

# Lateral-distortional buckling of continuous steel-concrete composite beam

## Flambagem lateral com distorção de vigas mistas de aço e concreto contínuas

T. V. AMARAL<sup>a</sup>  
thaisvervloetamaral@gmail.com

J. P. S. OLIVEIRA<sup>b</sup>  
janainapenas@gmail.com

A. F. G. CALENZANI<sup>a</sup>  
afcalenzani@gmail.com

F.B. TEIXEIRA<sup>b</sup>  
felipebarbosateixeira@gmail.com

### Abstract

In hogging bending moment regions of continuous composite beams the collapse by lateral-distortional buckling (LDB) can occur. The design against LDB according to ABNT NBR 8800:2008 begins with the determination of the elastic critical moment, which depends, among other factors, of the distribution of the bending moment in the analyzed span, taken into account in the formulation through the modification parameter  $C_{dist}$ . To assess the analytical formulations prescribed by ABNT NBR 8800:2008, numerical FE models that simulate the LDB behavior of continuous steel-concrete composite beams were developed in this paper. The different boundary conditions presented in ABNT NBR 8800:2008 were checked using two different models: a simplified model, with a single simply supported span; and models with multiple internal supports and more than one span. It was observed that the  $C_{dist}$  values prescribed by ABNT NBR 8800:2008 can be unsafe, and therefore new values for  $C_{dist}$  are proposed in this paper.

**Keywords:** elastic critical moment, lateral-distortional buckling, continuous composite beams.

### Resumo

Nas regiões de momento negativo de vigas mistas contínuas pode ocorrer a flambagem lateral com distorção (FLD). A verificação à FLD pela ABNT NBR 8800:2008 tem como procedimento inicial determinar o momento crítico elástico que depende, dentre outros fatores, da distribuição do momento fletor no vão analisado, considerada por meio do parâmetro de modificação  $C_{dist}$ . Para avaliar a formulação analítica prescrita pela norma ABNT NBR 8800:2008, nesse trabalho, modelos numéricos em elementos finitos, que representam o comportamento à FLD de vigas mistas foram desenvolvidos. As diferentes condições de contorno apresentadas na ABNT NBR 8800:2008 foram verificadas, considerando duas modelagens distintas: modelo simplificado com um vão biapoado e modelos com mais de um vão. Foi notado que os valores de  $C_{dist}$  da ABNT NBR 8800:2008 podem conduzir a resultados contrários à segurança, por isso, propõem-se, neste trabalho, novos valores para  $C_{dist}$ .

**Palavras-chave:** momento crítico elástico, flambagem lateral com distorção, vigas mistas contínuas.

<sup>a</sup> Universidade Federal do Espírito Santo, Departamento de Engenharia Civil, Vitória, ES, Brasil

<sup>b</sup> Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Estruturas, Belo Horizonte, MG, Brasil

Received: 09 Aug 2016 • Accepted: 26 Feb 2018 • Available Online:

 This is an open-access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License

### 1. Introdução

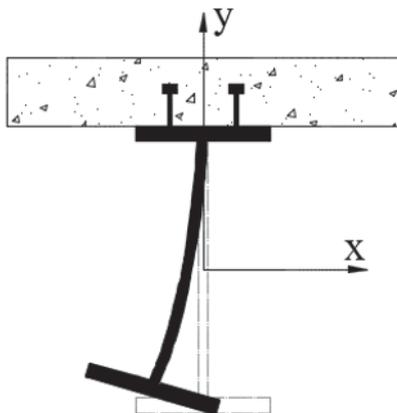
As principais vantagens do uso de vigas mistas de aço e concreto contínuas são a redistribuição dos momentos fletores ao longo do seu comprimento, o que permite o uso de perfis de aço de menores dimensões e o aumento da rigidez global da estrutura. Porém, as vigas mistas contínuas estão sujeitas a momentos negativos nos apoios internos, podendo sofrer flambagem lateral com distorção (FLD).

Nas regiões de momento negativo das vigas mistas contínuas, a mesa inferior fica comprimida, o que faz com que tenha tendência a flambar em relação ao seu eixo de maior inércia, já que a flambagem em relação ao seu eixo de menor inércia é impedida pela alma. A mesa superior está fixada na laje pelos conectores de cisalhamento, o que impede um giro do perfil como um todo. Se a alma do perfil não tiver rigidez suficiente para evitar a flexão lateral, ela distorcerá, gerando um deslocamento lateral na mesa comprimida acompanhado de torção, caracterizando um estado limite último chamado flambagem lateral com distorção (FLD), mostrado na Figura 1.

Para verificação do estado limite último de FLD, a norma brasileira ABNT NBR 8800:2008 fornece um procedimento aproximado, similar ao da norma europeia EN 1994-1-1:2004, que consiste na determinação do momento crítico elástico,  $M_{cr}$ , como passo inicial para obtenção do momento fletor resistente de cálculo. A Equação 1 do  $M_{cr}$  é prescrita pela ABNT NBR 8800:2008 e foi obtida por Roik, Hanswille e Kina [8] com o método de aproximação de energia.

$$M_{cr} = \frac{C_{dist}\alpha_g}{L} \sqrt{\left(G_{af} + k_r \frac{L^2}{\pi^2}\right) E_a I_{afy}} \quad (1)$$

em que  $G$  é o módulo de elasticidade transversal do aço;  $L$  é o comprimento da viga entre apoios verticais (exige-se que ambas as mesas do perfil de aço possuam contenção lateral nesses apoios);  $J$  é a constante de torção do perfil de aço;  $I_{afy}$  é o momento de inércia da mesa inferior do perfil de aço em relação ao eixo  $y$ , Figura 1;  $C_{dist}$  é um coeficiente que depende da distribuição de momentos fletores no comprimento  $L$ ;  $k_r$  é a rigidez rotacional da viga mista;  $\alpha_g$  é um fator relacionado à geometria da seção transversal da viga mista.



**Figura 1**  
Flambagem lateral com distorção

Para perfis duplamente simétricos, o fator  $\alpha_g$  é determinado pela seguinte expressão:

$$\alpha_g = \frac{\left(\frac{h_0 I_x}{I_{ax}}\right)}{\left(\frac{h_0^2}{4} + \frac{(I_{ax} + I_{ay})}{A_a}\right) \frac{e}{e} + h_0} \quad (2)$$

onde:

$$e = \frac{A I_{ax}}{A_a y_c (A - A_a)} \quad (3)$$

e  $y_c$  é a distância do centro geométrico do perfil de aço à metade da altura da laje de concreto;  $I_x$  é o momento de inércia da seção mista na região de momento negativo (perfil de aço mais a armadura da laje) com relação ao eixo  $x$ ;  $I_{ax}$  e  $I_{ay}$  são os momentos de inércia da seção de aço com relação a seus eixos baricêntricos;  $A_a$  é a área do perfil de aço;  $A$  é a área da seção mista na região de momento negativo (perfil de aço mais armadura da laje);  $h_0$  é a distância entre os centros geométricos das mesas do perfil de aço. Para obter a Equação 1 do momento crítico elástico, considerou-se a resposta à FLD do mecanismo “U” invertido, formado por duas vigas adjacentes e pela laje, na qual os perfis de aço são fixados (Figura 2-a). Na Figura 2-b é apresentado o modelo simplificado de uma viga mista de vão L sujeita a momentos de extremidade de sentidos opostos, adotado por Roik, Hanswille e Kina [8]. Nesse modelo simplificado, a rigidez rotacional da viga mista ( $k_r$ ) é aplicada a uma mola situada na mesa superior do perfil de aço que permite reproduzir a influência do mecanismo “U” na resistência à FLD, considerando a flexão da laje, a distorção da alma e a deformação da conexão de cisalhamento.

Pela Figura 2, nota-se que o modelo simplificado (Figura 2-b) deve incluir um esforço axial  $N_a$  para que a posição da linha neutra elástica coincida com a da viga mista (Figura 2-a). Assim, o momento crítico da viga mista  $M_{cr}$  (Figura 2-a) é determinado a partir do momento crítico da viga de aço  $M_a$  (Figura 2-b) pela relação:

$$M_{cr} = M_a \frac{I_x}{I_{ax}} \quad (4)$$

sendo o esforço axial na viga de aço dado por:

$$N_a = \frac{M_a}{I_{ax}} \bar{y} A_a \quad (5)$$

onde  $\bar{y}$  é a distância entre as linhas neutras das vigas de aço e mista. A rigidez rotacional do mecanismo “U” invertido é fundamental para o cálculo do momento crítico elástico. Essa rigidez,  $k_r$ , é determinada com base na rigidez de molas ligadas em série, considerando as rigidezes da laje de concreto ( $k_1$ ), da alma do perfil de aço ( $k_2$ ) e da conexão de cisalhamento ( $k_3$ ). Para perfil de aço com alma plana, a rigidez  $k_3$  apresenta um valor elevado comparado as demais rigidezes, podendo ser desprezada no cálculo da rigidez  $k_r$ . Dessa forma, a rigidez rotacional  $k_r$  para perfis de alma plana é obtida pela seguinte expressão:

$$k_r = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \quad (6)$$

sendo,

$$k_1 = \frac{\alpha(EI)_2}{a} \quad (7)$$

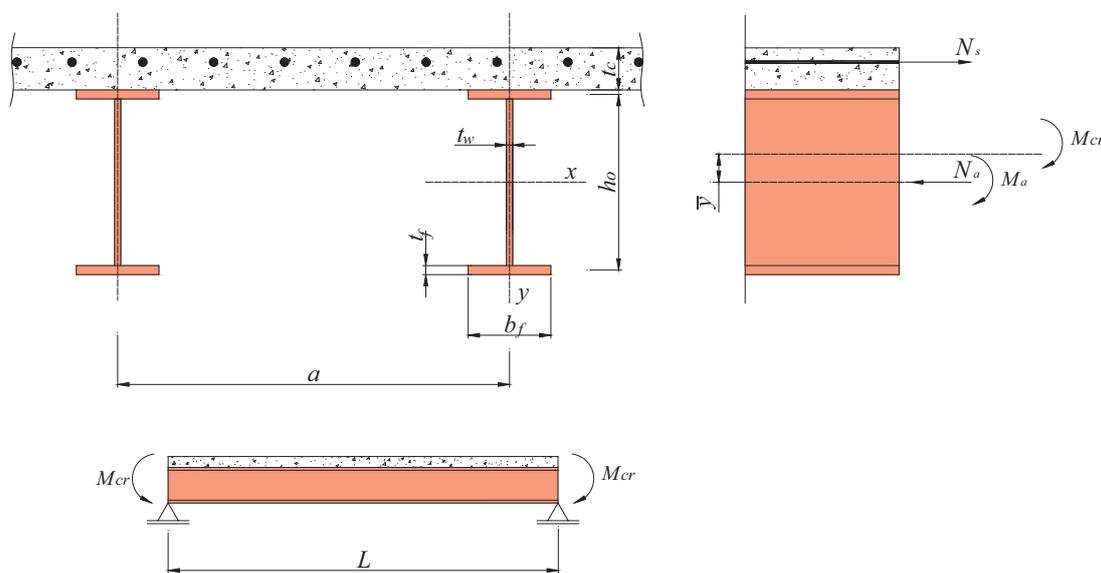
e

$$k_2 = \frac{Et_w^3}{4h_0(1 - \nu_w^2)} \quad (8)$$

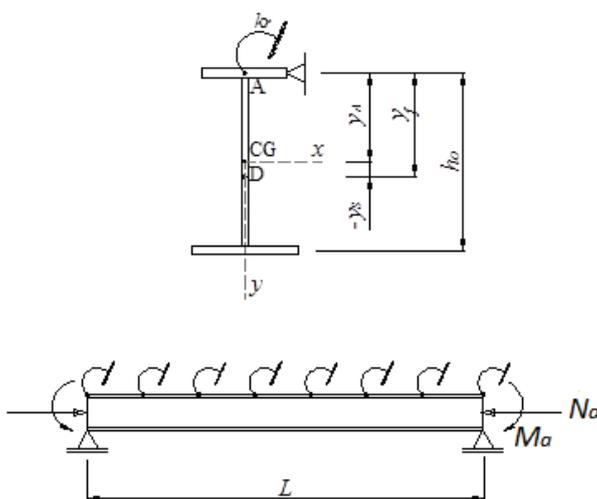
onde  $\alpha$  é o coeficiente que depende da posição da viga. Se a viga situa-se na extremidade da laje,  $\alpha$  é igual a 2 e se a viga é interna,  $\alpha$  é igual a 3 (para vigas internas com quatro ou mais vigas similares, pode-se adotar  $\alpha$  igual a 4);  $(EI)_2$  é a rigidez à flexão da seção mista homogeneizada da laje, desprezando o concreto tracionado, por unidade de comprimento da viga, tomada como o menor valor entre as rigidezes no meio do vão e no apoio interno;  $a$  é a distância entre as vigas paralelas (Figura 2-a);  $E$  é o módulo de elasticidade do perfil de aço;  $t_w$  é a espessura da alma do perfil de aço (Figura 2-a);  $h_0$  é a distância entre os centros geométricos das mesas do perfil de aço (Figura 2-b);  $\nu_a$  é o coeficiente de Poisson do aço.

Na Equação 1 é possível observar que o momento crítico é influenciado pela forma da distribuição do momento fletor, sendo levado em consideração pelo coeficiente  $C_{dist}$ . Os valores desse coeficiente para vigas mistas contínuas de alma plana foram determinados por meio de análises numéricas em elementos finitos e são apresentados em forma de tabelas na ABNT NBR 8800:2008, como as Tabela 1 e Tabela 2 que representam os valores de  $C_{dist}$  para vãos com cargas transversais distribuídas, cargas concentradas e para vãos sem carregamento ao longo do comprimento  $L$ .

Estudos recentes foram realizados para avaliar o momento crítico elástico à FLD de vigas mistas contínuas. Chen e Wang [4] analisaram numericamente o comportamento estrutural de



a) Mecanismo “U”



b) Modelo simplificado de Roik, Hanswille e Kina [8]

Figura 2 Modelos para obtenção do momento crítico elástico

vigas mistas contínuas com e sem enrijecedores transversais soldados à alma do perfil de aço. Com auxílio do software Ansys, modelos em elementos finitos foram implementados para estudar o comportamento da região de momento negativo dessas vigas. Os seguintes parâmetros que podem afetar a capacidade resistente da viga foram analisados: rigidez à flexão da laje de concreto, rigidez da alma enrijecida, esbeltez da alma do perfil de aço e razão entre a distância dos enrijecedores e o vão da viga. Chen e Wang [4] realizaram análises de flambagem linearizada (*linear buckling analysis*) e análises não lineares. Para a análise de flambagem linearizada foi adotado um modelo constituído por uma viga de aço soldada simplesmente apoiada, submetida a um momento negativo, com restrição rotacional e lateral aplicada à mesa superior. A restrição rotacional no modelo foi imposta por molas com rigidez rotacional ( $k_r$ ) obtida pela formulação proposta pela EN 1994-1-1:2004. Nos estudos paramétricos, Chen e Wang [4] compararam as vigas de mesma seção transversal com e sem enrijecedor, constatando que os enrijecedores na alma do perfil

de aço aumentam o momento crítico elástico das vigas mistas e reduzem o deslocamento lateral da mesa comprimida. Oliveira *et al.* [7] propuseram um procedimento para obtenção do momento crítico elástico à FLD de vigas mistas de aço e concreto com perfis de alma senoidal, considerando os resultados da análise numérica de modelos que representavam o mecanismo “U” invertido. O procedimento proposto utiliza a equação de Roik, Hanswille e Kina [8] considerando as propriedades geométricas de um perfil de aço com alma senoidal. Além disso, Oliveira *et al.* [7] recomenda adotar no cálculo da rigidez rotacional a formulação proposta por Calenzani *et al.* [2]. Novos valores para o coeficiente de  $C_{dist}$  foram propostos por Oliveira *et al.* [7] para vigas mistas contínuas com perfis de alma senoidal sujeitos a cargas transversais distribuídas e vigas sem carregamento transversal. Os resultados para o momento crítico de vigas mistas de aço e concreto com perfis de alma senoidal usando o procedimento proposto por Oliveira *et al.* [7] mostrou boa concordância com os resultados numéricos obtidos com auxílio do software Ansys.

**Tabela 1**

Valores de  $C_{dist}$  para vãos com cargas transversais distribuídas ou concentradas, adaptada da ABNT NBR 8800:2008

Condições de carregamento e apoio	Diagrama de momento fletor <sup>1</sup>	$C_{dist}$								
		$\psi=0,50$	$\psi=0,75$	$\psi=1,00$	$\psi=1,25$	$\psi=1,50$	$\psi=1,75$	$\psi=2,00$	$\psi=2,25$	$\psi=2,50$
		41,5	30,2	24,5	21,1	19,0	17,5	16,5	15,7	15,2
		33,9	22,7	17,3	14,1	13,0	12,0	11,4	10,9	10,6
		28,2	18,0	13,7	11,7	10,6	10,0	9,5	9,1	8,9
		21,9	13,9	11,0	9,6	8,8	8,3	8,0	7,8	7,6
		28,4	21,8	18,6	16,7	15,6	14,8	14,2	13,8	13,5
		12,7	9,89	8,6	8,0	7,7	7,4	7,2	7,1	7,0

**Nota:** <sup>1</sup> $M_o$  é o momento máximo solicitante de cálculo, considerando o tramo analisado como biapoiado.

**Tabela 2**

Valores de  $C_{dist}$  para vãos sem carregamento no comprimento L, adaptada da ABNT NBR 8800:2008

Condições de carregamento e apoio	Diagrama de momento fletor <sup>1</sup>	$C_{dist}$				
		$\psi=0,00$	$\psi=0,25$	$\psi=0,50$	$\psi=0,75$	$\psi=1,00$
		11,1	9,5	8,2	7,1	6,2
		11,1	12,8	14,6	16,3	18,1

**Nota:** <sup>1</sup>M é o maior momento negativo solicitante de cálculo, em módulo, no trecho analisado, sendo que valores de  $\psi$  maiores que 1,00 devem ser tomados iguais a 1,00.

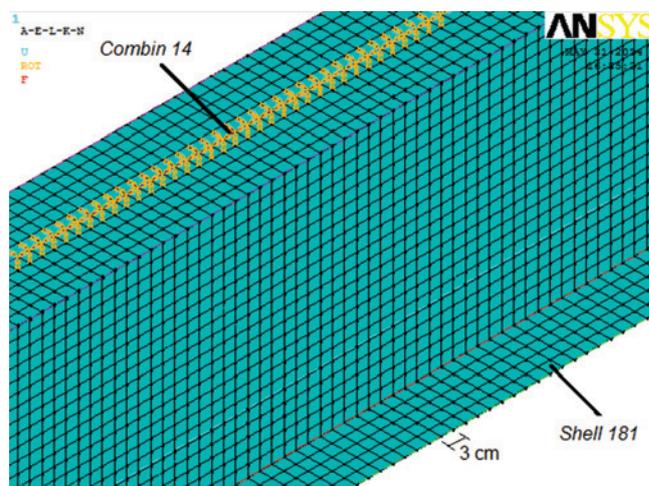
No presente trabalho, foram implementados modelos numéricos, com auxílio do software ANSYS 15.0 [1], que retratam o comportamento em regime elástico à flambagem lateral com distorção de vigas mistas de aço e concreto com o intuito de analisar a influência do parâmetro de modificação de momento fletor ( $C_{dist}$ ) no valor do momento crítico elástico. A modelagem numérica foi aferida tomando como referência os resultados numéricos de Chen e Wang [4]. Para analisar a formulação analítica do  $M_{cr}$  prescrita pela ABNT NBR 8800:2008, foram modeladas vigas mistas com diferentes condições de contorno, resultando em cento e dezoito modelos numéricos.

## 2. Aferição do modelo numérico

Para a análise numérica foi utilizado o software de elementos finitos ANSYS 15.0 [1], determinando a carga crítica de flambagem por meio da análise de flambagem linearizada elástica (*linear buckling analysis*). Na determinação do momento crítico elástico à FLD, utilizou-se o modelo numérico em elementos finitos, conforme descrito no subitem 2.1. Para constatar qual a condição de contorno é ideal para se adotar nessa análise numérica, realizou-se um estudo das condições de contorno, descrito no subitem 2.2. A análise dos resultados da aferição do modelo numérico, subitem 2.3, foi realizada comparando os resultados obtidos numericamente com os modelos estudados por Chen e Wang [4].

### 2.1 Descrição do modelo numérico

No modelo numérico da viga mista de aço e concreto utilizado neste trabalho não foi modelado a laje de concreto armado nem os conectores de cisalhamento. Para garantir o mecanismo “U” invertido foi adicionada uma mola de rigidez rotacional,  $k_r$ , e uma restrição total ao deslocamento lateral, ambas aplicadas à mesa superior, ao longo de todo o comprimento da viga. Similar a Oliveira [6], o modelo numérico é constituído pelo perfil de aço de alma plana, modelado com o elemento de casca *Shell 181* e pelas molas, modeladas com o elemento *Spring Combin14* (Figura 3).

