

# Influence of the column rectangularity index and of the boundary conditions in the punching resistance of slab-column connections

## *Influência do índice de retangularidade dos pilares e das condições de contorno na resistência à punção de ligações laje-pilar*



O. S. PAIVA<sup>a</sup>  
odilsons@gmail.com

M. P. FERREIRA<sup>a</sup>  
mpina@ufpa.br

D. R. C. OLIVEIRA<sup>a</sup>  
denio@ufpa.br

A. F. LIMA NETO<sup>b</sup>  
aaraon@ufpa.br

M. R. TEIXEIRA<sup>b</sup>  
mrt@ufpa.br

### Abstract

Experimental evidence indicates that both the column rectangularity index and the boundary conditions of the connection may affect the ultimate punching resistance. This paper presents general aspects of these topics and, through the analysis of experimental results of tests on 131 slabs, evaluates the accuracy and suitability of recommendations presented by ABNT NBR 6118, Eurocode 2, ACI 318 and fib Model Code 2010. Experimental results showed that the security level of normative estimates trend to reduce as the column rectangularity increases, and in some cases, the punching resistance was overestimated. Finally, adjustments are suggested in equations presented by NBR 6118 and MC2010 in order to eliminate this trend of unsafe results.

**Keywords:** flat slab, punching shear, rectangular column, reinforced concrete, codes.

### Resumo

Evidências experimentais indicam que tanto o índice de retangularidade dos pilares quanto as condições de contorno da ligação podem afetar a resistência última à punção. Este artigo apresenta aspectos gerais sobre estas situações e, através da análise de resultados experimentais de ensaios em 131 lajes, avalia a precisão e a adequabilidade das recomendações apresentadas pelas normas ABNT NBR 6118, Eurocode 2, ACI 318 e fib Model Code 2010. Os resultados experimentais mostraram uma tendência de redução do nível de segurança das estimativas normativas, à medida que o índice de retangularidade aumenta, chegando-se em alguns casos a superestimar a resistência à punção. Por fim, são sugeridas adaptações nas equações da norma brasileira e do MC2010 buscando eliminar esta tendência de resultados inseguros.

**Palavras-chave:** lajes lisas, punção, pilar retangular, concreto armado, normas.

<sup>a</sup> Universidade Federal do Pará, Belém, Pará, Brasil.

<sup>b</sup> CAMTUC, Universidade Federal do Pará, Belém, Pará, Brasil.

## 1. Introdução

O dimensionamento de pavimentos com lajes lisas envolve a verificação da resistência à punção da ligação laje-pilar. Esta é uma etapa fundamental do projeto, uma vez que a estrutura pode atingir o estado limite último devido ao esgotamento da capacidade resistente ao cisalhamento nas vizinhanças da ligação laje-pilar, em um modo de ruptura denominado de punção. A punção pode levar a estrutura à ruína através do colapso progressivo, conforme mostrado na Figura 1. Ela apresenta o colapso parcial por punção de um pavimento de um edifício garagem registrado por Middleton [1], após um grande terremoto na cidade de Christchurch, Nova Zelândia.

Na ausência de uma teoria capaz de explicar e prever com precisão o mecanismo de ruptura por punção, em função das diversas variáveis envolvidas, o dimensionamento de lajes lisas é feito seguindo recomendações de normas de projeto. Estas recomendações são fundamentalmente empíricas e assumem uma tensão resistente ao cisalhamento constante ao longo de um perímetro de controle, sendo esta tensão normalmente estimada como uma função de parâmetros como a resistência à compressão do concreto, altura útil, taxa de armadura, geometria e dimensões do pilar. Em geral, as normas atuais de projeto tendem a ignorar em suas recomendações à influência do índice de retangularidade dos pilares e das condições de contorno da ligação laje-pilar. Ambos podem favorecer a polarização das tensões de cisalhamento, conforme discutido por Ferreira e Oliveira [2], o que pode reduzir significativamente a capacidade resistente à punção da ligação laje-pilar.

Este artigo apresenta resultados experimentais de 131 ensaios em modelos locais que representam a região da ligação laje-pilar de concreto armado. Foram selecionados casos de ligações unidirecionais e bidirecionais apoiadas em pilares retangulares sem armadura de cisalhamento. Estes resultados são comparados com as estimativas teóricas utilizando a norma brasileira, a ABNT NBR 6118 [3], e também recomendações de normas internacionais, como o Eurocode 2 [4], ACI 318 [5] e fib Model Code 2010 [6, 7]. São feitas ainda adaptações e análises complementares, aplicando nas expressões da norma brasileira e do MC2010 o tratamento de

pilares retangulares desenvolvido por Oliveira [8], a fim de avaliar os ganhos obtidos se este fator fosse incorporado nestas normas. A confiabilidade e precisão das normas selecionadas são avaliadas segundo uma escala de demérito apresentada por Collins [9].

## 2. Revisão bibliográfica

### 2.1 Geometria e dimensões do pilar e condições de contorno

A geometria e as dimensões dos pilares, bem como as condições de contorno das lajes, podem influenciar significativamente a resistência à punção de lajes lisas de concreto, uma vez que determinam a forma de distribuição das tensões na ligação laje-pilar. Com exceção do ACI, as normas utilizadas neste artigo desconsideram a influência desses parâmetros, admitindo uma distribuição uniforme de tensões, desde que a distribuição das cargas seja simétrica, evidenciando que elas admitem a hipótese de que, antes da ruptura, ocorre uma redistribuição significativa de tensões na ligação laje-pilar.

Evidências experimentais como as apresentadas por Hawkins et al. [10] e Oliveira et al. [11] indicam que no caso de pilares com índice de retangularidade maior que 2, a resistência à punção não aumenta de forma diretamente proporcional ao aumento da seção do pilar ou do comprimento do perímetro de controle. Esse comportamento é explicado devido à polarização das tensões cisalhantes em torno dos cantos dos pilares retangulares, que pode favorecer a ruptura por punção de forma prematura. Isso pode ser especialmente perigoso para o projeto de edifícios com lajes lisas, pois, na prática das estruturas, é comum ter pilares de edifícios com índice de retangularidade de 4 a 5 pelo menos.

As condições de contorno também alteram significativamente a distribuição de tensões cisalhantes em torno do pilar. Painéis de laje em um sistema estrutural com arranjo fundamentalmente unidirecional concentram as tensões cisalhantes nas faces do pilar perpendiculares ao menor vão, conforme pode ser observado em análises computacionais em modelos linear-elásticos, comumente utilizados no projeto de edifícios com lajes lisas. Se a ligação for com pilares com elevado índice de retangularidade, isso pode favorecer ainda mais a polarização das tensões, podendo reduzir a resistência à punção da ligação laje-pilar. Nenhuma norma apresenta recomendações para auxiliar os projetistas estruturais nestes casos.

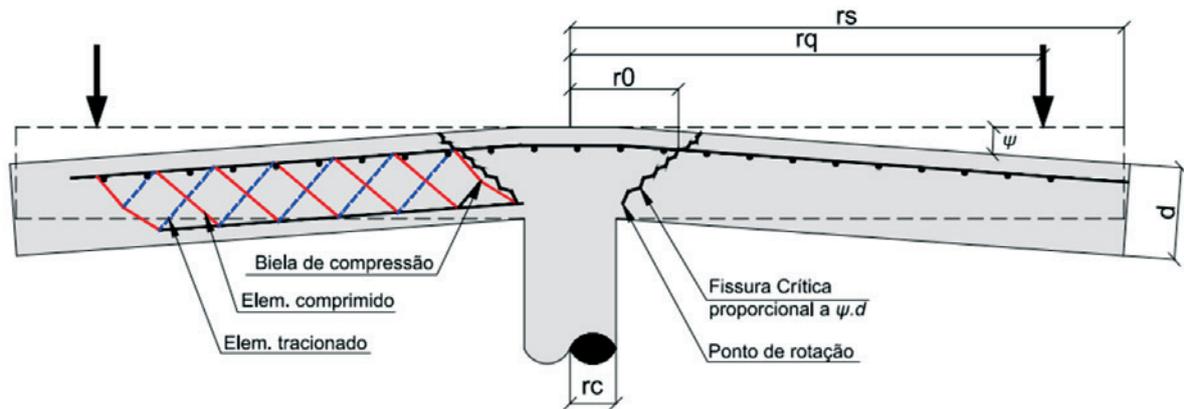
### 2.2 Teoria da fissura crítica de cisalhamento (TFCC)

A resistência à punção é um assunto que sempre mereceu grande atenção, com inúmeras pesquisas já realizadas buscando entender este fenômeno para as diferentes situações que ocorrem na prática do projeto de estruturas de concreto. Recentemente, a norma fib Model Code 2010 [6, 7] apresentou formulações novas, baseadas na Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento (TFCC). Esta teoria foi desenvolvida inicialmente por Muttoni e Schwartz [12], mas vem sendo aprimorada em trabalhos como os de Muttoni [13], Fernandez Ruiz e Muttoni [14] e Sagasetta et al. [15]. Ela estabelece como hipótese fundamental que a resistência à punção diminui com o aumento da rotação da laje devido ao surgimento de uma fissura crítica de cisalhamento, que se propaga ao longo da espessura da laje, cortando a biela inclinada que transmite a força cortante para o pilar.

**Figura 1 – Ruptura por punção em pavimento com lajes lisas (Middleton (1))**



Figura 2 - Teoria da fissura crítica de cisalhamento (adaptado de Moraes Neto (36))



A abertura da fissura, proporcional ao produto  $\psi \cdot d$  (ver Figura 2), reduz a resistência da biela, podendo levar a ruptura por punção. A transmissão de cisalhamento na fissura crítica é assumida como sendo uma função da rugosidade da superfície, que está diretamente relacionada com o tamanho máximo do agregado graúdo. Esses conceitos levaram ao desenvolvimento da Equação 1, que define a resistência à punção para uma laje sem armadura de cisalhamento, expressa como uma função: do comprimento de um perímetro de controle ( $u_1$ ) afastado  $d/2$  da face do pilar; da altura útil da laje ( $d$ ); da resistência à compressão do concreto ( $f_c$ ); do produto  $\psi \cdot d$ , onde  $\psi$  é a rotação da laje, calculada segundo a Equação 2; do diâmetro máximo do agregado ( $d_g$ ); e de um diâmetro de referência do agregado ( $d_{g0}$ ), admitido como sendo de 16 mm. Com as equações 1 e 2 é possível fazer um gráfico igual ao ilustrado na Figura 3, onde a resistência à punção da ligação é determinada no ponto de interseção das duas curvas.

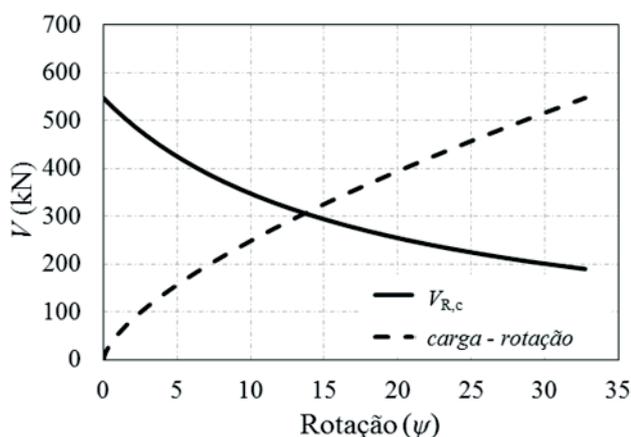
$$V_{R,c} = \frac{3}{4} \cdot \frac{u_1 \cdot d \cdot \sqrt{f_c}}{1 + 15 \cdot \frac{\psi \cdot d}{d_{g0} + d_g}} \quad (1)$$

$$\psi = 1,5 \cdot \frac{r_s}{d} \cdot \frac{f_{ys}}{E_s} \cdot \left( \frac{V_E}{V_{flex}} \right)^{3/2} \quad (2)$$

Onde:

$r_s$  é a distância entre o eixo do pilar e a linha de momentos nulos;  
 $f_{ys}$  é a tensão de escoamento da armadura de flexão;  
 $E_s$  é o módulo de elasticidade da armadura de flexão;  
 $V_E$  é a força aplicada;  
 $V_{flex}$  é a resistência à flexão calculada através da teoria das linhas de ruptura.

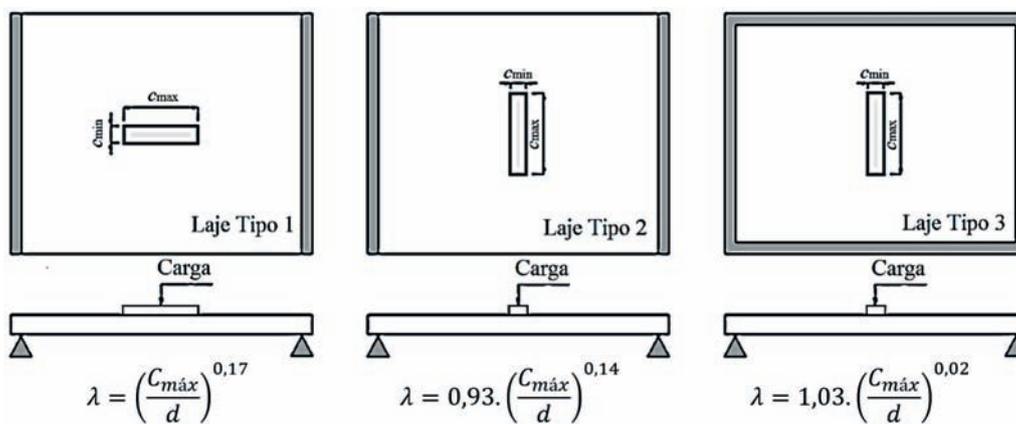
Figura 3 - Representação gráfica do cálculo da carga de ruptura por punção segundo a TFCC



### 2.3 Fator de flexão ( $\lambda$ )

Oliveira [8] propôs um parâmetro  $\lambda$  para corrigir as estimativas de resistência à punção para o caso de lajes apoiadas em pilares retangulares, a fim de levar em consideração tanto o comportamento à flexão das lajes (condições de contorno) quanto o índice de retangularidade e a orientação dos pilares. Eles foram desenvolvidos tendo como referência resultados experimentais de ensaios em lajes de concreto armado sob carregamento pontual. Os fatores de flexão ( $\lambda$ ) foram inicialmente propostos para correção dos resultados teóricos obtidos com as equações recomendadas pela antiga norma CEB-FIP MC90 [16], na qual ainda hoje baseiam-se as recomendações da nova versão da norma brasileira para projeto de estruturas de concreto. Na metodologia proposta, as la-

Figura 4 – Classificação das lajes e fatores de flexão (adaptado de Oliveira (8))



jes foram classificadas em três grupos distintos, tendo sido proposto para cada grupo um fator de flexão ( $\lambda$ ) para correção das estimativas de resistência à punção, conforme mostrado na Figura 4.

Na proposta de Oliveira et al. [11], os fatores de flexão funcionam como um parâmetro de correção da constante de 0,18, que é o valor característico se for retirada da equação original da MC90 o coeficiente de segurança, que é de 1,5, resultando na Equação 3. Os resultados obtidos com esta alteração foram significativamente melhores em comparação com resultados experimentais e eliminou a tendência da norma de superestimar a resistência à punção de lajes lisas apoiadas sob pilares retangulares. De forma análoga, esta metodologia será utilizada nas estimativas feitas com as recomendações da norma brasileira e com as novas recomendações do fib Model Code 2010, a fim de avaliar os ganhos obtidos com a implementação deste parâmetro.

$$V_{R,c} = \frac{0,18}{\lambda} \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{200}{d}}\right) \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_c')^{1/3} \cdot u \cdot d \quad (3)$$

#### 2.4 Classificação por pontos de demérito

Collins [9] apresentou uma escala para classificação da confiabi-

Tabela 1 – Classificação por pontos de demérito (Collins (9))

$V_{exp}/V_{teo}$	Classificação	Penalidade
<0,50	Extremamente perigoso	10
(0,50-0,85)	Perigoso	5
(0,85-1,15)	Segurança apropriada	0
(1,15-2,00)	Conservador	1
$\geq 2,00$	Extremamente conservador	2

lidade das recomendações normativas. Trata-se da Classificação por Pontos de Demérito (*Demerit Points Classification*, DPC), que leva em consideração aspectos de segurança, precisão e dispersão, em função da razão entre a resistência última observada em ensaios experimentais ( $V_{exp}$ ) e a capacidade resistente teórica estimada segundo a norma ( $V_{teo}$ ). A Tabela 1 mostra uma adaptação feita nesta pesquisa para a escala de demérito proposta originalmente. Nela, em função da faixa dos resultados de  $V_{exp}/V_{teo}$ , são estabelecidas penalidades para a norma sob análise. O valor do demérito de cada norma é calculado por meio da soma dos produtos do número de lajes existentes em cada intervalo, pela sua penalidade correspondente. Quanto maior o valor da soma total, pior é considerado o processo normativo.

#### 2.5 Recomendações normativas

##### 2.5.1 NBR 6118

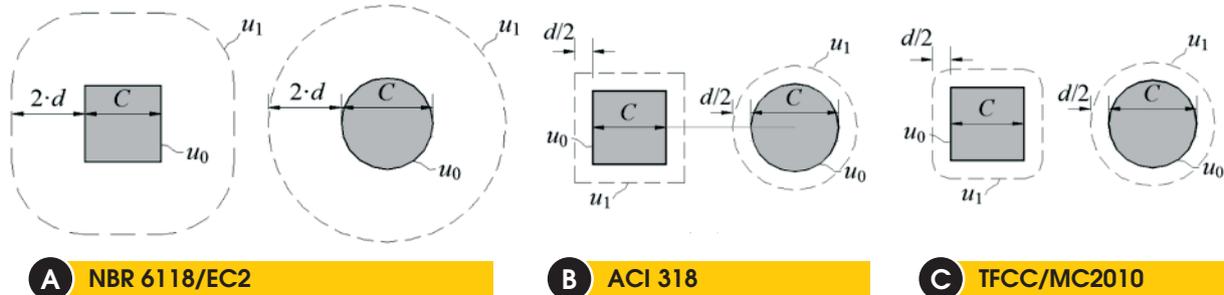
A NBR 6118 [3] recomenda que a resistência à punção de lajes lisas de concreto armado sem armadura de cisalhamento seja verificada em duas regiões: a resistência à tração diagonal da ligação deve ser verificada no perímetro de controle  $u_1$ , segundo a Equação 4; a resistência máxima da ligação (esmagamento da biela) deve ser verificada no perímetro de controle  $u_0$  em torno do pilar, através da Equação 5. A Figura 5a apresenta detalhes sobre os perímetros de controle propostos pela norma brasileira.

$$V_{R,c} = 0,18 \cdot \left(1 + \sqrt{200/d}\right) \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_c')^{1/3} \cdot u_1 \cdot d \quad (4)$$

Onde:

$\rho$  é a taxa geométrica de armadura de flexão, expressa por  $\rho = \sqrt{\rho_x \cdot \rho_y}$ .  $\rho_x$  e  $\rho_y$  são as taxas de armadura nas duas direções ortogonais, calculadas considerando uma largura igual à dimensão ou área carregada do pilar acrescida de 3d para cada um dos lados;

Figura 5 - Perímetro de controle para diferentes métodos de cálculo



$f_c$  é a resistência à compressão do concreto em MPa ( $f_c \leq 50$  MPa);  
 $u_1$  é um perímetro de controle afastado de uma distância de  $2 \cdot d$  da face do pilar;  
 $d$  é a altura útil da laje em mm.

$$V_{R,max} = 0,27 \cdot \alpha_{v1} \cdot f_c \cdot u_0 \cdot d \quad (5)$$

Onde:

$$\alpha_{v1} = (1 - f_c / 250)$$

$u_0$  é o perímetro do pilar.

### 2.5.2 Eurocode 2

As recomendações apresentadas pelo Eurocode 2 [4] são semelhantes às apresentadas pela norma brasileira, pois ambas baseiam-se nas recomendações da norma CEB-FIP MC90 [16]. Ela diferencia-se da norma brasileira, que ainda hoje adota as recomendações do MC90, por impor limites para o valor do *size effect* ( $\xi \leq 2,0$ ) e da taxa de armadura de flexão ( $\rho \leq 2,0\%$ ). Isto foi feito buscando eliminar a tendência de resultados contra a segurança apontada em pesquisas internacionais e nacionais, como as de Sacramento et al. [17] e Oliveira et al. [18]. Assim, a resistência à punção é tomada como sendo o menor valor fornecido pelas Equações 6 e 7. Os perímetros de controle são iguais aos da norma brasileira (ver Figura 5a).

$$V_{R,c} = 0,18 \cdot \xi \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_c)^{1/3} \cdot u_1 \cdot d \quad (6)$$

$$V_{R,max} = 0,3 \cdot f_c \cdot \left(1 - \frac{f_c}{250}\right) \cdot u_0 \cdot d \quad (7)$$

Onde:

$f_c$  é a resistência à compressão do concreto em MPa ( $f_c \leq 90$  MPa);  
 $\rho$  é a taxa de armadura de flexão tracionada média da laje obtido como  $\rho = \sqrt{\rho_x \cdot \rho_y} \leq 2,0\%$ ;

$\rho_x$  e  $\rho_y$  são as taxas nas direções x e y, respectivamente. Devem ser consideradas as barras dentro de uma região afastada  $3 \cdot d$  das faces do pilar.

$\xi = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \leq 2,0$  é um número adimensional e d deve ser expresso em mm.

