

# Modal identification of Bridge 44 of the Carajás Railroad and numerical modeling using the finite element method

## *Identificação modal da Ponte 44 da Estrada de Ferro Carajás e modelagem numérica via método dos elementos finitos*

M. S. SILVA <sup>a</sup>

[marcelass\\_1505@yahoo.com.br](mailto:marcelass_1505@yahoo.com.br)  
<https://orcid.org/0000-0002-6834-9212>

F. A. NEVES <sup>a</sup>

[fassis@ufop.edu.br](mailto:fassis@ufop.edu.br)  
<https://orcid.org/0000-0003-2735-1751>

### Abstract

Regular use and the effects of time can affect the behavior of a structure. Over time, problems such as the occurrence of small fissures, oxidation of steel elements, and excessive displacements at some points may arise in a structure. In this context, the monitoring of structures through experimental tests has gained more importance, because it allows for the identification of the dynamic characteristics (natural frequencies, mode shapes, and damping rate) of structures. The dynamic characteristics can be obtained through forced vibration tests, which are based on measuring the response of a structure subjected to an excitation of known magnitude, or through tests in which only the structural response is measured, such as free vibration and ambient vibration tests. The present study aims to identify the modal parameters of bridge 44 of the Carajás Railroad, using experimental data obtained on site by monitoring the vibration caused by a group of people jumping, and it compares them with the results obtained through numerical modeling performed using the finite element method, developed in CSiBridge. The modal parameters were obtained using the commercial software ARTeMIS Modal, and stochastic subspace identification was used for modal identification.

**Keywords:** bridge, operational modal analysis, stochastic subspace identification, numerical modeling.

### Resumo

A utilização e os efeitos do tempo podem afetar o comportamento de uma estrutura. Problemas como pequenas fissuras, oxidação de elementos de aço e deslocamentos excessivos em alguns pontos poderão surgir. Nesse contexto, o monitoramento de estruturas por meio de ensaios experimentais ganhou mais importância, por permitir a identificação das suas características dinâmicas (frequências naturais, modos de vibração e taxa de amortecimento). Estas podem ser obtidas a partir de ensaios de vibração forçada, que se baseiam na medição da resposta da estrutura sujeita a uma excitação induzida com magnitude conhecida, ou a partir de ensaios em que apenas a resposta da estrutura é medida, como os ensaios de vibração livre e vibração ambiente. O presente trabalho tem como objetivo identificar os parâmetros modais da Ponte 44 da Estrada de Ferro Carajás, com base em dados experimentais obtidos "in loco" durante o monitoramento com vibração de caráter aleatório e compará-los com os resultados obtidos por meio da modelagem numérica via método dos elementos finitos, desenvolvido no CSiBridge. A obtenção dos parâmetros modais foi realizada no software comercial ARTeMIS Modal e o método de identificação modal utilizado foi de identificação estocástica em subespaço (SSI-UPC).

**Palavras-chave:** ponte, análise modal operacional, identificação estocástica de subespaço, modelagem numérica.

<sup>a</sup> Federal University of Ouro Preto, Department of Civil Engineering, Graduate Program in Civil Engineering, Ouro Preto, MG, Brazil.

## 1. Introdução

As condições de segurança das grandes estruturas de Engenharia Civil são normalmente analisadas desde as fases iniciais de projeto e construção, até eventuais fases posteriores ao término, a fim de verificar a necessidade de reabilitação ou reforço. Essas análises podem ser baseadas no desenvolvimento de modelos numéricos para análise estática e dinâmica fundamentados, em geral, em formulações de elementos finitos. A simulação do comportamento estrutural por meio de modelos numéricos é de grande importância, no entanto, nem sempre esse modelo representa com perfeição o comportamento real da estrutura, uma vez que a complexidade da estrutura real obriga que sejam realizadas algumas simplificações.