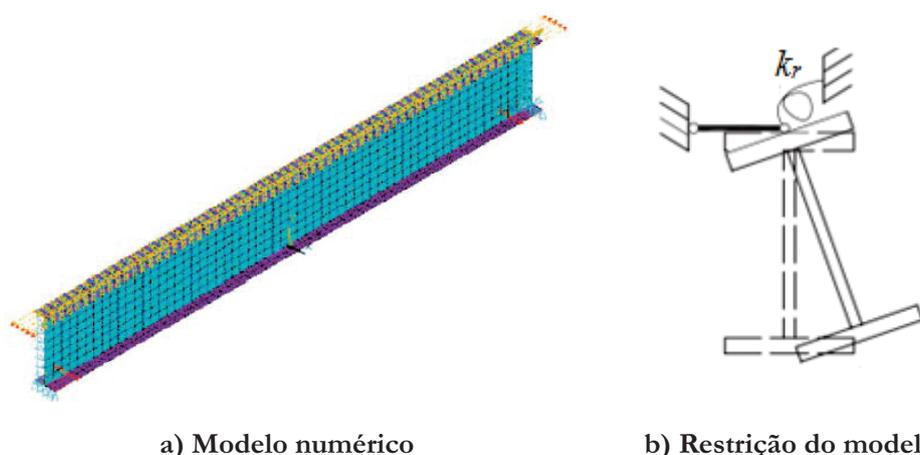


**Figura 3**  
Malha do modelo numérico de Oliveira [6]

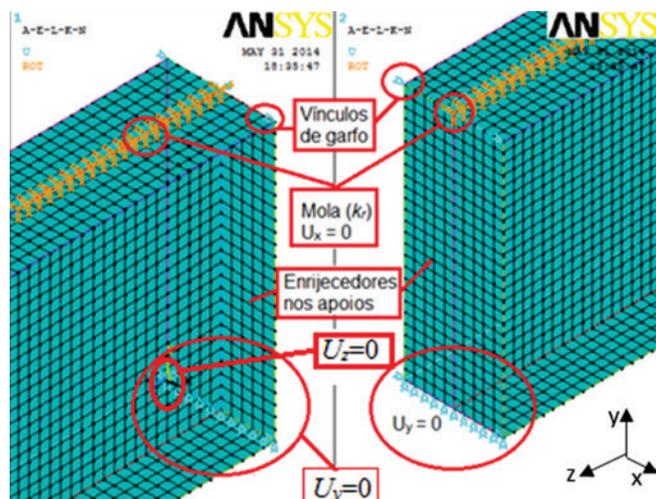
O valor da rigidez  $k_r$  foi tomada igual ao valor da rigidez da laje ( $k_1$ ), obtida pela Equação 7, uma vez que a rigidez da alma ( $k_2$ ) já está considerada no modelo por meio dos elementos de casca *Shell 181* que compõem a alma do perfil de aço.

Para geração da malha dos modelos numéricos, optou-se pela geração mapeada com tamanho máximo igual a 3 cm (Figura 3). Essa dimensão foi definida no estudo de malha de Oliveira [6] como sendo o tamanho a partir do qual os resultados deixam de apresentar melhora significativa.

Para aferição do modelo numérico, utilizaram-se os resultados obtidos do estudo descrito em Chen e Wang [4]. O modelo de elementos finitos adotado por Chen e Wang [4] consiste em uma viga de aço soldada simplesmente apoiada, submetida a um momento negativo constante ao longo do vão  $M_a$  com restrição rotacional e lateral aplicada à mesa superior (Figura 4-a). Por simplificação, a força axial na viga de aço  $N_a$  não foi considerada. A restrição rotacional no modelo foi imposta por molas, conforme representado na Figura 4-b. O modelo numérico de Chen e Wang



**Figura 4**  
Modelo numérico de Chen e Wang [4]



**Figura 5**  
Condição de contorno do modelo MT-1

[4] foi validado através da comparação dos seus resultados obtidos numericamente com os obtidos na análise numérica das vigas mistas de seção I de Ng e Ronagh [5].

No estudo paramétrico, Chen e Wang [4] utilizaram perfil de aço com altura da seção transversal ( $d$ ) igual a 800 mm, largura das mesas ( $b_f$ ) de 320 mm, e espessura das mesas ( $t_f$ ) e da alma ( $t_w$ ) iguais 16 mm e 10 mm, respectivamente. Diferentes razões entre o vão da viga ( $L$ ) e a altura da seção ( $d$ ) foram analisadas por Chen e Wang [4].

Para aferir o modelo numérico deste trabalho, foram modeladas vigas biapoiadas com as mesmas características geométricas de Chen e Wang [4], com razões entre vão da viga e altura da seção ( $L/d$ ) iguais a 8 e 12. O coeficiente de Poisson e o módulo de

elasticidade do aço foram tomados iguais a 0,3 e 20000 kN/cm<sup>2</sup>, respectivamente.

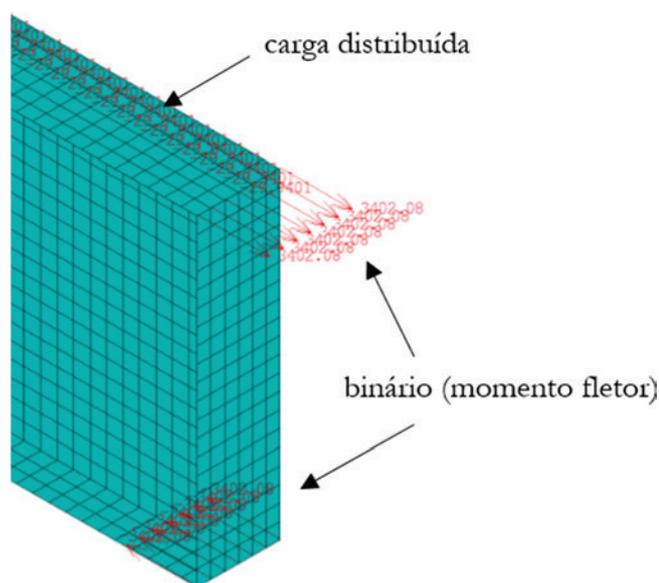
## 2.2 Estudo das condições de contorno

Para avaliar a forma mais adequada de se considerar as condições de contorno, diferentes situações foram simuladas em modelos numéricos de um único vão biapoiado, denominados modelos de testes, MT-1 a MT-10.

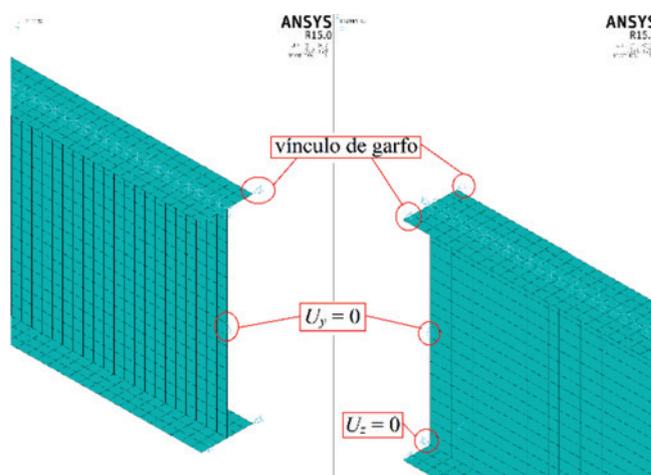
No primeiro teste, MT-1, Figura 5, enrijecedores de alma foram considerados nas seções transversais dos apoios por serem normalmente utilizados em ligações de vigas mistas. Em relação às condições de contorno relativas à flexão da viga, a restrição ao deslocamento vertical ( $U_y = 0$ ) foi aplicada nos nós da mesa inferior das seções transversais dos apoios, e a restrição ao deslocamento longitudinal na direção  $z$ , ( $U_z = 0$ ) foi aplicada em apenas um nó da mesa inferior de uma das seções transversais do apoio. Para simular o vínculo de garfo, restringiu-se o deslocamento lateral na direção  $x$  nas seções transversais dos apoios nos nós de canto das mesas superior e inferior. O momento fletor foi aplicado em uma das extremidades da viga por meio de um binário de forças, conforme ilustrado na Figura 6, simulando um vão extremo. Além disso, a carga distribuída foi aplicada como força na direção  $y$  nos nós centrais da mesa superior do perfil de aço ao longo de toda a viga.

O modelo MT-2 apresenta as mesmas condições de contorno do modelo MT-1, com exceção dos enrijecedores nos apoios, que foram excluídos. Esse modelo teve como objetivo avaliar a hipótese de que os enrijecedores impediriam o empenamento das seções dos apoios, invalidando a condição de vínculo de garfo desejada.

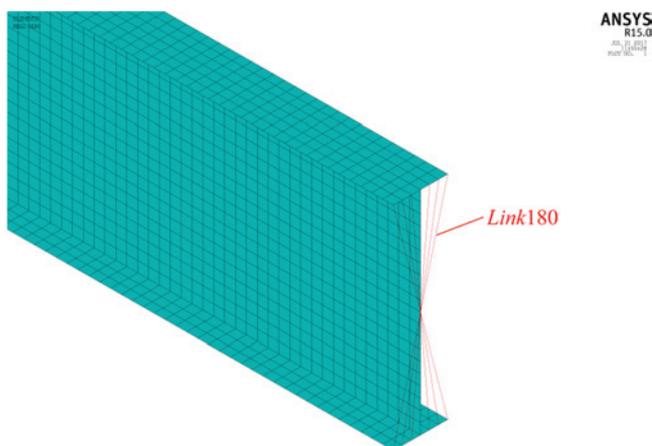
Para avaliar a influência da posição do apoio vertical, direção  $y$ , no modelo MT-3, aplicou-se a restrição em um único nó, no centróide da seção transversal (Figura 7). A restrição longitudinal na direção  $z$  foi mantida na mesa inferior do perfil de aço. Nesse modelo não foi considerado enrijecedores nos apoios. O carregamento aplicado é similar ao do modelo MT-1, ilustrado na Figura 5. O modelo MT-4 é idêntico ao modelo MT-3, porém elementos *Link180* foram acrescentados nas seções transversais dos apoios



**Figura 6**  
Carregamento aplicado no modelo MT-1



**Figura 7**  
Condições de contorno do modelo MT-3

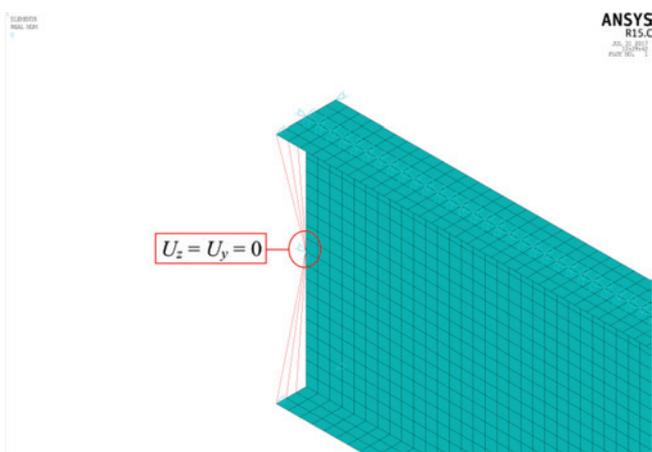


**Figura 8**  
Condição de contorno do modelo MT-4

(Figura 8), unindo todos os nós da seção ao nó do centróide, visando restringir a distorção da seção de aço nas direções  $x$  e  $y$ . O carregamento aplicado é similar ao do modelo MT-1, ilustrado na Figura 6.

Para avaliar a influência da posição do apoio longitudinal, direção  $z$ , o modelo MT-5 foi criado com as mesmas condições de contorno do modelo MT-4, exceto a posição da restrição longitudinal, que foi transferida para o nó do centroide da seção transversal (Figura 9). O carregamento aplicado é similar ao do modelo MT-1, ilustrado na Figura 6.

Com o intuito de analisar se a aplicação do momento via binário de forças nas mesas pode alterar a distribuição das tensões referentes ao momento na seção de extremidade, no modelo MT-6, considerou-se as mesmas condições de contorno do modelo MT-5, porém utilizando a distribuição linear das tensões devido ao momento fletor no lugar de um binário, aplicando forças nodais distribuídas ao longo de toda a seção transversal (Figura 10). Uma carga distribuída também foi aplicada nos nós centrais do eixo do perfil de aço ao longo de toda a viga.

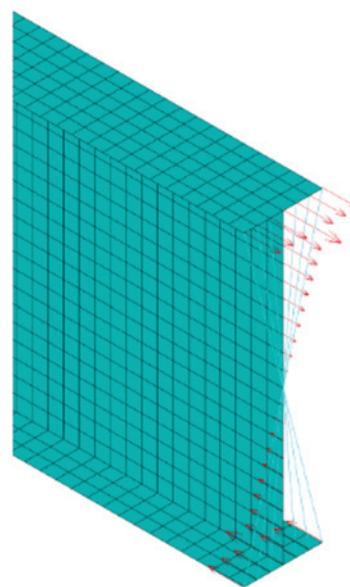


**Figura 9**  
Condição de contorno do modelo MT-5

O modelo MT-7 apresenta as mesmas condições de contorno do modelo MT-1, alterando apenas a maneira de aplicar o momento fletor na extremidade da viga, onde assim como no modelo MT-6, considerou-se a distribuição linear das tensões devido ao momento fletor, conforme ilustrado na Figura 10.

Os modelos MT-1 a MT-7 apresentam momento aplicado em apenas uma extremidade do vão, simulando vãos extremos. Para avaliar a situação do momento aplicado nas duas extremidades da viga, vãos internos de vigas mistas, considerou-se um modelo numérico (modelo MT-8) com condições de contorno iguais ao do modelo MT-1, porém com o momento aplicado nas duas extremidades, similarmente ao representado na Figura 6. O modelo MT-9 apresenta as mesmas condições de contorno do modelo MT-1, porém o momento fletor aplicado nas duas extremidades foi similar ao representado na Figura 10 (distribuição elástica). Por fim, o modelo MT-10 representa a mesma situação das condições de contorno do modelo MT-6, com momento fletor considerando distribuição elástica aplicado nas duas extremidades.

A Tabela 3 resume as características dos modelos numéricos MT-1 a MT-10 utilizados no estudo das condições de contorno nesse trabalho. A Tabela 4 apresenta os resultados numéricos de autovalor,  $\lambda_{ANSYS}$ , com as observações do tipo de instabilidade encontrada nos modelos MT-1 a MT-10, sendo FLD a flambagem lateral com distorção e FLA a flambagem local da alma. Para análise dos resultados, adotou-se como modelo padrão o MT-1, para o caso de momento aplicado em uma extremidade, e o modelo MT-8 para a situação de momento fletor nas duas extremidades. A razão entre o autovalor do modelo padrão,  $\lambda_{padr\tilde{a}o}$ , e o autovalor obtido nos demais modelos,  $\lambda_{ANSYS}$ , também é apresentada na Tabela 4. Pelos resultados apresentados na Tabela 4, observa-se a importância de considerar enrijecedores ou elementos tipo Link180 na seção transversal do apoio para evitar a ocorrência da flambagem local da alma. Os modos de flambagem obtidos para o MT-2, sem



**Figura 10**  
Momento fletor aplicado na extremidade do perfil de aço do modelo MT-6

**Tabela 3**

Resumo das condições de contorno analisadas

Modelo	Enrijecedores no apoio	Restrição à distorção (Link 180)	Posição apoio vertical	Posição apoio longitudinal	Diagrama de momento fletor
MT-1	Sim	Não	Mesa inferior	Mesa inferior	Binário de forças
MT-2	Não	Não	Mesa inferior	Mesa inferior	Binário de forças
MT-3	Não	Não	Centro da alma	Mesa inferior	Binário de forças
MT-4	Não	Sim	Centro da alma	Mesa inferior	Binário de forças
MT-5	Não	Sim	Centro da alma	Centro da alma	Binário de forças
MT-6	Não	Sim	Centro da alma	Centro da alma	Diagrama elástico
MT-7	Sim	Não	Mesa inferior	Mesa inferior	Diagrama elástico
MT-8	Sim	Não	Mesa inferior	Mesa inferior	Binário de forças
MT-9	Sim	Não	Mesa inferior	Mesa inferior	Diagrama elástico
MT-10	Não	Sim	Centro da alma	Centro da alma	Diagrama elástico

**Tabela 4**

Resultados obtidos

Modelo	$\lambda_{ANSYS}$	$\lambda_{Reference} / \lambda_{ANSYS}$	Observação
MT1	54,9362	-	FLD
MT2	20,2109	2,72	FLA no apoio
MT3	45,3439	1,21	FLD + FLA no apoio
MT4	55,5789	0,99	FLD
MT5	55,5789	0,99	FLD
MT6	54,6327	1,01	FLD
MT7	53,9052	1,02	FLD
MT8	9,77831	-	FLD
MT9	9,79843	0,99	FLD
MT10	9,9057	0,98	FLD

enrijecedor, e para o MT-3, sem elementos tipo *Link180* foram respectivamente a FLA e a interação entre a FLD e a FLA, não sendo de interesse para esse estudo. Comparando os modelos MT-4 e MT-1, pode-se notar que a presença do enrijecedor não compromete a condição de vínculo de garfo uma vez que a razão entre os autovalores  $I_{padrão} / \lambda_{ANSYS}$  foi de 0,99, diferença de 1%.

Em relação à posição dos apoios vertical e longitudinal, observa-se que não houve alteração quando os apoios estão na mesa inferior ou no centroide da seção (modelos MT-1 e MT-5) uma vez que a razão entre os autovalores  $I_{padrão} / \lambda_{ANSYS}$  foi de 0,99, diferença de 1%. Assim, o fato das seções transversais do apoio girarem em torno do eixo de flexão (passando pelo centroide) ou em torno da mesa inferior não influencia nos resultados, sendo possível adotar qualquer uma dessas duas condições de contorno.

Quando se compara os modelos MT-1 com MT-7 e MT-8 com MT-9, nota-se que a aplicação de um binário de forças não influenciou a distribuição das tensões referentes ao momento na seção de extremidade porque a razão entre os autovalores  $I_{padrão} / \lambda_{ANSYS}$  foi respectivamente igual a 1,02 e 0,99.

Com a análise dos resultados apresentada, pode-se concluir que as condições de contorno dos modelos MT-5 e MT-10 (restrições à translação aplicadas no centróide da seção transversal, elementos tipo *Link180* no lugar de enrijecedores e distribuição elástica de tensões para aplicação do momento fletor) são satisfatórias para estudar a instabilidade de flambagem lateral com distorção da alma (FLD), sendo, portanto adotadas nos estudos paramétricos deste trabalho.

### 2.3 Descrição do modelo numérico

Para aferição do modelo numérico, foram necessários implementar modelos com elementos de mola com rigidez rotacional infinita para determinar o momento crítico elástico considerando a laje de rigidez infinita ( $M_{cr,\infty}$ ) e modelos com mola de rigidez igual a rigidez da laje ( $K_1$ ), para determinar o momento crítico elástico ( $M_{cr}$ ). Na Tabela 5, é apresentada os exemplos analisados para a aferição do modelo numérico deste trabalho, com a razão  $k_1/k_2$  e  $M_{cr} / M_{cr,\infty}$  extraída dos gráficos de Chen e Wang [4]. A rigidez da laje  $k_1$

foi calculada a partir das razões  $k_1/k_2$  descrita por Chen e Wang [4], sendo a rigidez à flexão da alma do perfil de aço ( $k_2$ ) igual a 70,08 kNm/m, determinada por meio da Equação 8.

Pelos gráficos da Figura 11, observa-se que os resultados do modelo numérico apresentam um comportamento similar ao de Chen e Wang [4], com valores próximos, obtendo um desvio máximo de 4% para os modelos com razão L/d igual a 8 (Tabela 5) e um desvio máximo igual 10% para os modelos com L/d igual a 12 (Tabela 5).

Diante do exposto, considera-se que a modelagem numérica desse trabalho está aferida e se mostra eficiente na determinação do momento crítico elástico à flambagem lateral com distorção, pois apresenta diferenças percentuais relativamente pequenas em relação aos resultados obtidos por Chen e Wang [4].

### 3. Estudo paramétrico

No estudo paramétrico foram variadas as condições de

contorno do modelo numérico, considerando um vão biapoiado, representando o modelo simplificado de Roik, Hanswille e Kina [8], e modelos com dois e três vãos, simulando, respectivamente, vãos extremos e vãos internos da viga mista. As condições de contorno dos modelos numéricos de um vão biapoiado são descritas no Subitem 2.2. Para os modelos com dois e três vãos, as condições de contorno são similares às dos modelos biapoiados, ou seja, todos os apoios possuem restrição à translação vertical e o deslocamento longitudinal é restringido em apenas um deles.

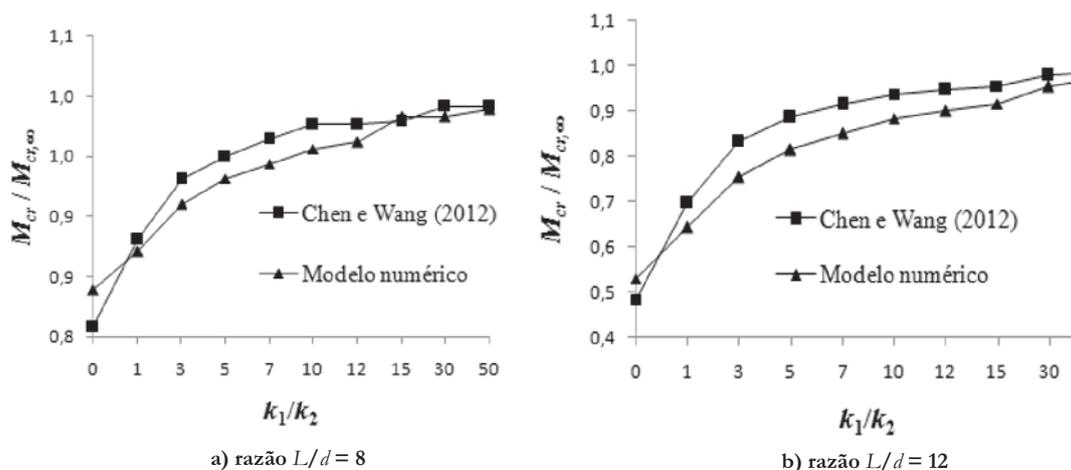
Adotou-se a viga mista de aço e concreto de seção transversal representada pela Figura 12-a, sendo a flambagem lateral com distorção estudada nesse trabalho pelo modelo numérico simplificado da Figura 12-b. Para obter o valor da rigidez da laje  $k_1$ , a Equação 7 foi utilizada, considerando viga de extremidade, isto é,  $\alpha$  igual a 2, distância entre vigas paralelas (a) igual a 200 cm e a rigidez à flexão da seção mista homogeneizada da laje, desprezando o concreto tracionado ( $EI_2$ ) igual a 528

**Tabela 5**

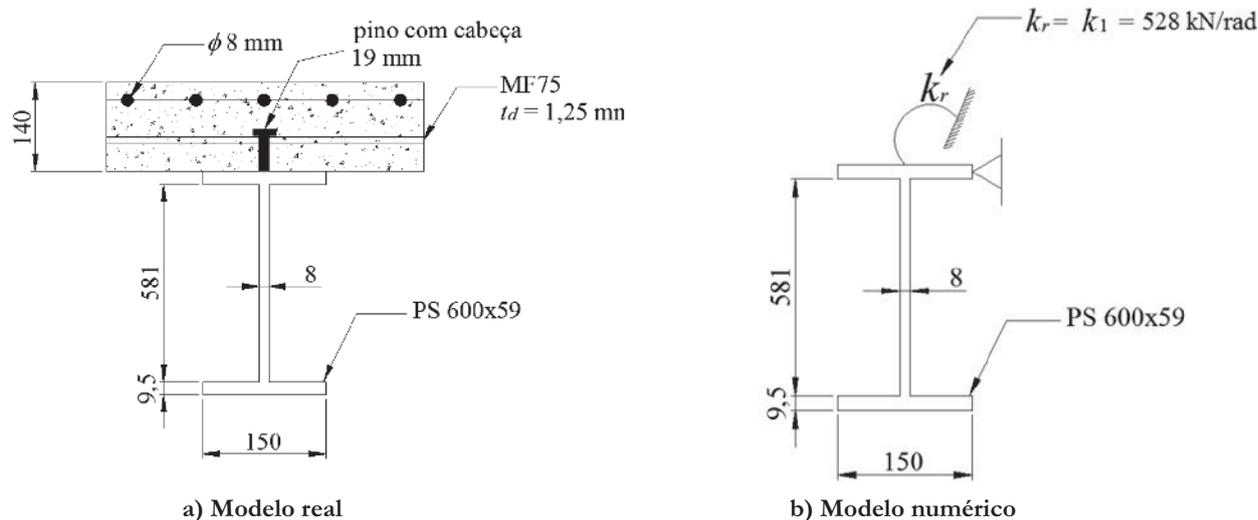
Resultados de Chen e Wang [4] e resultados numéricos deste trabalho

a) razão L/d = 8				
Chen e Wang (2012)			Resultado numérico	
$k_1/k_2$	$k_1$	$M_{cr}/M_{cr,\infty}$	$M_{cr}/M_{cr,\infty}$	Desvio relativo (%)
0	0	0,808	0,839	4%
0,90	62,87	0,880	0,871	-1%
2,93	205,46	0,931	0,910	-2%
4,97	348,25	0,949	0,931	-2%
6,92	484,84	0,964	0,944	-2%
9,93	696,01	0,976	0,956	-2%
11,97	838,91	0,976	0,962	-1%
14,90	1043,92	0,979	0,983	0%
29,88	2093,85	0,991	0,982	-1%
49,91	3497,99	0,991	0,989	0%

b) razão L/d = 12				
Chen e Wang (2012)			Resultado numérico	
$k_1/k_2$	$k_1$	$M_{cr}/M_{cr,\infty}$	$M_{cr}/M_{cr,\infty}$	Desvio relativo (%)
0	0	0,484	0,530	9%
1,02	75,09	0,697	0,642	-9%
2,98	219,01	0,833	0,754	-10%
5,02	369,19	0,885	0,814	-9%
6,97	513,11	0,914	0,850	-8%
9,95	732,12	0,937	0,883	-6%
11,99	882,29	0,946	0,899	-5%
14,97	1101,30	0,955	0,915	-4%
29,93	2202,61	0,979	0,954	-3%
49,91	3673,10	0,986	0,971	-1%



**Figura 11**  
Comparação entre os resultados de Chen e Wang [4] e os numéricos



**Figura 12**  
Modelo utilizado no estudo numérico

kN.m, resultando em  $k_1$  igual a 528 kN/rad. O comprimento do vão ( $L$ ) é de 1500 cm, aproximadamente 25 vezes a altura da viga. O fator relacionado à geometria da seção transversal da viga mista,  $\alpha_g$ , é igual a 1,09. A rigidez à torção,  $G_a J$ , é igual a 143617 kNcm<sup>2</sup>. Já o módulo de elasticidade do aço,  $E$ , é igual a 20000 kN/cm<sup>2</sup> e o momento de inércia da mesa inferior do perfil de aço em relação ao eixo  $y$ ,  $I_{af,y}$ , é igual a 267 cm<sup>4</sup>. Por fim, a razão  $M_{cr}/C_{dist}$  é igual a 5379 kNcm.

Foram avaliados todos os casos da Tabela 1 e Tabela 2 de vigas mistas contínuas. As vigas da Tabela 1 têm carregamento transversal distribuído ou concentrado, sendo  $M_0$  o momento fletor máximo solicitante de cálculo no meio do vão, considerando o tramo analisado como biapoiado, e o momento fletor na extremidade da viga igual a  $\psi M_0$ .

Para o vão interno de vigas mistas contínuas com carregamento transversal distribuído, foram estudadas as três possíveis

situações da relação entre o momento fletor máximo solicitante de cálculo ( $M_0$ ) e o momento fletor na extremidade das vigas:  $0,5\psi M_0$ ,  $0,75\psi M_0$  e  $\psi M_0$ .

Para representar vãos extremos das vigas mistas contínuas, foram processados modelos simplificados, considerando uma viga mista de aço e concreto biapoiada com momento fletor aplicado em uma extremidade,  $M_E$  – momento na extremidade esquerda, de valor igual a informado na Tabela 6 e Tabela 8 (modelos M1 a M9 e M73 a M81). Os modelos simplificados dos vãos internos são obtidos de forma similar ao do vão extremo, porém com momento fletor aplicado nas duas extremidades,  $M_E$  e  $M_D$  (momento na extremidade direita), conforme representado na Tabela 6 e na Tabela 8, modelos M10 a M36 e M82 a M90.

Para analisar a influência do vão adjacente dessas vigas, também foram modeladas vigas com dois e com três vãos de igual

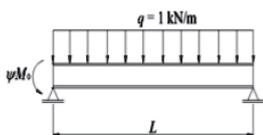
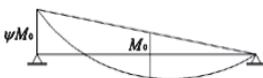
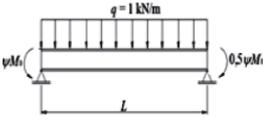
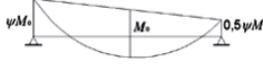
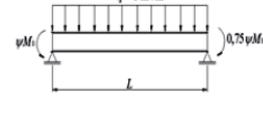
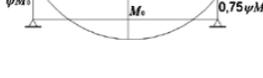
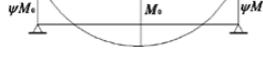
comprimento (L), simulando, respectivamente, vãos extremos e vãos internos. Para vãos extremos de vigas contínuas com carregamento transversal distribuído (modelos M37 a M45 da Tabela 7), foi possível obter uma relação entre as cargas

distribuídas  $q_1$  e  $q_2$ , utilizando as equações dos três momentos. Considerando a carga no vão analisado  $q_2$  igual a 1kN/m, tem-se:

$$q_1 = (2\psi - 1)q_2 \tag{9}$$

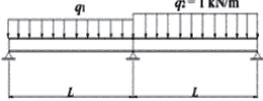
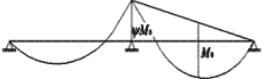
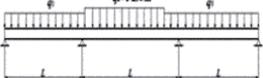
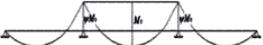
**Tabela 6**

Modelos numéricos biapoitados de vigas mistas contínuas com carregamento transversal distribuído

Modelo	Condição de contorno	Diagrama de momento fletor	$\psi$	$M_E$ (kNm)	$M_D$ (kNm)
M1			0,5	14,06	-
M2			0,75	21,09	-
M3			1	28,13	-
M4			1,25	35,16	-
M5			1,5	42,19	-
M6			1,75	49,22	-
M7			2	56,25	-
M8			2,25	63,28	-
M9			2,5	70,31	-
M10			0,5	14,06	7,03
M11			0,75	21,09	10,55
M12			1	28,13	14,06
M13			1,25	35,16	17,58
M14			1,5	42,19	21,09
M15			1,75	49,22	24,61
M16			2	56,25	28,13
M17			2,25	63,28	31,64
M18			2,5	70,31	35,16
M19			0,5	14,06	10,55
M20			0,75	21,09	15,82
M21			1	28,13	21,09
M22			1,25	35,16	26,37
M23			1,5	42,19	31,64
M24			1,75	49,22	36,91
M25			2	56,25	42,19
M26			2,25	63,28	47,46
M27			2,5	70,31	52,73
M28			0,5	14,06	14,06
M29			0,75	21,09	21,09
M30			1	28,13	28,13
M31			1,25	35,16	35,16
M32			1,5	42,19	42,19
M33			1,75	49,22	49,22
M34			2	56,25	56,25
M35			2,25	63,28	63,28
M36			2,5	70,31	70,31

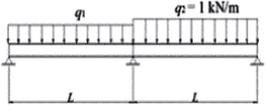
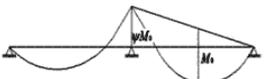
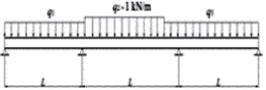
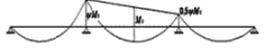
**Tabela 7**

Modelos numéricos com dois e três vãos de vigas mistas contínuas com carregamento transversal distribuído

Modelo	Condição de contorno	Diagrama de momento fletor	$\psi$	$q_1$ (kN/m)	$q_2$ (kN/m)
M37			0,5	0	-
M38			0,75	0,50	-
M39			1	1,00	-
M40			1,25	1,50	-
M41			1,5	2,00	-
M42			1,75	2,50	-
M43			2	3,00	-
M44			2,25	3,50	-
M45			2,5	4,00	-
M46					0,5
M47	0,75	0,69			0,13
M48	1	1,25			0,5
M49	1,25	1,81			0,88
M50	1,5	2,38			1,25
M51	1,75	2,94			1,63
M52	2	3,50			2
M53	2,25	4,06			2,38
M54	2,5	4,63			2,75
M55					0,5
M56			0,75	0,78	0,5
M57			1	1,38	1
M58			1,25	1,97	1,5
M59			1,5	2,56	2
M60			1,75	3,16	2,5
M61			2	3,75	3
M62			2,25	4,34	3,5
M63			2,5	4,94	4
M64					0,5
M65	0,75	0,88			0,88
M66	1	1,50			1,5
M67	1,25	2,13			2,13
M68	1,5	2,75			2,75
M69	1,75	3,38			3,38
M70	2	4			4
M71	2,25	4,63			4,63
M72	2,5	5,25			5,25

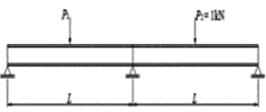
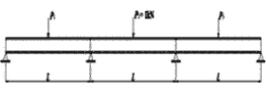
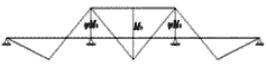
**Tabela 8**

Modelos numéricos biapoiados de vigas mistas contínuas com carregamento transversal concentrado

Modelo	Condição de contorno	Diagrama de momento fletor	$\psi$	$M_E$ (kN/m)	$M_D$ (kN/m)
M73			0,5	1,88	-
M74			0,75	2,81	-
M75			1	3,75	-
M76			1,25	4,69	-
M77			1,5	5,63	-
M78			1,75	6,56	-
M79			2	7,50	-
M80			2,25	8,44	-
M81			2,5	9,38	-
M82					0,5
M83	0,75	2,81			2,81
M84	1	3,75			3,75
M85	1,25	4,69			4,69
M86	1,5	5,63			5,63
M87	1,75	6,56			6,56
M88	2	7,50			7,50
M89	2,25	8,44			8,44
M90	2,5	9,38			9,38

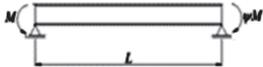
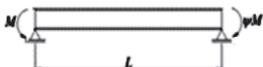
**Tabela 9**

Modelos numéricos com dois e três vãos de vigas mistas contínuas com carregamento transversal concentrado

Modelo	Condição de contorno	Diagrama de momento fletor	$\psi$	$P_1$ (kN)	$P_2$ (kN)
M91			0,5	0,33	-
M92			0,75	1	-
M93			1	1,67	-
M94			1,25	2,33	-
M95			1,5	3	-
M96			1,75	3,67	-
M97			2	4,33	-
M98			2,25	5	-
M99			2,5	5,67	-
M100					0,5
M101	0,75	1,5			1,5
M102	1	2,33			2,33
M103	1,25	3,17			3,17
M104	1,5	4			4
M105	1,75	4,83			4,83
M106	2	5,67			5,67
M107	2,25	6,5			6,5
M108	2,5	7,33			7,33

**Tabela 10**

Modelos numéricos biapoiados de vigas mistas contínuas sem carregamento no comprimento L

Modelo	Condição de contorno	Diagrama de momento fletor	$\psi$	$M_E$ (kN/m)	$M_D$ (kN/m)
M109			0	1	0
M110			0,25	1	0,25
M111			0,5	1	0,5
M112			0,75	1	0,75
M113			1	1	1
M114			0	1	0
M115			0,25	1	-0,25
M116			0,5	1	-0,5
M117			0,75	1	-0,75
M118			1	1	-1

Os modelos do vão interno (M46 a M72 da Tabela 7) são obtidos de forma similar ao do vão extremo, com as relações de carregamento determinadas pela equação dos três momentos para as três variações do diagrama de momento fletor. Considerando os momentos fletores nas extremidades do vão analisado iguais a  $\psi M_0$  e  $0,5\psi M_0$ , têm-se:

$$q_1 = (2,25\psi - 1)q_2 \quad (10)$$

$$q_3 = (1,5\psi - 1)q_2 \quad (11)$$

Para momentos fletores nas extremidades do vão analisado iguais a  $\psi M_0$  e  $0,75\psi M_0$ , as relações entre as cargas ficam:

$$q_1 = (2,375\psi - 1)q_2 \quad (12)$$

$$q_3 = (2\psi - 1)q_2 \quad (13)$$

Finalmente, para momentos fletores nas extremidades do vão analisado iguais a  $\psi M_0$ , têm-se:

$$q_1 = q_3 = (2,5\psi - 1)q_2 \quad (14)$$

Para vigas mistas contínuas com carregamentos concentrados (modelos M91 a M99 da Tabela 9), a equação dos três momentos também foi utilizada e a relação entre as cargas concentradas  $P_1$  e  $P_2$  da Equação 15, foram obtidas conforme abaixo:

$$P_1 = \left(\frac{8}{3}\psi - 1\right)P_2 \quad (15)$$

e, para os modelos do vão interno (modelos M100 a M108 da Tabela 9) as relações obtidas entre as cargas  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  foram:

$$P_1 = P_3 = \left(\frac{10}{3}\psi - 1\right)P_2 \quad (16)$$

As vigas da Tabela 2 não têm carregamento transversal ao longo do comprimento L, apenas momentos concentrados aplicados nas extremidades do vão, sendo o diagrama de momento fletor linear. Para esses casos foram processados apenas modelos simplificados biapoiados sujeitos a momentos concentrados nas extremidades. Para os modelos M109 a M113 da Tabela 10,

um momento M de valor 1kN.m é aplicado na extremidade esquerda do perfil de aço e outro momento de valor igual à  $\psi M$  é aplicado na extremidade direita de forma a se obter diagrama de curvatura simples.

## 4. Análise de resultados

### 4.1 Modelos numéricos de vigas mistas com carregamento transversal distribuído

A Tabela 11 apresenta os resultados obtidos numericamente para os modelos simplificados (M1 a M36) e para os modelos com mais de um vão (M37 a M72) com carregamento distribuído. Os resultados obtidos para os modelos simplificados ( $M_{cr,s}$ ) e para os modelos com mais de um vão ( $M_{cr,v}$ ) são confrontados com os obtidos pela Equação 1, proposta por Roik, Hanswille e Kina [8], sendo essa equação a mesma usada pela ABNT NBR 8800:2008 ( $M_{cr,ABNT}$ ).

Pela Figura 13, é possível observar que o modelo simplificado apresenta a mesma tendência de comportamento que a obtida pela equação da ABNT NBR 8800:2008, ou seja,  $M_{cr}$  decresce com o aumento de  $\psi$ . No entanto, a declividade da curva obtida pela equação da ABNT NBR 8800:2008 é mais acentuada e os resultados numéricos apresentam valores abaixo dos obtidos pela Equação 1.

Pode-se notar, na Figura 13, que a modelagem com mais de um vão também apresenta a mesma tendência de comportamento que a obtida pela equação da ABNT NBR 8800:2008 para valores de  $\psi$  acima de 1,0 ( $M_{cr}$  decresce com o aumento de  $\psi$ ). Para  $\psi$  abaixo de 1,0 não é possível analisar os resultados obtidos do  $M_{cr}$ , uma vez que nessa situação o vão adjacente é quem precipita a flambagem lateral com distorção. Observa-se também que os resultados obtidos dos modelos biapoiados estão muito próximos dos modelos com mais de um vão, demonstrando que o vão adjacente influencia pouco nos resultados obtidos do vão analisado. Dessa forma, pode-se afirmar que o modelo numérico simplificado apresenta boa precisão de resultados.

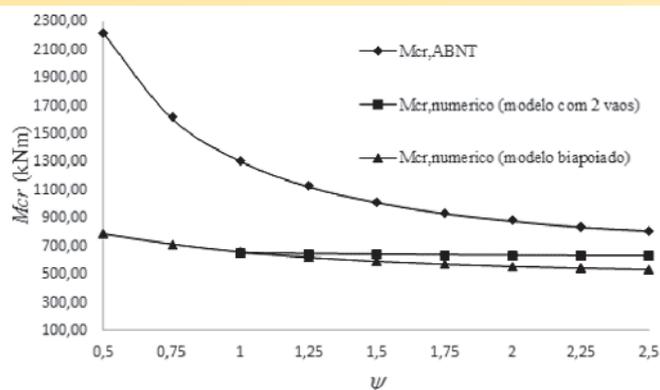
Ao comparar os resultados numéricos dos modelos simplificados

**Tabela 11**

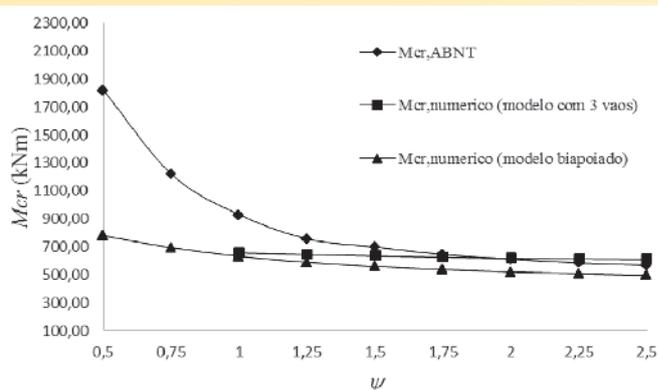
Resultados numéricos e resultado analítico de vigas mistas contínuas com carregamento transversal distribuído

Modelos		$\psi$	$C_{dist}$	$M_{cr,ABNT}$ (kNm)	$M_{cr,s}$ (kNm)	$M_{cr,v}$ (kNm)	$M_{cr,s} /$ $M_{cr,ABNT}$	$M_{cr,v} /$ $M_{cr,ABNT}$
Simplificados 1 vão	Com 2 ou 3 vãos							
M1	M37	0,5	41,5	2223,26	789,20	496,71	0,35	0,22
M2	M38	0,75	30,2	1617,89	715,78	642,09	0,44	0,40
M3	M39	1	24,5	1312,53	659,29	649,58	0,50	0,49
M4	M40	1,25	21,1	1130,38	619,98	646,65	0,55	0,57
M5	M41	1,5	19	1017,88	591,95	641,85	0,58	0,63
M6	M42	1,75	17,5	937,52	571,20	637,42	0,61	0,68
M7	M43	2	16,5	883,95	555,31	633,76	0,63	0,72
M8	M44	2,25	15,7	841,09	542,79	630,78	0,65	0,75
M9	M45	2,5	15,2	814,30	532,69	628,36	0,65	0,77
M10	M46	0,5	33,9	1816,11	777,62	526,19	0,43	0,29
M11	M47	0,75	22,7	1216,10	692,52	656,40	0,57	0,54
M12	M48	1	17,3	926,80	630,32	653,99	0,68	0,71
M13	M49	1,25	14,1	755,37	587,93	643,06	0,78	0,85
M14	M50	1,5	13	696,44	558,03	632,38	0,80	0,91
M15	M51	1,75	12	642,87	536,02	623,62	0,83	0,97
M16	M52	2	11,4	610,73	519,22	616,75	0,85	1,01
M17	M53	2,25	10,9	583,94	506,00	611,40	0,87	1,05
M18	M54	2,5	10,6	567,87	495,35	607,17	0,87	1,07
M19	M55	0,5	28,2	1510,75	770,93	619,86	0,51	0,41
M20	M56	0,75	18	964,31	679,83	661,59	0,70	0,69
M21	M57	1	13,7	733,94	614,75	652,72	0,84	0,89
M22	M58	1,25	11,7	626,80	570,75	637,34	0,91	1,02
M23	M59	1,5	10,6	567,87	539,77	623,43	0,95	1,10
M24	M60	1,75	10	535,73	516,96	612,26	0,96	1,14
M25	M61	2	9,5	508,94	499,53	603,66	0,98	1,19
M26	M62	2,25	9,1	487,51	485,81	597,00	1,00	1,22
M27	M63	2,5	8,9	476,80	474,75	591,75	1,00	1,24
M28	M64	0,5	21,9	1173,24	760,93	631,82	0,65	0,54
M29	M65	0,75	13,9	744,66	666,41	664,87	0,89	0,89
M30	M66	1	11	589,30	596,53	647,70	1,01	1,10
M31	M67	1,25	9,6	514,30	548,51	625,86	1,07	1,22
M32	M68	1,5	8,8	471,44	514,93	607,51	1,09	1,29
M33	M69	1,75	8,3	444,65	490,43	593,63	1,10	1,34
M34	M70	2	8	428,58	471,84	583,22	1,10	1,36
M35	M71	2,25	7,8	417,87	457,31	574,93	1,09	1,38
M36	M72	2,5	7,6	407,15	445,65	567,73	1,09	1,39

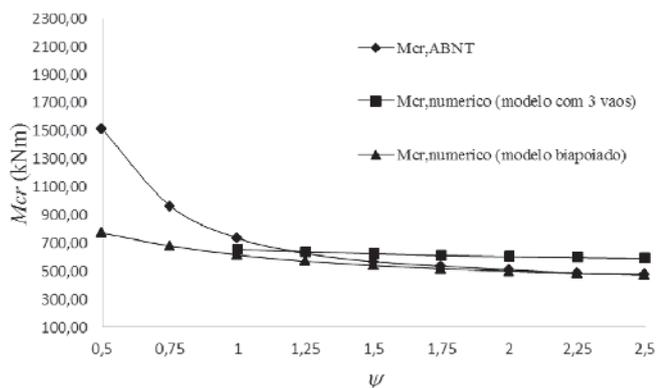
$M_{cr,s}$  = Momento crítico numérico do modelo simplificado com um vão biapoiado;  $M_{cr,v}$  = Momento crítico numérico do modelo com dois ou três vãos



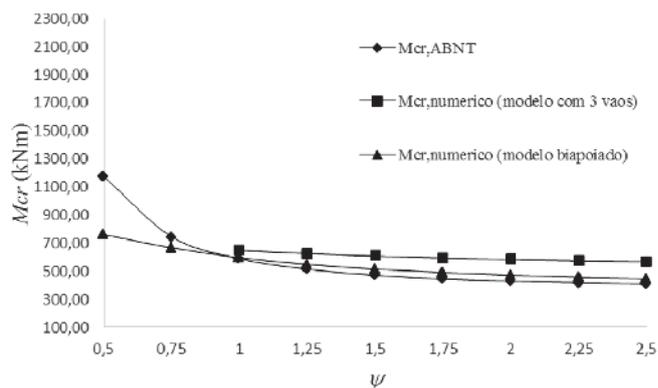
a) modelos vão extremo (M1 a M9 e M37 a M45)



b) modelos vão interno (M10 a M18 e M46 a M54)



c) modelos vão interno (M19 a M27 e M55 a M63)



d) modelos vão interno (M28 a M36 e M64 a M72)

Figura 13

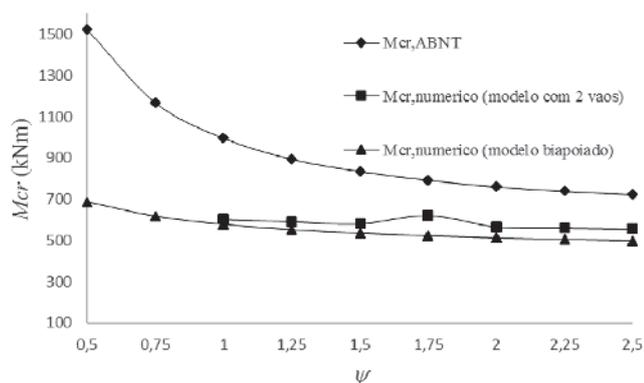
$M_{cr}$  x  $\psi$  para vigas mistas contínuas com cargas distribuídas

Tabela 12

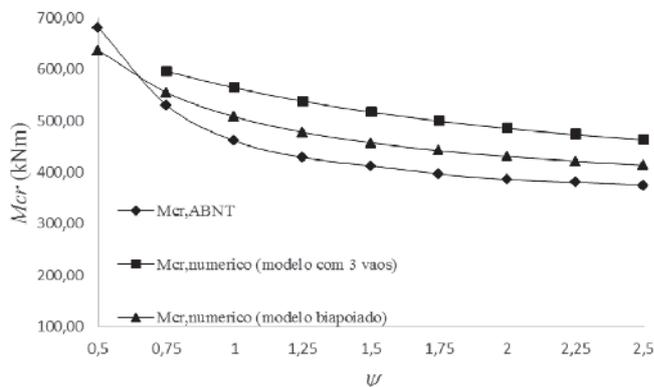
Resultados numéricos e resultado analítico de vigas mistas contínuas com carregamento transversal concentrado

Modelos		$\psi$	$C_{dist}$	$M_{cr,ABNT}$ (kNm)	$M_{cr,s}$ (kNm)	$M_{cr,v}$ (kNm)	$\frac{M_{cr,s}}{M_{cr,ABNT}}$	$\frac{M_{cr,v}}{M_{cr,ABNT}}$
Simplificados 1 vão	Com 2 ou 3 vãos							
M73	M91	0,5	28,4	1521,46	687,29	582,41	0,45	0,38
M74	M92	0,75	21,8	1167,88	617,80	609,90	0,53	0,52
M75	M93	1	18,6	996,45	577,94	602,99	0,58	0,61
M76	M94	1,25	16,7	894,66	552,58	592,30	0,62	0,66
M77	M95	1,5	15,6	835,73	535,10	582,52	0,64	0,70
M78	M96	1,75	14,8	792,87	522,33	622,65	0,66	0,79
M79	M97	2	14,2	760,73	512,60	567,22	0,67	0,75
M80	M98	2,25	13,8	739,30	504,93	561,33	0,68	0,76
M81	M99	2,5	13,5	723,23	498,74	556,33	0,69	0,77
M82	M100	0,5	12,7	680,37	636,42	617,16	0,94	0,91
M83	M101	0,75	9,89	529,83	554,48	595,37	1,05	1,12
M84	M102	1	8,6	460,72	507,39	563,68	1,10	1,22
M85	M103	1,25	8	428,58	477,59	537,51	1,11	1,25
M86	M104	1,5	7,7	412,51	457,03	516,42	1,11	1,25
M87	M105	1,75	7,4	396,44	441,96	499,16	1,11	1,26
M88	M106	2	7,2	385,72	430,42	484,87	1,12	1,26
M89	M107	2,25	7,1	380,36	421,29	472,93	1,11	1,24
M90	M108	2,5	7	375,01	413,88	462,90	1,10	1,23

$M_{cr,s}$  = Momento crítico numérico do modelo simplificado com um vão biapoiado;  $M_{cr,v}$  = Momento crítico numérico do modelo com dois ou três vãos



a) modelos vão extremo (M73 a M81 e M91 a M99)



b) modelos vão interno (M82 a M90 e M100 a M108)

Figura 14

$M_{cr} \times \psi$  para vigas mistas contínuas com cargas concentradas

com os da norma, Tabela 11, observa-se uma razão  $M_{cr,s}/M_{cr,ABNT}$  de 0,35 a 0,65 para vãos extremos (M1 a M9) e de 0,43 a 1,1 para vãos internos (M10 a M36). Para os modelos com mais de um vão, nos de vão extremo, (M37 a M45) a razão  $M_{cr,v}/M_{cr,ABNT}$  varia de 0,49 a 0,77, ou seja, a ABNT NBR 8800:2008 fornece previsões de  $M_{cr}$  contrárias a segurança. Para vãos internos (modelos M46 a M72), observa-se uma maior aproximação dos resultados numéricos com mais de um vão e os obtidos pela formulação da ABNT NBR 8800:2008, razão  $M_{cr,v}/M_{cr,ABNT}$  variando de 0,71 a 1,39.

4.2 Modelos numéricos de vigas mistas com carregamento transversal concentrado

A Tabela 12 apresenta os resultados obtidos numericamente para os modelos simplificados (M73 a M90) e para os modelos com mais de um vão (M91 a M108) com carregamento concentrado. Os resultados obtidos para os modelos simplificados ( $M_{cr,s}$ ) e para

os modelos com mais de um vão ( $M_{cr,v}$ ) são confrontados com os obtidos pela Equação 1, proposta por Roik, Hanswille e Kina [8] sendo essa equação a mesma usada pela ABNT NBR 8800:2008 ( $M_{cr,ABNT}$ ).

Pela Figura 14(a) é possível observar que os modelos numéricos, tanto o simplificado quanto o modelo com mais vãos, apresentam o mesmo comportamento que os modelos com carregamento distribuído, Figura 13(a). Na Figura 14(b), para todos os valores de  $\psi$ , os resultados numéricos são superiores aos da norma.

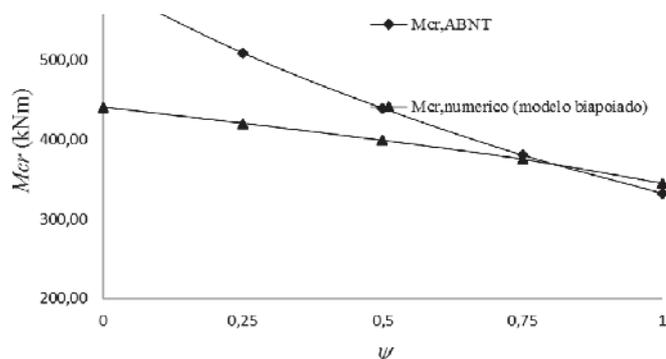
Ao comparar os resultados numéricos dos modelos simplificados com os da norma, Tabela 12, observa-se uma razão  $M_{cr,s}/M_{cr,ABNT}$  de 0,45 a 0,69 para vãos extremos (M73 a M81) e de 0,94 a 1,11 para vãos internos (M82 a M90). Para os modelos com mais de um vão, nos de vão extremo, (M91 a M99) a razão  $M_{cr,v}/M_{cr,ABNT}$  varia de 0,38 a 0,79, ou seja, a ABNT NBR 8800:2008 fornece previsões de  $M_{cr}$  contrárias a segurança. Para vãos internos (modelos M100 a M108), observa-se uma maior aproximação dos resultados

Tabela 13

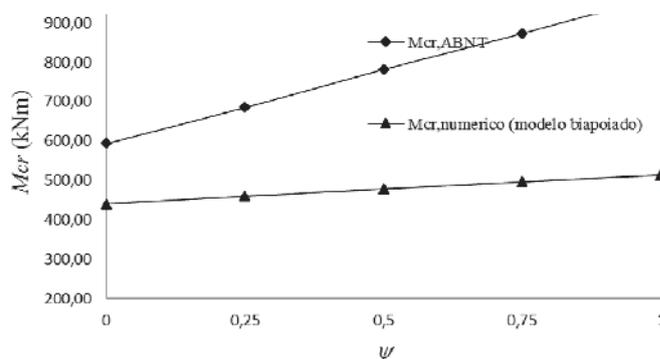
Resultados numéricos e resultado analítico de vigas mistas contínuas sem carregamento no comprimento L

Modelos	$\psi$	$C_{dist}$	$M_{cr,ABNT}$ (kNm)	$M_{cr,b}$ (kNm)	$M_{cr,b} / M_{cr,ABNT}$
Biapoiado					
M109	0	11,1	594,66	440,29	0,74
M110	0,25	9,5	508,94	420,20	0,83
M111	0,5	8,2	439,29	398,70	0,91
M112	0,75	7,1	380,36	375,05	0,99
M113	1	6,2	332,15	344,77	1,04
M114	0	11,1	594,66	440,29	0,74
M115	0,25	12,8	685,73	459,41	0,67
M116	0,5	14,6	782,16	477,81	0,61
M117	0,75	16,3	873,23	495,66	0,57
M118	1	18,1	969,66	513,03	0,53

$M_{cr,b}$  = Momento crítico do modelo biapoiado



a) modelos com diagrama de momento fletor de curvatura simples (M109 a M113)



b) modelos com diagrama de momento fletor de curvatura dupla (M114 a M118)

Figura 15

$M_{cr}$  x  $\psi$  para vigas mistas contínuas sem carregamento ao longo do comprimento L

numéricos com mais de um vão e os obtidos pela formulação da ABNT NBR 8800:2008, razão  $M_{cr,v}/M_{cr,ABNT}$  variando de 1,12 a 1,26, ficando sempre a favor da segurança.

### 4.3 Modelos numéricos de vigas mistas sem carregamento transversal

A Tabela 13 apresenta os resultados obtidos numericamente para os modelos biapoiados (M109 a M113) para momentos de extremidade provocando curvatura simples e para os modelos (M91 a M108) com curvatura dupla. Os resultados obtidos para os modelos biapoiados ( $M_{cr,b}$ ) são confrontados com os obtidos pela ABNT NBR 8800:2008 ( $M_{cr,ABNT}$ ).

Pela Figura 15, pode-se observar que o modelo biapoiado apresenta a mesma tendência de comportamento que a obtida pela equação

da ABNT NBR 8800:2008, ou seja,  $M_{cr}$  decresce com o aumento de  $\psi$ . No entanto, a declividade das curvas obtida pela equação da ABNT NBR 8800:2008 é mais acentuada e os resultados numéricos apresentam valores abaixo dos obtidos pela Equação 1, excetuando o caso de curvatura simples para  $\psi$  acima de 0,5.

Pela Tabela 13, observa-se uma razão  $M_{cr,s}/M_{cr,ABNT}$  de 0,74 a 1,04 para modelos com curvatura simples (M109 a M113) e de 0,53 a 0,74 para modelos com curvatura dupla (M114 a M118), ou seja, a ABNT NBR 8800:2008 fornece previsões de  $M_{cr}$  contrárias a segurança, excetuando o caso de curvatura simples para  $\psi$  acima de 0,5.

### 4.4 Proposição de valores para o parâmetro de modificação

A discussão dos itens 4.1 a 4.3 mostrou uma diferença pequena

Tabela 14

Valores de  $C_{dist}$  propostos para vãos com cargas transversais distribuídas ou concentradas

Condições de carregamento e apoio	Diagrama de momento fletor <sup>1</sup>	$C_{dist}$								
		$\psi=0,50$	$\psi=0,75$	$\psi=1,00$	$\psi=1,25$	$\psi=1,50$	$\psi=1,75$	$\psi=2,00$	$\psi=2,25$	$\psi=2,50$
		14,7	13,4	12,1	12,1	12,0	11,9	11,8	11,8	11,7
		14,5	12,9	12,2	12,0	11,8	11,6	11,5	11,4	11,3
		14,4	12,7	12,2	11,9	11,6	11,4	11,3	11,1	11,0
		14,2	12,4	12,1	11,7	11,3	11,1	10,9	10,7	10,6
		12,8	11,5	11,3	11,1	10,9	11,6	10,6	10,5	10,4
		11,9	11,1	10,5	10,0	9,6	9,3	9,1	8,8	8,6

Note: <sup>1</sup> $M_0$  é o momento máximo solicitante de cálculo, considerando o tramo analisado como biapoiado.

**Tabela 15**Valores de  $C_{dist}$  propostos para vãos sem carregamento no comprimento L

Condições de carregamento e apoio	Diagrama de momento fletor <sup>1</sup>	$C_{dist}$				
		$\psi=0,00$	$\psi=0,25$	$\psi=0,50$	$\psi=0,75$	$\psi=1,00$
		8,2	7,8	7,4	7,0	6,4
		8,2	8,6	8,9	9,3	9,6

**Note:** <sup>1</sup>M é o maior momento negativo solicitante de cálculo, em módulo, no trecho analisado, sendo que valores de  $\psi$  maiores que 1,00 devem ser tomados iguais a 1,00.

entre os resultados dos modelos numéricos simplificado e com mais de um vão. Como os modelos com mais de um vão retratam de forma mais fidedigna as vigas mistas contínuas, sugere-se a utilização da Tabela 14 e Tabela 15 para determinação do parâmetro  $C_{dist}$  no lugar das Tabelas 1 e 2 da ABNT NBR 8800:2008. Os valores de  $C_{dist}$  da Tabela 14 e Tabela 15 foram obtidos dos resultados numéricos a partir da Equação 17.

$$C_{distnum} = \frac{M_{cr,num}}{\frac{\alpha_g}{L} \sqrt{\left(G_d J + k_r \frac{L^2}{\pi^2}\right) E_a I_{afy}}} \quad (17)$$

onde  $M_{cr,num}$  é o valor do momento crítico dos modelos numéricos com mais de um vão, se  $\psi$  igual ou superior a 1 e dos modelos numéricos biapoiados, se  $\psi$  é menor que 1.

## 5. Conclusão

Nesse trabalho, modelos numéricos em elementos finitos, que representam o comportamento à FLD de vigas mistas contínuas de aço e concreto, foram desenvolvidos para determinação do momento crítico elástico. As diferentes condições de contorno apresentadas na ABNT NBR 8800:2008 foram modeladas considerando modelos simplificados com um vão biapoiado e modelos com mais de um vão, o que permitiu avaliar o parâmetro de modificação  $C_{dist}$ . A influência da distribuição do momento fletor foi analisada, e concluiu-se que a formulação proposta pela ABNT NBR 8800:2008 pode conduzir a resultados contrários à segurança.

Este trabalho propõe novos valores para o parâmetro de modificação  $C_{dist}$  com base nos resultados dos modelos numéricos com mais de um vão para  $\psi$  igual ou superior a 1,0. Como nos modelos com mais de um vão não é possível analisar os casos de  $\psi$  abaixo de 1,0, utilizou-se, nesses casos, o  $C_{dist}$  dos modelos numéricos simplificados (modelo com um vão biapoiado). Observou-se que a distribuição de momento fletor ao longo do vão, em vigas mistas contínuas, influencia pouco os resultados do  $M_{cr}$ , uma vez que os valores de  $C_{dist}$  numéricos são praticamente constantes. Recomenda-se uma revisão nos valores de  $C_{dist}$  propostos pela norma ABNT NBR 8800:2008, considerando os valores numéricos de  $C_{dist}$  apresentados nesse trabalho.

## 6. Agradecimentos

Os autores agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento

Científico e Tecnológico (CNPq), à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), à Fundação de Amparo à Pesquisa do Espírito Santo (FAPES) e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) pelo apoio para o desenvolvimento desta pesquisa.

## 7. Referências Bibliográficas

- [1] Ansys, INC., 2011. Release 15.0 Documentation for ANSYS. Canonsburg: [s.n.].
- [2] Associação Brasileira de Normas Técnicas – ABNT. ABNT NBR 8800:2008 Projeto de estrutura de aço e de estrutura mista de aço e concreto de edifícios. Rio de Janeiro.
- [3] Calenzani, A.F.G., Fakury, R.H., Paula, F.A., Rodrigues, F.C., Queiroz, G. & Pimenta, R.J., 2012. Rotational stiffness of continuous composite beams with sinusoidal-web profiles for torsional buckling. *Journal of Constructional Steel Research*, n.79, p. 22-33.
- [4] CEN, EN 1994-1-1:2004. Eurocode4: Design of composite steel and concrete structures - Part 1-1: general rules and rules for buildings. Bruxelas, Bélgica.
- [5] Chen, S. & Wang, X., 2012. Finite Element Analysis of Distortional Lateral Buckling of Continuous Composite Beams with Transverse Web Stiffeners. *Advances in Structural Engineering*, vol. 15, pp. 1607-1616.
- [6] Ng, M.L.H. & Ronagh, H.R., 2004. An analytical solution for the elastic lateral-distortional buckling of I-section beams. *Advances in Structural Engineering*, vol. 7, p. 189-200.
- [7] Oliveira, J.P.S., 2014. Determinação do momento crítico de flambagem lateral com distorção em vigas mistas contínuas de aço e concreto com perfis de alma senoidal. Dissertação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória.
- [8] Roik, K., Hanswille, G. & Kina, J., 1990. Solution for the lateral torsional buckling problem of composite beams. *Stahlbau*, n-59, 327 – 332 (em alemão).