### 2.5.3 ACI 318

Segundo o ACI 318 [5], a verificação da resistência à punção em lajes lisas de concreto armado sem armaduras de cisalhamento deve ser feita através da verificação das tensões cisalhantes em um perímetro de controle afastado de uma distância igual a  $d/2$  das faces do pilar ou das extremidades da área carregada, conforme ilustrado na Figura 5b. A resistência à punção de uma laje sem armaduras de cisalhamento é expressa pela Equação 8.

$$V_{R,c} = \min \left\{ \begin{aligned} &\left(1 + \frac{21}{\beta_c}\right) \cdot \frac{1}{6} \cdot \sqrt{f_c} \cdot u_1 \cdot d \\ &\left(\frac{\alpha_s \cdot d}{u_1} + 2\right) \cdot \frac{1}{12} \cdot \sqrt{f_c} \cdot u_1 \cdot d \\ &\frac{1}{3} \cdot \sqrt{f_c} \cdot u_1 \cdot d \end{aligned} \right. \quad (8)$$

Onde:

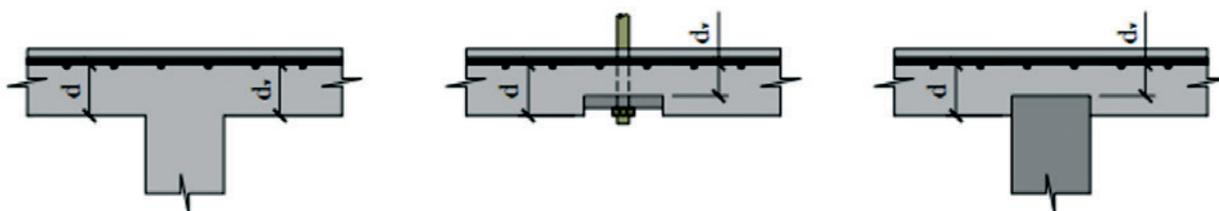
$\beta_c$  é a razão entre a maior e a menor dimensão do pilar;

$\alpha_s$  é uma constante que assume valor igual a 40 para o caso de pilares internos, 30 para pilar de borda e 20 para pilar de canto;

$u_1$  é o comprimento de um perímetro de controle afastado  $d/2$  da face do pilar;

$f_c$  é a resistência à compressão do concreto em MPa ( $f_c \leq 69$  MPa).

Figura 6 – Altura útil efetiva da laje (fib Model Code 2010 (6, 7))



### 2.5.4 fib MODEL CODE 2010

As recomendações apresentadas pelo fib Model Code 2010 [6, 7] baseiam-se num modelo físico fundamentado na Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento, apresentada de forma resumida no item 2.1 deste artigo. Na norma, a resistência à punção deve ser checada em torno de um perímetro de referência ( $b_o$ ), admitido a uma distância de  $0,5 \cdot d_v$  das faces do pilar ou das extremidades da área carregada, com geometria conforme indicado na Figura 5c. A altura útil efetiva da laje,  $d_v$ , deve considerar o nível do apoio, conforme mostra a Figura 6. No caso de lajes lisas sem armaduras de cisalhamento, a resistência à punção pode ser calculada segundo a Equação 9.

$$V_{R,c} = k_{\psi} \cdot \frac{\sqrt{f_c}}{\gamma_c} \cdot b_o \cdot d_v \quad (9)$$

Onde:

$f_c$  é a resistência à compressão do concreto;

$d_v$  é a altura útil efetiva da laje;

$\gamma_c$  é o coeficiente de segurança do concreto com valor de 1,5. Para efeito dos cálculos ele foi assumido por igual a 1.

$k_{\psi}$  é calculado pela Equação 10 e depende da rotação da laje na região do apoio.

$$k_{\psi} = \frac{1}{1,5 + 0,9 \cdot \psi \cdot d \cdot k_{dg}} \leq 0,6 \quad (10)$$

$$k_{dg} = \frac{32}{16 + d_g} \geq 0,75 \quad (11)$$

Onde:

$d_g$  é o diâmetro máximo do agregado usado no concreto da laje. Caso  $d_g$  seja maior ou igual a 16 mm,  $k_{dg}$  pode ser assumido como sendo igual a 1,0.

O fib Model Code 2010 estabelece que a rotação da laje ( $\psi$ ) pode ser calculada com diferentes níveis de complexidade, dependendo do rigor necessário, com a precisão obtida aumentando em função

da complexidade da análise. O nível I de aproximação é o aconselhado para o projeto de novas estruturas. O nível II é apropriado tanto para o projeto de novas estruturas como para a verificação de estruturas existentes. Em casos especiais, onde os carregamentos ou a própria estrutura fuja dos padrões convencionais, recomenda-se o nível III de aproximação a fim de estimar melhor a resposta da laje. Em casos especiais, permite-se que a rotação seja obtida através de análises não-lineares, correspondendo ao nível IV de aproximação.

Na prática do projeto de estruturas de concreto, o nível I pode ser usado, por exemplo, no caso de lajes projetadas por meio de análises elásticas sem que sejam consideradas redistribuições significativas das forças, com a rotação podendo ser estimada segundo a Equação 12. Nos casos em que a redistribuição significativa de momentos seja considerada em projeto, pode ser utilizada a Equação 13 para estimar a rotação da laje, referente ao nível II de aproximação.

$$\psi = 1,5 \cdot \frac{r_s}{d} \cdot \frac{f_{ys}}{E_s} \quad (12)$$

$$\psi = 1,5 \cdot \frac{r_s}{d} \cdot \frac{f_{ys}}{E_s} \cdot \left( \frac{m_s}{m_R} \right)^{1,5} \quad (13)$$

Onde:

$f_{ys}$  é a tensão de escoamento da armadura de flexão;

$E_s$  é o módulo de elasticidade da armadura de flexão;

$r_s$  é a distância entre o eixo do pilar e a linha de momentos nulos. O valor de  $r_s$  pode ser considerado como sendo igual a  $0,22 \cdot L$  (nas direções  $x$ ,  $L_x$  e  $y$ ,  $L_y$ ) em lajes onde a relação entre os vãos,  $L_x/L_y$ , fica limitada em 0,5 e 2,0.

$m_s$  é o momento fletor médio solicitante;

$m_R$  é o momento fletor médio resistente.

Ambos os momentos são calculados para uma faixa de comprimento  $b_s$ , sendo  $b_s = 1,5 \cdot (r_{s,x} \cdot r_{s,y})^{0,5} \leq L_{min}$ . Neste caso,  $r_{s,x}$  e  $r_{s,y}$  denota o ponto em que os momentos são iguais a zero, tendo como referência o eixo do apoio, nas direções  $x$  e  $y$ . O valor aproximado de  $m_{sd}$  depende da localização do pilar na edificação. A norma considera três localizações possíveis para os pilares: (1) interno à edificação, (2) de borda e (3) de canto. No caso de pi-

lar interno, onde a laje possua momentos resistentes iguais nas duas direções,  $m_s$  é calculado simplificadaamente pela Equação 14. O momento fletor médio resistente ( $m_R$ ) pode ser obtido segundo os conceitos da Teoria das Linhas de Ruptura, através da Equação 15.

$$m_s = \frac{V_E}{8} \tag{14}$$

$$m_R = \rho \cdot d^2 \cdot f_{ys} \cdot \left( 1 - \frac{\rho \cdot f_{ys}}{2 \cdot f_c} \right) \tag{15}$$

Onde:

$\rho$  é a taxa de armadura de flexão.

No nível III de aproximação, o coeficiente 1,5 da Equação 13 pode ser substituído por 1,2 se os valores de  $r_s$  e  $m_s$  forem calculados por um modelo linear-elástico. No nível IV de aproximação, o

Tabela 2- Características das lajes presentes no banco de dados

Autores	Laje	Tipo	d (mm)	c <sub>min</sub> (mm)	c <sub>máx</sub> (mm)	ρ (%)	f <sub>c</sub> (MPa)	f <sub>ys</sub> (MPa)	E <sub>sf</sub> (GPa)	dg (mm)	P <sub>flex</sub> (kN)	V <sub>exp</sub> (kN)	Modo de ruptura
Ferreira [30]	L1a	2	87,0	85	85	0,94	42,4	488	220,0	12,0	255,1	174,0	P
	L1b	2	89,0	85	85	1,18	51,4	488	220,0	12,0	264,2	231,5	FP
	L1c	2	87,0	85	85	1,48	43,5	488	220,0	12,0	255,8	190,0	P
Lima Neto [28]	AL1	1	100,0	150	170	1,37	42,0	616	207,0	19,0	472,0	300,0	P
	AL2	1	102,0	150	170	1,34	44,0	616	207,0	19,0	485,0	380,0	P
	AL3	1	100,0	150	170	1,37	41,0	616	207,0	19,0	472,0	340,0	P
	AL4	1	95,0	150	170	1,44	47,0	616	207,0	19,0	452,0	310,0	P
Oliveira [8]	L1a	1	107,0	120	120	1,09	57,0	750	234,0	15,0	241,2	234,0	FP
	L1b	1	108,0	120	120	1,08	59,0	750	234,0	15,0	657,1	322,0	P
	L1c	3	107,0	120	120	1,09	59,0	750	234,0	15,0	706,7	318,0	P
	L2a	1	109,0	120	240	1,07	58,0	750	234,0	15,0	261,7	246,0	FP
	L2b	2	106,0	120	240	1,1	58,0	750	234,0	15,0	644,6	361,0	P
	L2c	3	107,0	120	240	1,09	57,0	750	234,0	15,0	735,6	331,0	P
	L3a	1	108,0	120	360	1,08	56,0	750	234,0	15,0	277,0	241,0	FP
	L3b	2	107,0	120	360	1,09	60,0	750	234,0	15,0	645,2	400,0	P
	L3c	3	106,0	120	360	1,1	54,0	750	234,0	15,0	745,8	358,0	P
	L4a	1	108,0	120	480	1,08	56,0	750	234,0	15,0	295,3	251,0	FP
	L4b	2	106,0	120	480	1,1	54,0	750	234,0	15,0	637,1	395,0	P
	L4c	3	107,0	120	480	1,09	56,0	750	234,0	15,0	792,2	404,0	P
	L5a	1	108,0	120	600	1,08	57,0	750	234,0	15,0	318,9	287,0	FP
	L5b	2	108,0	120	600	1,08	67,0	750	234,0	15,0	655,4	426,0	P
	L5c	3	109,0	120	600	1,07	63,0	750	234,0	15,0	857,7	446,0	P
Hawkins et al. [10]	1	1	117,3	305	305	1,12	30,9	419	200,0	12,0	362,0	391,0	F
	2	1	117,3	203	406	1,12	26,9	419	200,0	12,0	384,9	358,0	P
	3	1	117,3	152	457	1,12	32,6	419	200,0	12,0	400,0	340,0	P
	4	1	117,3	114	495	1,12	31,6	419	200,0	12,0	411,0	337,0	P
	5	2	117,3	152	457	1,12	27,4	419	200,0	12,0	489,2	362,0	P
	6	2	117,3	152	457	1,12	23,1	419	200,0	12,0	322,6	342,0	F
	7	3	117,3	152	457	0,86	26,4	419	200,0	12,0	417,9	326,0	P
	8	3	120,7	114	495	0,8	26,6	422	200,0	12,0	416,9	321,0	P
	9	3	120,7	152	305	0,76	30,1	422	200,0	12,0	350,0	322,0	P
Regan e Rezai-Jorabi [24]	14R	1	79,0	75	100	1,54	31,0	670	200,0	13,0	236,9	154,0	P
	15R	2	79,0	100	150	1,54	30,8	670	200,0	13,0	235,6	172,0	P
	19R	2	79,0	100	150	1,51	29,0	670	200,0	13,0	288,1	170,0	P

P é o modo de ruptura por punção; FP é o modo de ruptura por flexo-punção e F é o modo de ruptura por flexão.

cálculo da rotação  $\psi$  pode ser baseado em uma análise não-linear.