A fim de obter respostas mais concretas, as técnicas para identificação dos parâmetros modais (frequências naturais, modos de vibração e taxa de amortecimento) com base na realização de ensaios dinâmicos, surgem como uma ferramenta de grande interesse, por possibilitar à análise de correlação entre parâmetros identificados e calculados, contribuindo de maneira mais significativa para atualização e validação experimental dos modelos numéricos desenvolvidos e consequente avaliação da capacidade de carga efetiva das estruturas.

A estimativa dos parâmetros modais utilizando ensaios pode ser realizada de duas formas, sejam elas: a análise modal experimental e a análise modal operacional (OMA). No primeiro caso (também denominada de análise *input-output*), os parâmetros modais são estimados a partir da relação entre os dados de entrada (excitação aplicada) e dados de saída (resposta dinâmica). No OMA (denominada de *output-only*), a estimativa dos parâmetros modais é realizada somente com os dados de saída.

O OMA tem se mostrado eficiente e usual, principalmente para a validação e refinamento de modelos em elementos finitos, modificação de estruturas, detecção de falhas e análise de estruturas complexas. Neste contexto, foram feitas análises a partir da aquisição de dados utilizando o OMA, realizada na ponte 44, localizada sobre o Rio Martírio.

Este estudo surgiu de um projeto entre a Fapemig - Vale – Universidade Federal de Ouro Preto – Universidade Federal do Pará e tem como principais objetivos:

- Estimar as propriedades dinâmicas da ponte 44 da Estrada de Ferro Carajás, utilizando o *software* comercial Artemis Modal. Os dados experimentais medidos “in loco” foram obtidos a partir da estrutura submetida a vibrações com características aleatórias, através da análise operacional modal;
- Desenvolver um modelo numérico calibrado com os dados obtidos durante a monitoramento da ponte 44.

Durante a fase de pós processamento dos canais, alguns problemas foram identificados:

- i. Superamostragem dos dados obtidos: a maior frequência numérica obtida foi de 25 Hz, no entanto na fase de monitoramento a frequência de amostragem do ensaio foi de 500 Hz e o limite máximo do sinal reproduzido foi de 250 Hz (Frequência de Nyquist). Como a energia aplicada por pessoas saltando não foi suficiente para excitar os principais modos de flexão, os dados em excesso podem conter informações espúrias;

- ii. Alguns acelerômetros não funcionaram e foram descartados. Visando melhorar os resultados, várias análises foram realizadas tendo como base algumas referências, sejam elas: filtragem do sinal na fase de pós-processamento; alteração na quantidade de canais de projeção e ordem do modelo.

Os dados utilizados neste estudo foram cedidos pelo Núcleo de Instrumentação e Computação Aplicada à Engenharia (NICAE), grupo associado da Universidade Federal do Pará que tem trabalhado com análises vibracionais experimentais das pontes de concreto e aço da EF Carajás. Os autores não participaram do monitoramento, desse modo todas as informações referentes aos testes foram repassadas pela equipe. Na atualidade as estruturas são extremamente exigidas em relação ao seu desempenho e vida útil. Deste modo, o ramo da engenharia conhecido como Monitoramento de Integridade Estrutural ou SHM (*Structural Health Monitoring*) tem ganhado mais espaço e visibilidade. O SHM facilita a detecção de comportamentos estruturais incomuns que indicam mau funcionamento da estrutura, minimizando os custos de reparo e manutenção e proporcionando um maior nível de segurança aos usuários. Segundo Farrar *et al.* [1], o processo de detecção de danos utilizando SHM envolve a aquisição, validação e análise de dados. A seguir são citados, alguns estudos desenvolvidos nessa área que apontam para novas abordagens.

Lobato *et al.* [2] apresentaram os resultados de uma análise modal experimental e computacional de uma ponte ferroviária metálica sobre o rio Mearim (Maranhão). O objetivo do trabalho foi aferir os modelos numéricos utilizados na análise estrutural de um vão metálico, possibilitando a maior precisão nas simulações computacionais do comportamento estático e dinâmico da estrutura.

Sampaio *et al.* [3] identificaram os parâmetros modais de quatro pontes ferroviárias situadas no norte do Brasil. As pontes em concreto armado apresentam extensões médias e curtas, variando entre 9,50 e 25,00 m. As séries temporais foram obtidas utilizando diferentes fontes de excitação: vibração livre após a passagem do trem, vibração provocada por pessoas saltando, e vibração decorrente do equipamento *drop weight* sob condições ambientais. A identificação dos parâmetros modais foi realizada no *software* comercial Artemis® (SVS 2011). Por fim, os resultados experimentais foram comparados aos obtidos no modelo computacional.

Costa *et al.* [4] calibrou o modelo numérico de uma ponte ferroviária, a partir dos parâmetros modais estimados por meio de um ensaio de vibração ambiente.

Suleyman [5] desenvolveu um algoritmo para automatizar a identificação dinâmica de estruturas, utilizando o método da Identificação Estocástica em Subespaços. Em seguida, o autor utilizou este algoritmo para determinar os parâmetros modais da ponte ferroviária de São João.

## 2. Identificação Estocástica em Subespaços (SSI)

O SSI é o método baseado na análise de dados experimentais de séries temporais de resposta para realizar o ajuste do modelo, por isso é classificado como um método de identificação modal no domínio do tempo. Problemas dessa natureza

podem ser resolvidos por meio de dois métodos distintos, sejam eles: SSI-COV e SSI-DATA. O primeiro é baseado em um ajuste às funções de correlação da resposta do sistema, enquanto o segundo implica no ajuste direto às séries de resposta do sistema (SSI-DATA) (Rodrigues, [6]).

### 2.1 Descrição do método

Para a identificação de sistemas estocásticos, aqueles em que os dados de entrada apresentam magnitude desconhecida (aleatória), admite-se que a excitação tem característica de um sinal de ruído branco, com média zero. Essa condição precisa ser atendida, para que as formulações apresentadas adiante tenham validade.

De acordo com Van Overschee et al. [7], os algoritmos SSI calculam modelos de estado de espaço a partir dos dados de saída. A Figura 1 apresenta um sistema estocástico (output-only), linear e invariante no tempo, com dados de saída  $y_k$ , estados  $x_k$ , descrito pelas matrizes A e C. Os dados aleatórios (desconhecidos) de entrada e saída são representados, respectivamente, por  $w_k$  e  $v_k$ . O símbolo  $\Delta$  representa um delay.

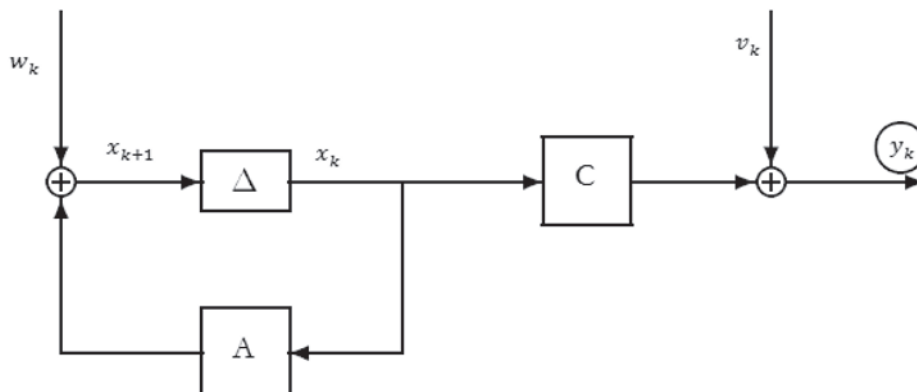
Seguindo a abordagem utilizada por *Subspace Identification for Linear Systems: Theory, implementation, applications* van Overschee et al. [7] e Peeters [8], o modelo de espaço de estados puramente estocástico é descrito pelo conjunto de equações:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + w_k \\ y_k &= Cx_k + v_k \end{aligned} \quad (1)$$

Em que  $y_k$  é vetor que aloca as medições no instante k dos l canais de saída do processo. O vetor  $x_k \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado do processo no instante de tempo discreto k e contém os valores numéricos dos n estados, por fim  $v_k \in \mathbb{R}^l$  e  $w_k \in \mathbb{R}^n$  são sinais vetoriais incomensuráveis (isto é, ruído do processo e imprecisões do sensor). Admite-se que eles apresentem média zero, estacionária, e sequências de vetores de ruído branco.

A matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é denominada matriz do sistema de ordem n, a qual descreve a dinâmica do sistema.  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$  é a matriz referente aos dados de saída, a qual descreve como o estado interno é transferido para o externo nas medidas  $y_k \in \mathbb{R}^l$ .

Supondo-se o sistema estocástico como estacionário, tem-se:



**Figura 1** Representação de um sistema puramente estocástico (Adaptado de Van Overschee et al. [7])

$$\begin{aligned} E[x_k] &= 0 \\ E[x_k(x_k)^T] &= \Sigma \end{aligned} \quad (2)$$

Onde  $\Sigma$  representa a matriz de covariância de estado (também denominada de matriz de covariância), independente do tempo k. Após algumas manipulações algébricas, chega-se às equações:

$$\begin{aligned} \Sigma &= A\Sigma A^T + Q \\ \Lambda_i &= C\Sigma C^T + R \\ G &= A\Sigma C^T + S \end{aligned} \quad (3)$$

Formadas pelas matrizes do sistema (A e C), matrizes de covariância dos ruídos ( $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$  e  $S \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ), matriz de covariância de resposta ( $\Lambda_i$ ) e matriz de covariância entre os vetores de estado no instante k+1, e a resposta no instante k (G). A partir do conjunto de equações (3), é possível estabelecer a igualdade:

$$\Lambda_i = CA^{i-1}G \quad (4)$$

Há duas formas distintas para a determinação das matrizes do sistema (A e C), que foram anteriormente definidas pelas Equações (1) – (4), que dão início aos métodos SSI-COV e SSI-DATA.

No presente estudo foi utilizado apenas o SSI-DATA, nesse sentido, alguns fundamentos teóricos sobre o método e suas formulações são apresentados a seguir.

### 2.2 SSI-DATA

O método SSI é usado para identificar as matrizes do sistema, A e C, a partir das medições de saída do sistema,  $y_k$ . Seguindo a abordagem utilizada por Van Overschee et al. [7] e Weng et al. [9], os procedimentos a seguir mostram as etapas para o cálculo das matrizes do sistema.

1. Utilizando os dados de saída (medidos)  $y_k$ , a matriz de Hankel (Y) é construída por:

$$O \quad Y = \begin{bmatrix} y_0 & y_1 & \dots & y_{N-1} \\ y_1 & y_2 & \dots & y_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{i-1} & y_i & \dots & y_{i+N-2} \\ y_i & y_{i+1} & \dots & y_{i+N-1} \\ y_{i+1} & y_{i+2} & \dots & y_{i+N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{2i-1} & y_{2i} & \dots & y_{2i+N-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_p \\ Y_f \end{bmatrix} \quad (5)$$

Onde  $i$  é um índice definido pelo usuário, correspondente ao número de blocos de linhas, este deve ser maior que a ordem  $n$  do sistema. Uma vez que cada bloco de linha apresente  $l$  linhas (número de canais de saída), a matriz  $Y$  deve conter  $2li$  linhas.  $N$  corresponde ao número de colunas da matriz de Hankel. Para assegurar que todas as amostras de tempo do vetor de saída preencham essa matriz, o valor de  $N$  deve ser igual a  $s - 2i + 1$ .

2. Calcula-se então a projeção ortogonal ( $P$ ) das séries de resposta do “futuro”  $Y_f$  no espaço das séries de resposta do “passado”  $Y_p$ , de acordo com a equação:

$$P = Y_f/Y_p = Y_f Y_p^T (Y_p Y_p^T)^{\dagger} Y_p \quad (6)$$

Onde  $\bullet^{\dagger}$  é a matriz pseudo-inversa (Moore-Penrose) de  $\bullet$ . