com $I_{pil} = 0,8 I_c$ e $I_{vig} = I_{eq}$ segundo Branson [1] representou com maior precisão o comportamento "real" das estruturas. Vale comentar que os pórticos dos exemplos 2 e 6 são, dentre todos os pórticos analisados, os mais flexíveis, como pode

Tabela 2 – Reduções de inércia que melhor representaram os pórticos analisados

Exemplo	Carregamento correspondente ao ELS (45% P)	Carregamento sem majoração (75% P)	Carregamento correspondente ao ELU (100% P)
1	$I_{pil} = 0,8 I_c$ e $I_{vig} = 0,5 I_c$	$I_{pil} = 0,8 I_c$ e $I_{vig} = 0,4 I_c$	$I_{pil} = 0,8 I_c$ e $I_{vig} = 0,4 I_c$
2	$I_{pil} = 0,8 I_c$ e $I_{vig} = I_{eq}$ segundo Branson (1)	$I_{pil} = 0,8 I_c$ e $I_{vig} = I_{eq}$ segundo Branson (1)	$I_{pil} = 0,8 I_c$ e $I_{vig} = I_{eq}$ segundo Branson (1)
3	$I_{pil} = 0,8 I_c$ e $I_{vig} = I_{eq}$ segundo Branson (1)	$I_{pil} = 0,8 I_c$ e $I_{vig} = 0,4 I_c$	$I_{pil} = 0,8 I_c$ e $I_{vig} = 0,4 I_c$
4	$I_{pil} = 0,8 I_c$ e $I_{vig} = I_{eq}$ segundo Branson (1) $I_{pil} = 0,8 I_c$ e $I_{vig} = 0,5 I_c$	$I_{pil} = 0,8 I_c$ e $I_{vig} = 0,4 I_c$	$I_{pil} = 0,8 I_c$ e $I_{vig} = 0,4 I_c$
5	$I_{pil} = 0,8 I_c$ e $I_{vig} = I_{eq}$ segundo Branson (1) $I_{pil} = 0,8 I_c$ e $I_{vig} = 0,5 I_c$	$I_{pil} = 0,8 I_c$ e $I_{vig} = 0,4 I_c$	$I_{pil} = 0,8 I_c$ e $I_{vig} = 0,4 I_c$
6	$I_{pil} = 0,8 I_c$ e $I_{vig} = I_{eq}$ segundo Branson (1) $I_{pil} = 0,8 I_c$ e $I_{vig} = 0,5 I_c$	$I_{pil} = 0,8 I_c$ e $I_{vig} = 0,4 I_c$ $I_{pil} = 0,8 I_c$ e $I_{vig} = 0,5 I_c$ $I_{pil} = 0,8 I_c$ e $I_{vig} = I_{eq}$	$I_{pil} = 0,8 I_c$ e $I_{vig} = I_{eq}$ segundo Branson (1)

ser constatado nos gráficos das figuras [7] e [8]. Nestes gráficos, as curvas carga x deslocamento dos pórticos que apresentam alturas semelhantes são confrontadas. Dessa forma, na figura [7] está representada a variação do deslocamento horizontal do topo dos pórticos dos exemplos 2 e 3 com a carga aplicada, para as análises não-lineares geométricas e físicas (ANLGF) e não-lineares geométricas que consideram $I_{pil} = 0,8 I_c$ e $I_{vig} = I_{eq}$ segundo Branson [1]. Analogamente, a figura [8] apresenta a variação do deslocamento horizontal do topo dos pórticos dos exemplos 5 e 6 com a carga aplicada, também para as análises não-lineares geométricas e físicas (ANLGF) e não-lineares geométricas realizadas com $I_{pil} = 0,8 I_c$ e $I_{vig} = I_{eq}$ segundo Branson [1].