### 3. Banco de dados

Para fins de comparação e avaliação das recomendações normativas apresentadas, foram selecionados resultados experimentais de ensaios em lajes lisas de concreto armado sem armaduras de cisalhamento, unidirecionais e bidirecionais, com pilares quadrados e retangulares, formando um banco de dados com 131 lajes. Foram usadas as lajes de Forssel e Holmberg [19], Elstner e Hognestad [20], Mowrer e Vanderbilt [21], Hawkins et. al. [10], Regan [22], Regan [23], Regan e Rezai-Jorabi [24], Tomaszewicz [25], Leong e Teng. [26], Borges [27], Lima Neto [28], Oliveira [8], Al-Yousif e Regan [29], Ferreira [30], Vilhena et al. [31], Carvalho [32], Mouro [33], Damasceno [34] e Moraes Neto [35]. Para os cálculos segundo o fib Model Code 2010, como alguns autores não especificaram o diâmetro máximo dos agregados, foi adotado o valor médio de 13mm obtido entre os diâmetros conhecidos do banco de dados, excluindo os valores maiores que  $d_{gmax}=16$  mm definido pela norma. A Tabela 2 mostra as características das lajes do banco de dados.

Como o fib Model Code 2010 não apresenta nenhuma instrução específica para a verificação da resistência à punção em lajes apoiadas sobre pilares retangulares, nem tão pouco como devem ser tratados os casos onde os painéis de laje têm vãos diferentes (retangulares por exemplo), foi preciso assumir alguns parâmetros e tomar algumas decisões a fim de permitir seu uso nestas análises. No caso de painéis retangulares, foram calculadas as rotações nas duas direções, usando-se nas estimativas de resistência à punção o maior valor encontrado, que segundo a teoria da fissura crítica de cisalhamento, resultaria na situação mais desfavorável. Ainda sobre o cálculo das rotações, foram utilizados os valores de  $V_{flex}$  (resistência à flexão) fornecidos pelos autores dos ensaios das lajes que compõem o banco de dados. Por fim, nos casos de pilares com seção retangular, foram admitidos perímetros de controle também retangulares, tomados a uma distância de 0,5-dv das faces do pilar.

Buscando melhorar os resultados da NBR 6118 [3], avaliou-se o desempenho de suas estimativas teóricas se fossem incorporados nesta norma os fatores de flexão, conforme sugerido por Oliveira [8]. Ainda no caso da norma brasileira, avaliou-se também o

Tabela 2 – (cont. 1)

Autores	Laje	Tipo	d (mm)	$c_{min}$ (mm)	$c_{max}$ (mm)	$\rho$ (%)	$f'_c$ (MPa)	$f_{ys}$ (MPa)	$E_{sf}$ (GPa)	dg (mm)	$P_{flex}$ (kN)	$V_{exp}$ (kN)	Modo de ruptura
Teng et al. [26]	OC11	3	105,3	200	200	1,81	36,0	452	200,0	13,0	604,3	423,0	P
	OC13	3	107,3	200	600	1,71	35,8	452	200,0	13,0	676,2	568,0	P
	OC15	3	102,8	200	1000	1,76	40,2	452	200,0	13,0	697,8	649,0	P
	OC13	3	109,8	200	600	1,67	33,0	470	200,0	13,0	715,5	508,0	P
	C11F22	3	155,0	250	250	1,72	35,4	460	200,0	13,0	1306,3	627,0	P
	C13F22	3	155,0	250	750	1,66	35,6	460	200,0	13,0	1494,3	792,0	P
	C15F22	3	160,0	250	1250	1,64	35,4	460	200,0	13,0	1760,0	1056,0	P
Forssel e Holmberg [19]	C13F11	3	159,0	250	750	1,07	35,5	520	200,0	13,0	1183,1	769,0	P
	10	3	104,0	25	300	0,68	17,6	500	200,0	13,0	221,4	186,0	P
	11	3	112,0	140	540	0,63	17,6	500	200,0	13,0	281,8	279,0	P
Elstner e Hognestad [20]	12	3	108,0	140	340	0,65	17,6	500	200,0	13,0	308,1	265,0	P
	A7	1	114,5	254	254	2,48	28,5	321	200,0	13,0	416,7	400,0	P
	A8	1	114,5	356	356	2,48	21,9	321	200,0	13,0	423,3	436,0	P
	A2a	3	114,5	254	254	2,48	13,7	321	200,0	13,0	586,0	334,0	P
	A2b	3	114,5	254	254	2,48	19,5	321	200,0	13,0	655,7	400,0	P
	A2c	3	114,5	254	254	2,48	37,4	321	200,0	13,0	741,3	467,0	P
	A7b	3	114,5	254	254	2,48	27,9	321	200,0	13,0	711,1	512,0	P
Regan [22]	A5	3	114,5	356	356	2,48	27,8	321	200,0	13,0	762,9	534,0	P
	DT1	1	190,0	150	150	1,28	43,6	530	200,0	13,0	847,8	780,0	P
Al-Yousif e Regan [29]	BD2	1	101,0	100	100	1,28	42,2	530	200,0	13,0	299,0	293,0	P
	1	1	80,0	100	500	0,98	23,6	472	200,0	13,0	229,6	163,0	P
	2	3	80,0	100	500	0,98	23,2	472	200,0	13,0	243,0	209,0	P
	3	2	80,0	100	500	0,98	21,2	472	200,0	13,0	225,0	189,0	P
Carvalho [32]	4	3	80,0	300	300	0,98	22,0	472	200,0	13,0	239,6	242,0	P
	1	2	85,0	85	85	1,32	52,0	530	646,0	19,0	220,2	185,0	P
	2	2	86,0	85	255	1,32	52,0	530	646,0	19,0	223,8	226,0	P
	3	2	85,0	85	425	1,32	50,0	530	646,0	19,0	219,3	239,0	P

P é o modo de ruptura por punção; FP é o modo de ruptura por flexo-punção e F é o modo de ruptura por flexão.

Tabela 2 - (cont. 2)

Autores	Laje	Tipo	d (mm)	$c_{min}$ (mm)	$c_{max}$ (mm)	$\rho$ (%)	$f'_c$ (MPa)	$f_{ys}$ (MPa)	$E_{sf}$ (GPa)	$d_g$ (mm)	$P_{flex}$ (kN)	$V_{exp}$ (kN)	Modo de ruptura
Borges [27]	L42	3	139,0	200	400	1,46	43,2	604	200,0	13,0	1152,6	657,0	P
	L42a	3	164,0	200	400	1,23	36,2	604	200,0	13,0	1358,8	693,0	P
	L45	3	154,0	200	600	1,31	42,0	604	200,0	13,0	1352,5	798,0	P
	L46	3	164,0	200	800	1,23	39,3	604	200,0	13,0	1518,3	911,0	P
	L41	3	139,0	150	250	1,46	44,7	604	200,0	13,0	1103,9	563,0	P
	L41a	3	164,0	150	250	1,23	38,9	604	200,0	13,0	1304,3	600,0	P
	L43	3	164,0	150	450	1,23	38,7	604	200,0	13,0	1369,8	726,0	P
	L44	3	164,0	150	600	1,23	40,0	604	200,0	13,0	1435,8	761,0	P
Mowrer e Vanderbilt [21]	1	3AL	51,0	102	102	1,1	28,6	386	200,0	13,0	75,4	86,0	F
	2	3AL	51,0	102	102	2,2	24,9	386	200,0	13,0	136,0	102,0	P
	3	3AL	51,0	152	152	1,1	21,1	386	200,0	13,0	77,5	79,0	F
	4	3AL	51,0	152	152	2,2	18,0	386	200,0	13,0	132,0	99,0	P
	5	3AL	51,0	203	203	1,1	15,5	386	200,0	13,0	78,8	93,0	F
	6	3AL	51,0	203	203	2,2	27,2	386	200,0	13,0	154,7	133,0	P
	7	3AL	51,0	254	254	1,1	23,3	386	200,0	13,0	87,9	109,0	F
	8	3AL	51,0	254	254	2,2	22,9	386	200,0	13,0	158,3	152,0	P
	9	3AL	51,0	305	305	1,1	28,0	386	200,0	13,0	95,2	119,0	F
	10	3AL	51,0	305	305	2,2	26,4	386	200,0	13,0	171,7	158,0	P
	11	3AL	51,0	356	356	1,1	27,8	386	200,0	13,0	101,5	138,0	F
	12	3AL	51,0	356	356	2,2	25,0	386	200,0	13,0	183,2	185,0	F
	13	3AL	51,0	406	406	1,1	24,9	386	200,0	13,0	107,4	145,0	F
	14	3AL	51,0	406	406	2,2	24,6	386	200,0	13,0	194,7	185,0	P
Damasceno [34]	L1A	2	89,3	85	85	1,22	41,3	600	240,0	13,0	265,5	188,5	P
	L2A	2	89,3	85	255	1,22	40,0	600	240,0	13,0	264,6	254,0	FP
	L3A	2	99,7	85	425	1,09	39,7	600	240,0	13,0	303,1	297,0	F
	L4A	2	98,6	85	595	1,1	40,4	600	240,0	13,0	295,5	325,0	F
	L1B	2	98,1	85	85	0,56	41,4	600	240,0	13,0	296,6	172,0	P
	L2B	2	90,5	85	255	0,61	42,0	600	240,0	13,0	273,9	194,5	P
	L3B	2	92,7	85	425	0,59	41,6	600	240,0	13,0	286,4	232,0	FP
	L4B	2	98,1	85	595	0,56	40,5	600	240,0	13,0	292,5	254,5	FP
Vilhena et al. [31]	L1a	2	65,0	85	85	1,2	51,2	518	259,0	12,0	73,0	123,0	P
	L1b	2	65,0	85	85	1,4	51,2	518	259,0	12,0	89,0	122,0	P
	L3a	2	65,0	85	255	1,2	53,6	518	259,0	12,0	73,0	134,5	FP
	L3b	2	67,0	85	255	1,4	53,6	518	259,0	12,0	92,0	134,0	FP
	L5a	2	65,0	85	425	1,2	55,2	518	259,0	12,0	73,0	122,0	F
	L5b	2	65,0	85	425	1,4	55,2	518	259,0	12,0	89,0	124,5	F
Moraes Neto [35]	L1	3	87,0	85	85	1,4	39,4	602	255,3	13,0	453,0	224,0	P
	L2	3	87,5	85	255	1,2	39,8	602	255,3	13,0	422,0	241,0	P
	L3	3	86,5	85	425	1,3	40,9	602	255,3	13,0	473,0	294,0	P

P é o modo de ruptura por punção; FP é o modo de ruptura por flexo-punção e F é o modo de ruptura por flexão.

efeito de reduzir o coeficiente da Equação 4, de 0,18 para 0,16, conforme sugerido por Sacramento et al. [17]. No caso da norma fib Model Code 2010, também foram testadas adaptações que permitissem a melhoria de suas recomendações. Neste caso, seu desempenho foi analisado caso os fatores de flexão fossem implementados nesta norma.

Na Tabela 2 apresenta-se ainda o modo de ruptura das lajes, que reflete, preferencialmente, as observações experimentais dos autores. Nos casos em que o autor não definiu o modo de

ruptura das lajes, o modo de ruptura foi estabelecido através da razão entre a resistência última observada no ensaio e capacidade resistente a flexão estimada. Para 1,10 definiu-se que o modo de ruptura foi de flexão. Para 0,90 considerou-se que a ruptura foi por punção. Nos casos intermediários ( $0,90 < < 1,10$ ), admitiu-se como modo de ruptura a flexo-punção. Estes resultados são apresentados e discutidos a seguir, tendo-se retirado das análises estatísticas os casos de lajes que romperam por flexão.

Tabela 2 - (cont. 3)

Autores	Laje	Tipo	d (mm)	c <sub>min</sub> (mm)	c <sub>máx</sub> (mm)	ρ (%)	f <sub>c</sub> (MPa)	f <sub>ys</sub> (MPa)	E <sub>sf</sub> (GPa)	dg (mm)	P <sub>flex</sub> (kN)	V <sub>exp</sub> (kN)	Modo de ruptura
Mouro [33]	L1	3	94,0	250	250	1,39	29,0	597	215,0	13,0	520,8	375,0	P
	L2	3	93,0	230	270	1,4	29,0	597	215,0	13,0	513,2	390,0	P
	L3	3	94,0	215	285	1,39	29,0	597	215,0	13,0	520,8	375,0	P
	L4	3	90,0	200	300	1,45	29,0	597	215,0	13,0	493,8	395,0	P
	L5	3	91,0	165	335	1,43	22,0	597	215,0	13,0	475,3	385,0	P
	L6	3	91,0	125	375	1,43	22,0	597	215,0	13,0	479,5	350,0	P
	L7	3	91,0	110	390	1,43	22,0	597	215,0	13,0	476,2	300,0	P
	L8	3	94,0	100	400	1,39	22,0	597	215,0	13,0	500,0	275,0	P
Regan [23]	I/2	3	77,0	200	200	1,2	23,4	500	200,0	10,0	374,5	176,0	P
	I/4	3	77,0	200	200	0,92	32,3	500	200,0	10,0	373,1	194,0	P
	I/6	3	79,0	200	200	0,8	21,9	480	200,0	10,0	250,0	165,0	P
	I/7	3	79,0	200	200	0,8	30,4	480	200,0	10,0	251,4	186,0	F
	II/1	3	200,0	250	250	0,98	34,9	530	200,0	20,0	2171,1	825,0	P
	II/2	3	128,0	160	160	0,98	33,3	485	200,0	20,0	812,5	390,0	P
	II/3	3	128,0	160	160	0,98	34,3	485	200,0	10,0	811,1	365,0	P
	II/4	3	64,0	80	80	0,98	33,3	480	200,0	20,0	198,3	117,0	P
Tomaszewicz [25]	II/5	3	64,0	80	80	0,98	34,3	480	200,0	10,0	198,1	105,0	P
	II/6	3	64,0	80	80	0,98	36,2	480	200,0	5,0	198,1	105,0	P
	ND65-1-1	3	275,0	200	200	1,5	64,3	500	200,0	16,0	5694,4	2050	P
	ND65-2-1	3	200,0	150	150	1,7	70,2	500	200,0	16,0	3333,3	1200	P
	ND95-1-1	3	275,0	200	200	1,5	83,7	500	200,0	16,0	5625,0	2250	P
	ND95-1-3	3	275,0	200	200	2,5	89,9	500	200,0	16,0	9600,0	2400	P
	ND95-2-1	3	200,0	150	150	1,7	88,2	500	200,0	16,0	3333,3	1100	P
	ND95-2-1D	3	200,0	150	150	1,7	86,7	500	200,0	16,0	3333,3	1300	P
	ND95-2-3	3	200,0	150	150	2,6	89,5	500	200,0	16,0	5178,6	1450	P
	ND95-2-3D	3	200,0	150	150	2,6	80,3	500	200,0	16,0	5208,3	1250	P
	ND95-2-3D+	3	200,0	150	150	2,6	98,0	500	200,0	16,0	5178,6	1450	P
	ND95-3-1	3	88,0	100	100	1,8	85,1	500	200,0	16,0	702,1	330	P
	ND115-1-1	3	275,0	200	200	1,5	112,0	500	200,0	16,0	5697,7	2450	P
ND115-2-1	3	200,0	150	150	1,7	119,0	500	200,0	16,0	3333,3	1400	P	
ND115-2-3	3	200,0	150	150	2,6	108,1	500	200,0	16,0	5166,7	1550	P	

P é o modo de ruptura por punção; FP é o modo de ruptura por flexo-punção e F é o modo de ruptura por flexão.

#### 4. Resultados

As Tabelas 3a e 3b apresentam comparações entre os resultados experimentais do banco de dados com os resultados teóricos, obtidos para cada uma das normas analisadas, bem como para as adaptações avaliadas. As Figuras 7 e 8 mostram graficamente a precisão de cada recomendação. Nestas figuras, as linhas de tendência dos resultados são indicadas em azul e em vermelho é marcada a linha do limite de segurança, onde os resultados abaixo desta linha indicam previsões teóricas contra a segurança em relação às evidências experimentais.

É possível perceber que a ACI 318 [5] apresentou resultados conservadores em relação às demais normas com média de 1,45 e com a maior dispersão dos resultados (coeficiente de variação de 17%). Porém, os resultados do ACI estiveram sempre a favor da segurança, com todas as lajes do banco de dados apresentando razão entre a resistência experimental e a estimativa teórica ( $V_{exp}/V_{norma}$ ) maior que 1,0. O Eurocode 2 [4] mostrou resultados satisfatórios, com média de 1,15 e coeficiente de variação de 14%. No caso do Eurocode, cerca de 87% dos resultados encontraram-se a favor da segurança, tendo-se 13% de resultados contra a

segurança. Dentre todos os resultados contra a segurança, 84% referem-se às lajes com pilares retangulares. Isto pode indicar que as equações do Eurocode 2 requerem ajustes, pois o número de resultados contra a segurança é inadequado, principalmente no caso de ligações com pilares retangulares.

Já a NBR 6118 [3] apresentou coeficiente de variação de 13%, próximo ao Eurocode, mas com forte tendência de resultados contra a segurança. A norma brasileira apresentou média de 0,95, tendo superestimado a resistência das lajes do banco de dados em 71% dos casos, evidenciando a urgência de revisar suas recomendações. Cerca de 42% de seus resultados contra a segurança referem-se aos casos de modelos apoiados em pilares quadrados, que é uma das situações mais comuns no projeto de edifícios com lajes lisas. Estes dados contrastam com o fato de que a norma foi recentemente revisada, e ainda assim manteve as mesmas recomendações para punção presentes em sua versão anterior, datada de 2003, ainda baseadas na antiga CEB-FIP MC90 [16], não refletindo o estado da arte nem os avanços obtidos com pesquisas realizadas no país e no exterior.

O fib Model Code 2010 [6, 7] em seu nível I de aproximação apresentou resultados conservadores, obtendo média de 1,45 e resultados dispersos com maior coeficiente de variação (26%).

Tabela 3a - Comparação entre os resultados experimentais e os normativos

Autores	d (mm)	$\rho$ (%)	$f_c$ (MPa)	$V_{exp}/V_{norma}$					
				ACI		EC2		NB1	
				MED	COV	MED	COV	MED	COV
Forssel e Holmberg (19)	104 - 112	0,63 - 0,68	17	1,58	0,26	1,18	0,09	0,99	0,09
Elstner e Hognestad (20)	114	2,48	13 - 34	1,48	0,11	1,13	0,09	0,90	0,09
Mowrer e Vanderbilt (21)	51	1,1 - 2,2	15 - 28	1,64	0,11	1,32	0,07	0,85	0,07
Hawkins et. al (10)	117 - 120	0,76 - 1,12	23 - 32	1,15	0,08	0,99	0,06	0,85	0,07
Regan (22)	101 - 190	1,28	42 - 43	1,52	0,14	1,14	0,17	1,01	0,05
Regan (23)	64 - 200	0,8 - 1,2	21 - 36	1,34	0,12	1,21	0,10	0,95	0,06
Regan e Rezai-Jorabi (24)	79	1,51 - 1,54	29 - 31	1,50	0,05	1,12	0,01	0,86	0,01
Tomaszewicz (25)	88 - 275	1,5 - 2,6	64 - 119	1,69	0,10	1,13	0,08	1,04	0,07
Teng et al. (26)	102 - 160	1,07 - 1,81	33 - 40	1,38	0,14	1,09	0,14	0,95	0,09
Borges (27)	139 - 164	1,23 - 1,46	36 - 44	1,29	0,07	1,04	0,05	0,97	0,03
Lima Neto (28)	95 - 102	1,34 - 1,44	41 - 47	1,47	0,08	1,26	0,08	1,03	0,09
Oliveira (8)	106 - 109	1,07 - 1,1	54 - 67	1,20	0,06	1,07	0,06	0,89	0,06
Al-Yousif e Regan (29)	80	0,98	21 - 23	1,36	0,12	1,13	0,17	0,86	0,17
Ferreira (30)	87 - 89	0,94 - 1,48	42 - 51	1,39	0,05	1,10	0,05	0,86	0,05
Vilhena et. al. (31)	65 - 67	1,2 - 1,4	51 - 55	1,32	0,01	1,12	0,04	0,80	0,04
Carvalho (32)	85 - 86	1,32	50 - 52	1,29	0,03	1,00	0,06	0,78	0,06
Mouro (33)	90 - 94	1,39 - 1,45	22 - 29	1,84	0,11	1,50	0,11	1,20	0,11
Damasceno (34)	89 - 99	0,56 - 1,22	39 - 42	1,23	0,13	1,10	0,02	0,88	0,02
Moraes Neto (35)	86 - 87	1,2 - 1,4	39 - 40	1,66	0,08	1,23	0,06	0,97	0,06
			Média	1,45	1,15	0,95	101	117	71
			COV (%)	17,25	14,06	12,92	8	16	5

Pode-se verificar que a maioria dos valores  $V_{exp}/V_{norma}$  estiveram acima do valor de referência. Seus resultados, comparados com o ACI 318 [5], foram piores, com 11% das lajes apresentando resultados contra à segurança. Deve-se destacar contudo, que o nível I de aproximação apresenta um menor rigor no grau de precisão, e sua aplicação é aconselhada para um pré-dimensionamento de estruturas. No caso do nível II de aproximação, observaram-se melhores resultados, tendo-se atingido uma média de 1,04 e coeficiente de variação de 14%. Ainda assim, obteve-se cerca de 38% de resultados contra a segurança.

Com a utilização do fator de flexão ( $\lambda$ ) foi possível aprimorar as recomendações tanto do MC2010 quanto da NBR 6118. No caso do MC2010, a média aumentou para 1,10, mas o coeficiente de variação diminuiu para 13%. Além disso, foi possível reduzir significativamente o número de resultados contra a segurança, que passou de 38% para 21%. No caso da NBR 6118, a adoção dos fatores de flexão somada a redução do coeficiente de 0,18 para 0,16, fez com que seu rendimento melhorasse significativamente. A média ficou em torno de 1,14, mas o coeficiente de variação diminuiu para 11%. Mas o principal ganho qualitativo está relacionado com a quantidade de resultados contra a segurança, que foi redu-

zida para níveis mais aceitáveis, similares ao das demais normas, caindo de 71% para 10%.

Na Tabela 4 apresenta-se a avaliação das normas segundo o critério adaptado de Collins [9]. Segundo este critério, a NBR 6118 [3] foi a que apresentou maior penalidade (106 pontos) possuindo 19% dos valores na segunda faixa de classificação (entre 0,50 e 0,85), desfavorável à segurança. O fib Model Code 2010 [6, 7] no Nível I e o ACI 318 [5] foram também bastante penalizados, mas nesse caso por possuírem muitos resultados conservadores, tendo tido pontuação de 100 e 98 pontos, respectivamente. Já o MC2010 Nível II e o Eurocode 2 [4] foram as versões normativas (sem adaptações) com melhor performance segundo este critério, tendo tido penalidade de 65 e 43 pontos, respectivamente.

Com as adaptações sugeridas, a NBR 6118 [3] poderia apresentar melhorias significativas. É possível observar que sua penalização seria da ordem de 42 pontos, com a maioria dos resultados enquadrando-se na faixa de classificação onde a penalidade é igual a zero (entre 0,85 e 1,15). Com a aplicação do fator de flexão ( $\lambda$ ) no fib Model Code 2010 [6, 7] Nível II, este seria o melhor critério para uso em projeto, com penalidade de apenas 40 pontos, a menor dentre todas as hipóteses avaliadas.

**Tabela 3b – Comparação entre os resultados experimentais e os normativos**

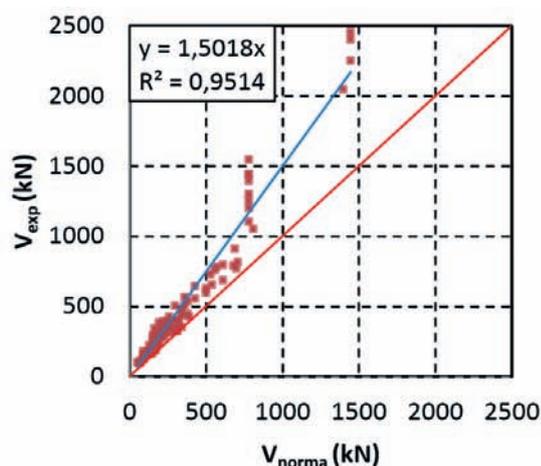
Autores	$f_c$ (MPa)	$V_{exp}/V_{norma}$							
		NB1*+ $\lambda$		MC10 I		MC10 II		MC10 II+ $\lambda$	
		MED	COV	MED	COV	MED	COV	MED	COV
Forsell e Holmberg (19)	17	1,19	0,09	1,02	0,14	0,97	0,06	1,03	0,05
Elstner e Hognestad (20)	13 - 34	1,11	0,07	1,29	0,12	1,08	0,07	1,17	0,09
Mowrer e Vanderbilt (21)	15 - 28	1,02	0,06	1,11	0,20	1,03	0,13	1,09	0,12
Hawkins et. al (10)	23 - 32	1,11	0,06	1,04	0,07	0,95	0,07	1,09	0,11
Regan (22)	42 - 43	1,13	0,08	1,35	0,13	1,20	0,10	1,18	0,13
Regan (23)	21 - 36	1,13	0,06	1,54	0,14	1,02	0,11	1,06	0,11
Regan e Rezai-Jorabi (24)	29 - 31	1,00	0,01	1,38	0,05	1,08	0,04	1,11	0,05
Tomaszewicz (25)	64 - 119	1,22	0,07	1,94	0,09	1,05	0,05	1,07	0,05
Teng et al. (26)	33 - 40	1,15	0,08	1,30	0,22	0,99	0,17	1,06	0,16
Borges (27)	36 - 44	1,16	0,04	1,84	0,11	1,06	0,06	1,11	0,05
Lima Neto (28)	41 - 47	1,22	0,09	1,58	0,09	1,17	0,09	1,21	0,09
Oliveira (8)	54 - 67	1,09	0,05	1,39	0,19	0,92	0,10	0,99	0,09
Al-Yousif e Regan (29)	21 - 23	1,14	0,08	0,95	0,15	0,91	0,15	1,06	0,06
Ferreira (30)	42 - 51	0,98	0,05	1,49	0,05	1,13	0,06	1,13	0,06
Vilhena et. al. (31)	51 - 55	0,96	0,04	1,19	0,01	1,31	0,06	1,37	0,06
Carvalho (32)	50 - 52	0,96	0,02	0,75	0,24	0,81	0,14	0,87	0,06
Mouro (33)	22 - 29	1,44	0,11	1,86	0,11	1,29	0,11	1,36	0,11
Damasceno (34)	39 - 42	1,01	0,06	1,28	0,22	0,99	0,15	1,01	0,13
Moraes Neto (35)	39 - 40	1,15	0,04	1,48	0,27	1,05	0,16	1,10	0,14
	Média	1,14	1,14	1,45	1,45	1,04	1,04	1,10	1,10
	COV (%)	11,80	11,80	26,30	26,30	14,10	14,10	13,20	13,20

As Figuras 9 e 10 apresentam as linhas de tendência de cada método teórico em função do índice de retangularidade dos pilares. Fica claro para todos os métodos de projeto que existe uma tendência de redução da relação  $V_{exp}/V_{norma}$  com o aumento do índice de retangularidade. No caso das normas NBR 6118 [3], Eurocode 2 [4] e fib Model Code 2010 [6, 7], verifica-se a tendência de superestimar a resistência de lajes apoiadas em pilares retangulares, especialmente no caso da norma brasileira. As propostas de alterações feitas para a NBR 6118 [3] e o fib Model Code 2010 [6, 7] nível II corrigiram esta tendência de resultados inseguros, principalmente no caso da norma brasileira.

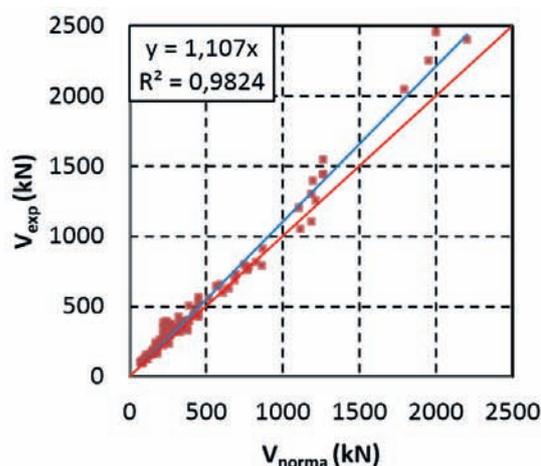
## 5. Conclusões

Este artigo utilizou resultados de ensaios experimentais de 131 lajes para a avaliação de diferentes recomendações para o dimensionamento à punção de ligações laje-pilar, em função das condições de contorno da ligação e do índice de retangularidade dos pilares. Observou-se que, de um modo geral, as recomendações do ACI 318 [5] e do fib Model Code 2010 [6, 7] em seu Nível I estão a favor da segurança, porém são conservadoras, indicando a possibilidade de ajustes a fim de evitar níveis exagerados de segurança. Já o Eurocode 2 [4] e o MC2010 em seu nível II de aproximação apresentaram resultados satisfatórios, com o MC2010 Nível II

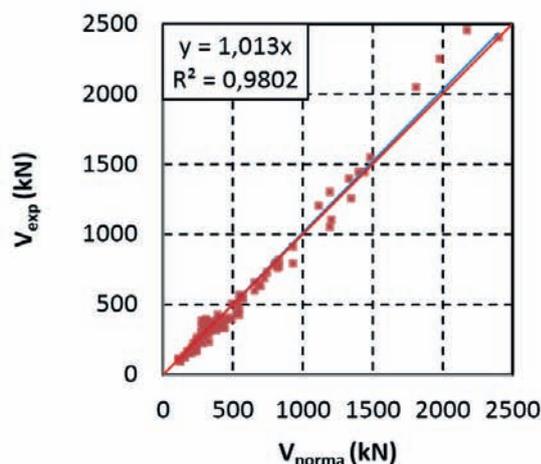
Figura 7 – Tendência dos resultados segundo diferentes teorias



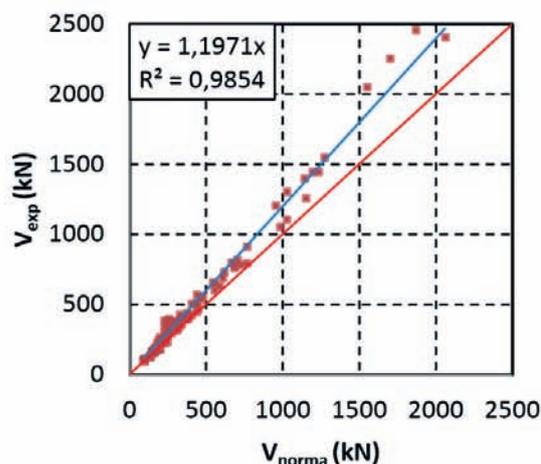
**A** ACI 318 (5)



**B** Eurocode 2 (4)



**C** NBR 6118 (3)



**D** NBR 6118\* (3) + (Fator de Flexão)

sendo ligeiramente mais preciso, porém com 43% de resultados contra a segurança, contra 20% do Eurocode.

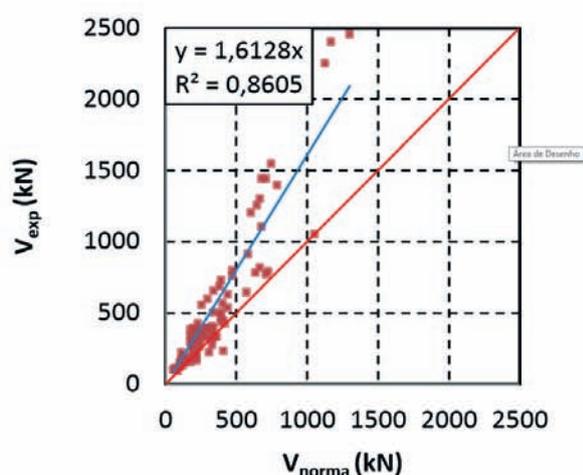
Os piores resultados foram observados para a NBR 6118 [3], que apresentou 77% de resultados contra a segurança. As adaptações propostas, tanto para o MC2010 Nível II quanto para a NBR 6118, mostraram-se efetivas, melhorando significativamente a qualidade dos resultados. No caso específico da NBR 6118, as adaptações reduziram o número de resultados contra a segurança e, em média, corrigiram a tendência de resultados inseguros com o aumento do índice de retangularidade. Deve-se destacar ainda que as propostas feitas são de simples implemen-

tação em termos de complexidade de cálculo. Espera-se que estes e outros trabalhos possam motivar uma discussão profunda sobre as recomendações atuais para o projeto de lajes lisas no Brasil, de modo a permitir que a norma brasileira reflita o estado da arte e os avanços obtidos com pesquisas realizadas no país e no exterior.

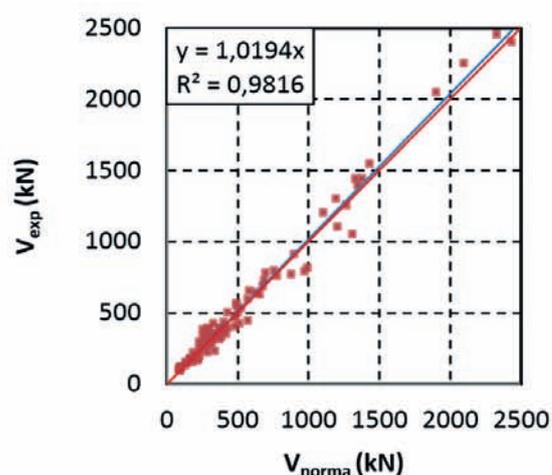
## 6. Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer a FAPESPA, CNPq e à CAPES pelo apoio financeiro em todas as etapas desta pesquisa.

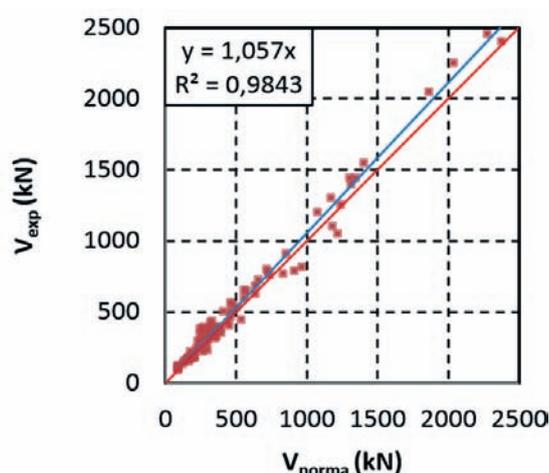
Figura 8 – Tendência dos resultados segundo diferentes teorias



**A** fib Model Code 2010 (6, 7) Nível I



**B** fib Model Code 2010 (6, 7) Nível II



**C** fib Model Code 2010 (6, 7) Nível II  
+(Fator de Flexão)

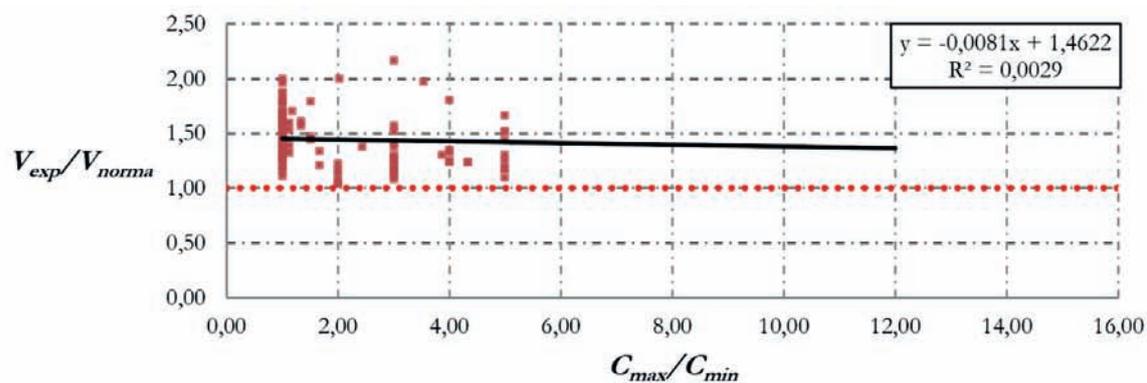
Tabela 4 – Classificação segundo o critério de Collins (9)

		< 0,50	(0,50:0,85)	(0,85:1,15)	(1,15:2,00)	≥ 2,00	TOTAL
ACI	Nº de lajes	0	0	9	94	2	105
	Penal. total	0	0	0	94	4	98
EC2	Nº de lajes	0	0	62	43	0	105
	Penal. total	0	0	0	43	0	43
NB1	Nº de lajes	0	20	79	6	0	105
	Penal. total	0	100	0	6	0	106
NB1*+ λ	Nº de lajes	0	0	63	42	0	105
	Penal. total	0	0	0	42	0	42
MC10 I	Nº de lajes	0	3	26	67	9	105
	Penal. total	0	15	0	67	18	100
MC10 II	Nº de lajes	0	9	76	20	0	105
	Penal. total	0	45	0	20	0	65
MC10 II+ λ	Nº de lajes	0	2	73	30	0	105
	Penal. total	0	10	0	30	0	40

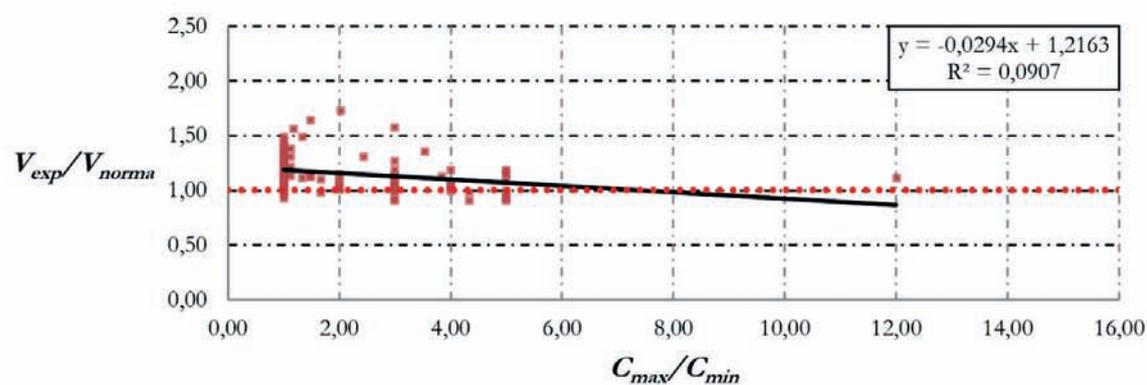
## 7. Referências

- MIDDLETON, R., Christchurch Earthquake Reconnaissance Part 1: The First 3 days [2011]. 1 fotografia, color. Disponível em: <<http://reidmiddleton.wordpress.com/2011/03/14/5/>>. Acesso em: 13 jan. 2013.
- FERREIRA, M. P., OLIVEIRA, D. R. C., Numerical Analysis of RC Flat Slabs under Flexure and Punching. IBRACON Structural Journal, Vol. 2, No. 3, 2006, pp. 371–392.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118 – Projeto de Estruturas de Concreto. Rio de Janeiro, 2007.
- Eurocode 2, Design of Concrete Structures—Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings, CEN, EN 1992-1-1, Brussels, Belgium, 2004, 225 pp.
- ACI Committee 318, Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318M-11) and Commentary, American Concrete Institute, Farmington Hills, Michigan, 2011.
- Fédération Internationale du Béton (fib), Model Code 2010, final draft, vol. 1. fib, Bulletin 65, Lausanne, Switzerland, 2012, Vol. 2, 350 pp.
- Fédération Internationale du Béton (fib), Model Code 2010, final draft, vol. 2. fib, Bulletin 66, Lausanne, Switzerland, 2012, Vol. 2, 370 pp.
- OLIVEIRA, D. R. C., Análise experimental de lajes cogumelo de concreto armado com pilares retangulares. Tese de Doutorado, Publicação E.TD – 001A/2003, Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 2003. 214p.
- COLLINS, M.P. (2001). Evaluation of shear design procedures for concrete structures. A Report prepared for the CSA technical committee on reinforced concrete design.
- HAWKINS, N.M., FALLSEN, H.B., HINOJOSA, R.C., Influence of Column Rectangularity on the Behavior of Flat Plate Structures, ACI Special Publication, Cracking, Deflection, and Ultimate Load of Concrete Slab Systems, Vol. SP-30, No. 6, 1971, pp. 127–146.
- OLIVEIRA, D. R. C.; REGAN, P. E.; MELO, G. S. S., Punching Resistance of RC Slabs with Rectangular Columns. Magazine of Concrete Research, Vol. 56, No. 3, London, 2004, pp. 123–138.
- MUTTONI, A., and SCHWARTZ, J., Behavior of Beams and Punching in Slabs without Shear Reinforcement, IABSE Colloquium, Vol. 62, Zurich, Switzerland, 1991, pp. 703–708.
- MUTTONI, A., Punching Shear Strength of Reinforced Concrete Slabs without Transverse Reinforcement, ACI Structural Journal, Vol. 105, No. 4, 2008, pp. 440–450.
- FERNÁNDEZ RUIZ, M., MUTTONI, A., Applications of the critical shear crack theory to punching of R/C slabs with transverse reinforcement, ACI Structural Journal, Vol. 106, No. 4, 2009, pp. 485–494.
- SAGASETA, J., MUTTONI, A., FERNÁNDEZ RUIZ, M., TASSINARI, L., Non axis-symmetrical punching shear around internal columns of RC slabs without transverse reinforcement, Magazine of Concrete Research, Vol. 63, No. 6, 2011, pp. 441–457.
- Comité Euro-International du Béton. CEB-FIP Model Code 1990. London, Thomas Telford, 1993.
- SACRAMENTO, P. V. P., FERREIRA, M. P., OLIVEIRA, D. R. C., MELO, G. S. S. A., Punching strength of reinforced concrete flat slabs without shear reinforcement, IBRACON Structures and Materials Journal, Vol. 5, No. 5, 2012, pp. 659–691.
- OLIVEIRA, M. H., PEREIRA FILHO, M. J. M., OLIVEIRA, D. R. C., FERREIRA, M. P., MELO, G. S. S. A., Punching

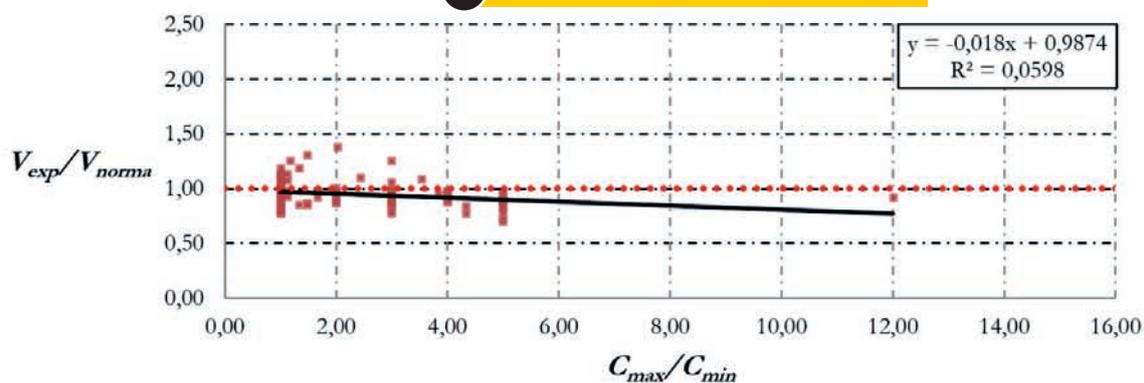
Figura 9 - Tendência dos resultados segundo diferentes teorias



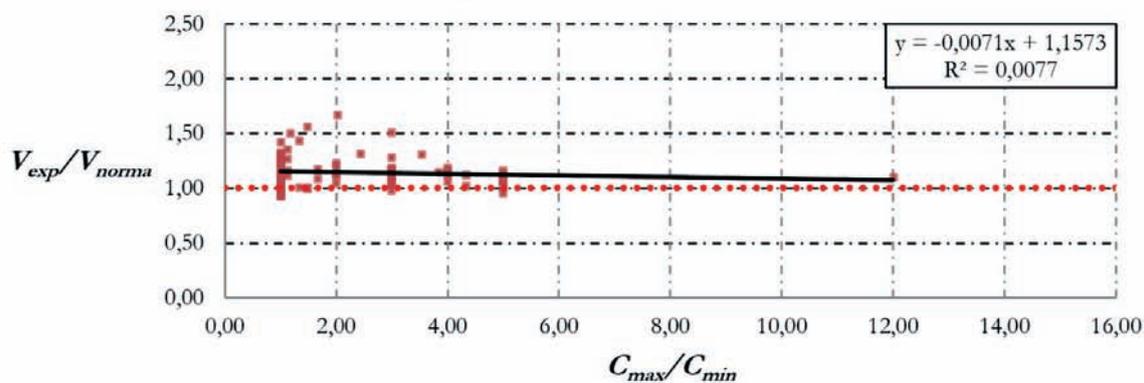
**A** ACI 318 (5)



**B** Eurocode 2 (4)

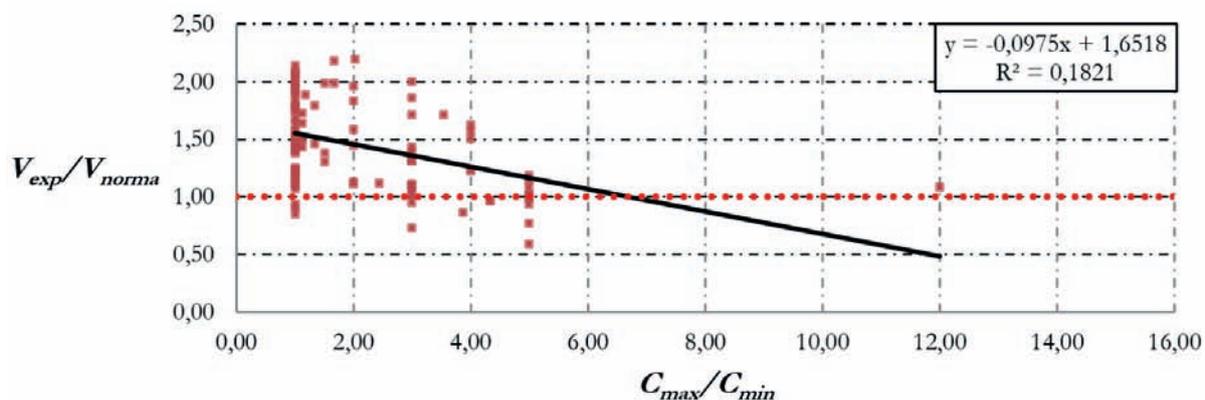


**C** NBR 6118 (3)

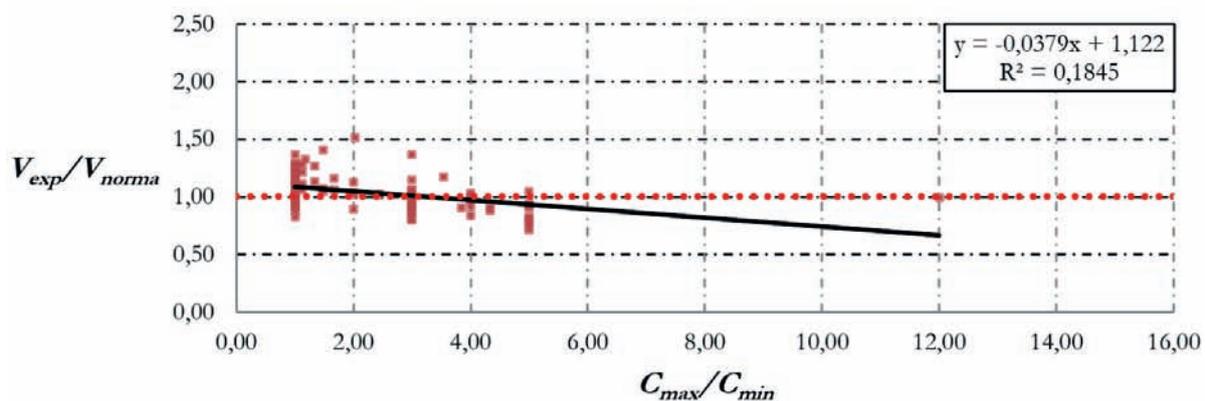


**D** NBR 6118\* (3) + Fator de Flexão

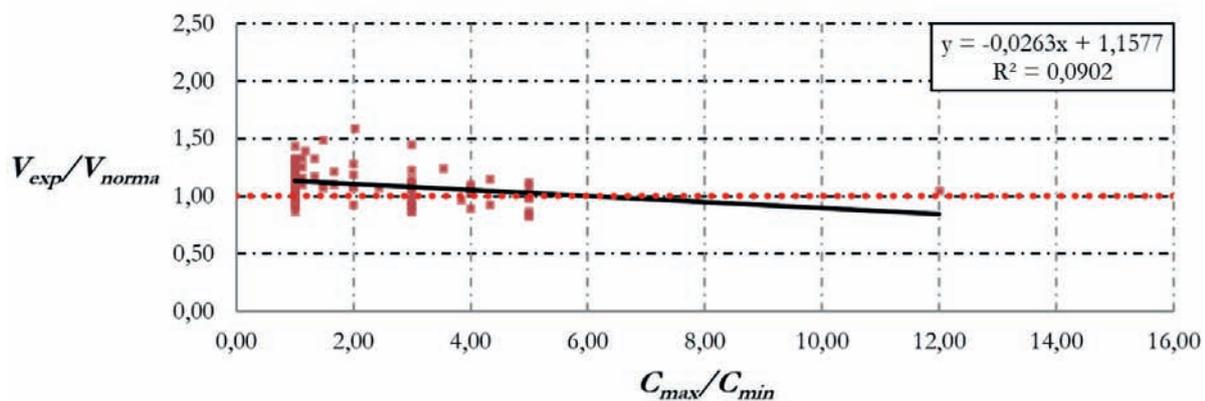
Figura 10 - Tendência dos resultados segundo diferentes teorias



**A** fib Model Code 2010 (6, 7) Nível I



**B** fib Model Code 2010 (6, 7) - Nível II



**C** fib Model Code 2010 (6, 7) - Nível II + Fator de Flexão

- resistance of internal slab-column connections with double-headed shear studs, *IBRACON Structures and Materials Journal*, Vol. 6, No. 5, 2013, pp. 681–714.
- [19] FORSSEL, C., HOLMBERG, A., Stämpellast pa plattor av betong. *Betong*, 1946, Vol. 31, No. 2, pp. 95–123.
- [20] ELSTNER, R. C., e HOGNESTAD, E., Shearing Strength of Reinforced Concrete Slabs. *Journal of the American Concrete Institute, Proceedings*, Vol. 53, No. 1, Jul. 1956, pp. 29–58.
- [21] MOWRER, R. D., VANDERBILT, M. D., Shear Strength of Lightweight Aggregate Reinforced Concrete. *ACI Journal*, 1967, Vol. 64, No. 11, November, pp. 722–729.
- [22] REGAN, P. E., Punching Shear in Prestressed Concrete Slab Bridges. *Polytechnic of Central London*, January 1983.
- [23] REGAN, P. E., Symmetric Punching of Reinforced Concrete Slabs. *Magazine of Concrete Research*, Vol. 38, No. 136, Sep. 1986, pp 115–128.
- [24] REGAN, P. E., REZAI-JORABI, H., Shear Resistance of One-way Slabs Under Concentrated Loads. *ACI Structural Journal*, 1988, Vol. 85, No. 2, Mar-Apr, pp. 150–157.
- [25] TOMASZEWICZ, A., High-Strength Concrete. SP2 – Plates and Shells. Report 2.3 Punching Shear Capacity of Reinforced Concrete Slabs. Report No. STF70 A93082, SINTEF Structures and Concrete, Trondheim, 1993, 36pp.
- [26] LEONG, K. K., TENG, S., Punching Shear Strength of Slabs with Openings and Supported on Rectangular Columns, *Nanyang Technological University, Singapore*, August 2000.
- [27] BORGES, L. L. J., Comportamento ao Puncionamento de Lajes Cogumelo com Pilares Retangulares e Furos de Grandes Dimensões, Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, DF, 2004.
- [28] LIMA NETO, A. F., 2003. Análise experimental na fase pós-puncionamento de lajes cogumelo de concreto armado. Dissertação de Mestrado. Publicação E. DM. 008A/2003. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília. Brasília, DF.
- [29] AL-YOUSIF, A. T., REGAN, P. E., *Punching Resistances of RC Slabs Supported by Large and/or Elongated Columns*. *The Structural Engineer*, London, Mar. 2003, p. 30-34.
- [30] FERREIRA, M. P. Análise experimental de lajes lisas unidirecionais de concreto armado ao puncionamento simétrico ou assimétrico. Dissertação de Mestrado, Publicação CDD-22. Ed. 624.18342, Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal do Pará, Belém, PA, 2006.
- [31] VILHENA, A. E. R., NAHUN, K. A. R., PERES, M. D., OLIVEIRA, D. R. C., Análise experimental de lajes unidirecionais com pilares retangulares ao puncionamento simétrico. In: 48º Congresso Brasileiro do Concreto, 2006. Rio de Janeiro.
- [32] CARVALHO, A. S. de Análise Experimental de Laje Lisa de Concreto Armado de Alta Resistência com Metacaulim Apoiadas em Pilares Retangulares e Armada à Punção. Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal do Pará, Dissertação de Mestrado, Belém, 2006.
- [33] MOURO, V.C, Punção em lajes cogumelo: estudo de retangularidade dos pilares - 2006 dissertação de mestrado (Universidade Federal de Goiás Escola de Engenharia Civil).
- [34] DAMASCENO, L.S. R, 2007. Análise experimental de lajes lisas unidirecionais de concreto armado com pilares retangulares ao puncionamento. Dissertação de Mestrado. publicação CDD - 22. Ed. 624.1834. Universidade Federal do Pará, Instituto de Tecnologia, Departamento de Engenharia Civil, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Belém, 2007.
- [35] MORAES NETO, B. N., Análise Experimental de Lajes Lisas Bidirecionais de Concreto Armado com Estribos Inclinados e Pilares Retangulares Sujeitas a Puncionamento Simétrico Belém, Pará, 2007.
- [36] MORAES NETO, B.N. (2013). Comportamento à Punção de Lajes Lisas em Concreto Reforçado com Fibras de Aço sob Carregamento Simétrico. Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.TD-001A/13 Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 343 p.
- [37] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118 – Projeto de Estruturas de Concreto. Rio de Janeiro, 2014.