Analisando os gráficos das figuras [7] e [8] verifica-se que, de fato, a utilização dos valores de inércia iguais a $I_{pil} = 0,8 I_c$ e $I_{vig} = I_{eq}$ segundo Branson [1] é bem mais eficiente para representar o comportamento dos pórticos mais flexíveis dos exemplos 2 e 6 do que dos pórticos mais rígidos dos exemplos 3 e 5. Certamente isto se deve à própria formulação da inércia equivalente de Branson [1], que consiste em uma ponderação das inércias das seções bruta (estádio I) e fissurada (estádio II) de concreto. Quanto maior a relação M_a/M_f maior é a contribuição da inércia da seção fissurada I_{ff} ; caso o momento atuante M_a seja inferior ao momento de fissuração M_f , adota-se para a inércia equivalente de Branson [1] a inércia da seção bruta de concreto, I_c .

Os pórticos dos exemplos 2 e 6 apresentam vigas com menor inércia e possuem momentos de fissuração M_f bastante inferiores aos dos pórticos dos exemplos 3 e 5, conforme apresentado na tabela [3]. Isto significa que os momentos M_a ultrapassarão os mo-

Figura 8 - Relação entre carga e deslocamento para os pórticos dos exemplos 5 e 6

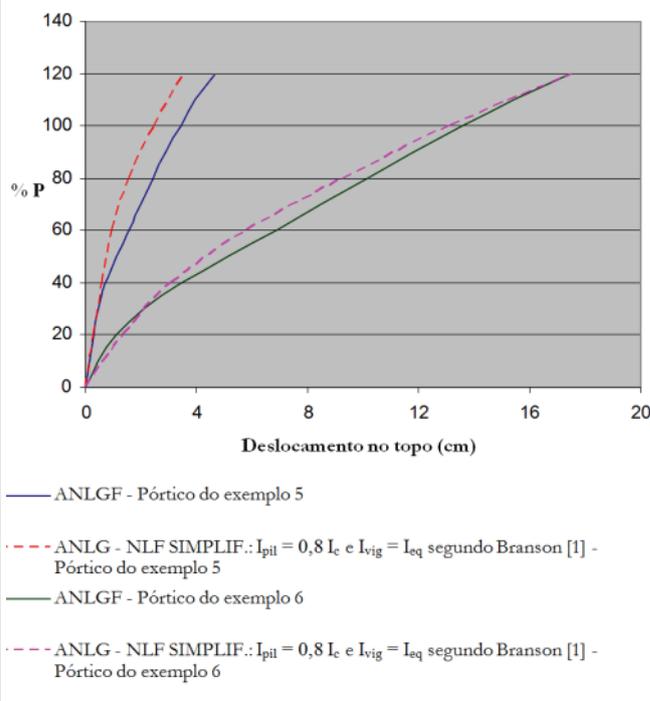
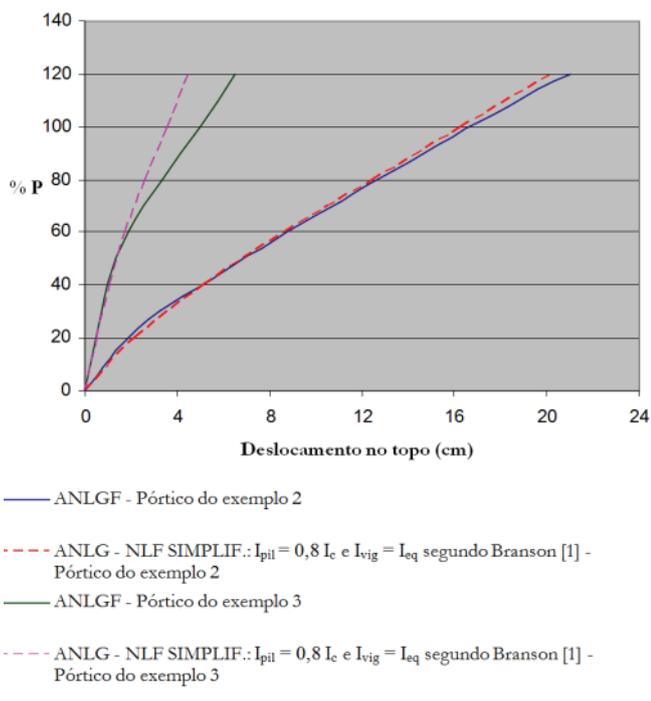


Figura 7 - Relação entre carga e deslocamento para os pórticos dos exemplos 2 e 3



mentos de fissuração M_f muito mais rapidamente para os pórticos dos exemplos 2 e 6 do que para os pórticos dos exemplos 3 e 5; nestes últimos, portanto, a inércia equivalente de Branson [1] se aproximará da inércia da seção bruta de concreto mesmo para maiores intensidades de carregamento, o que pode resultar em valores que não traduzem a real perda de rigidez da estrutura. No caso dos pórticos dos exemplos 2 e 6, a partir de menores valores de carregamento a inércia equivalente será determinada, em grande parte, pela inércia da seção fissurada I_{ff} , o que é coerente para estruturas com menor rigidez, e, dessa forma, com uma maior intensidade de fissuração.

Vale comentar que, considerando pequenas intensidades de carregamento, para as quais as estruturas ainda não fissuraram, as análises realizadas com $I_{pil} = 0,8 I_c$ e $I_{vig} = I_{eq}$ segundo Branson [1] representam com boa precisão o comportamento de todos os pórticos, tanto dos mais flexíveis quanto dos mais rígidos (figuras [7] e [8]). Este fato é previsível, uma vez que, para pequenos valores da carga P , os momentos fletores M_a são inferiores ao momento de fissuração M_f e, conseqüentemente, adota-se para a inércia equivalente de Branson [1] o valor da inércia da seção bruta de concreto, I_c .

5. Considerações finais

Este trabalho buscou avaliar a eficiência da inércia equivalente de Branson [1] para considerar a não-linearidade física das vigas de forma simplificada. Dessa forma, foram realizadas diversas análises numéricas de pórticos planos pertencentes a edifícios usuais de concreto armado utilizando o "software" ANSYS. Inicialmente,

Tabela 3 – Momentos de fissuração das vigas dos pórticos dos exemplos 2, 3, 5 e 6

Exemplo	Momento de fissuração M_f (kN · cm)
2	2625
3	6840
5	6370
6	2080

os pórticos foram processados considerando ambas as não-linearidades geométrica e física. Em seguida, foram realizadas análises não-lineares geométricas, considerando a não-linearidade física de forma aproximada, por meio da redução de rigidez dos elementos estruturais. No caso dos pilares, a rigidez foi reduzida em 20% e, para as vigas, foram utilizados os valores de redução de inércia segundo a formulação de Branson [1] e aqueles recomendados pela NBR 6118:2007 [2]. Os resultados das análises não-lineares geométricas, com consideração simplificada da não-linearidade física, foram, então, comparados com àqueles obtidos a partir das análises não-lineares geométricas e físicas, capazes de representar com maior precisão o comportamento real das estruturas.

O desempenho das análises não-lineares geométricas, com consideração simplificada da não-linearidade física, foi avaliado para os carregamentos correspondentes aos estados limites último (definido como 100% P), de serviço (considerado aproximadamente igual a 45% P) e para o carregamento sem majoração (75% P).

No estado limite de serviço, a análise que utiliza reduções de inércia iguais a $0,8 I_c$ para os pilares e I_{eq} segundo Branson [1] para as vigas pôde ser considerada a mais eficiente.

Para o carregamento sem majoração e o correspondente ao estado limite último, na maior parte dos exemplos analisados, a utilização dos valores de redução de inércia adotados pela NBR 6118:2007 [2] para os casos mais gerais, ou seja, $I_{pil} = 0,8 I_c$ e $I_{vig} = 0,4 I_c$, forneceu os resultados mais próximos dos obtidos a partir da análise não-linear geométrica e física.

Vale mencionar que a utilização dos valores iguais a $I_{pil} = 0,8 I_c$ e $I_{vig} = I_{eq}$ segundo Branson [1] mostrou-se bem mais eficiente para representar o comportamento dos pórticos mais flexíveis do que dos pórticos mais rígidos. Certamente isto se deve à própria formulação da inércia equivalente de Branson [1], que, nos pórticos mais rígidos, se aproximará da inércia da seção bruta de concreto mesmo para maiores intensidades de carregamento, podendo resultar em valores que não traduzem a real perda de rigidez da estrutura. No caso dos pórticos mais flexíveis, a partir de menores valores de carregamento a inércia equivalente será determinada, em grande parte, pela inércia da seção fissurada I_{ff} , o que é coerente para estruturas com menor rigidez, e, dessa forma, com uma maior intensidade de fissuração.

Verificou-se também que, considerando pequenas intensidades de carregamento, para as quais as estruturas ainda não fissuraram, as análises realizadas com $I_{pil} = 0,8 I_c$ e $I_{vig} = I_{eq}$ segundo Branson [1] representaram com boa precisão o comportamento de todos os pórticos, tanto dos mais flexíveis quanto dos mais rígidos. Este fato pode ser explicado lembrando que, para pequenos valores de carga, os momentos fletores M_a são inferiores ao

momento de fissuração M_f e, conseqüentemente, adota-se para a inércia equivalente de Branson [1] o valor da inércia da seção bruta de concreto, I_c .

Finalmente, partindo do princípio de que os coeficientes de redução de rigidez dos elementos estruturais são normalmente destinados aos projetos usuais de edifícios, geralmente dimensionados para o carregamento correspondente ao estado limite último (ELU), pode-se considerar as reduções de inércia iguais a $0,8 I_c$ para os pilares e $0,4 I_c$ para as vigas como as mais representativas do comportamento dos pórticos analisados. Ressalta-se ainda que a utilização de um coeficiente constante para todas as vigas resulta em um procedimento simples, de fácil aplicação prática e extremamente vantajoso quando comparado à utilização da inércia equivalente de Branson [1], que apresenta valores diferenciados para cada vão e para cada pavimento da estrutura.

6. Referências bibliográficas

- [01] BRANSON, D.E. Deflections of reinforced concrete flexural members. Journal of the American Concrete Institute, n.6331, p.637-667, 1966.
- [02] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118 – Projeto de estruturas de concreto - Procedimento. Rio de Janeiro, 2007.
- [03] PINTO, R.S.; RAMALHO, M.A.; CORRÊA, M.R.S. Consideração simplificada da não-linearidade física no projeto de edifícios de concreto armado. In: CONGRESSO BRASILEIRO DO CONCRETO, 40., Rio de Janeiro. *Anais*, 1998.
- [04] LIMA, J.S. Verificações da punção e da estabilidade global em edifícios de concreto: desenvolvimento e aplicação de recomendações normativas. São Carlos. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2001.
- [05] AMERICAN CONCRETE INSTITUTE – ACI COMMITTEE 435. Deflections of continuous concrete beams. ACI Journal, Report nº 70-70, December, 1973.
- [06] OLIVEIRA, D.M. Estudo dos processos aproximados utilizados para a consideração das não-linearidades física e geométrica na análise global das estruturas de concreto armado. Belo Horizonte. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, 2007.
- [07] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6123 – Forças devidas ao vento em edificações. Rio de Janeiro, 1988.
- [08] OLIVEIRA, D.M.; SILVA, N.A. Estudo dos processos aproximados utilizados para a consideração da não-linearidade física na análise de pórticos de concreto armado. Proceedings of the XXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering – CILAMCE. Guarapari, 2005.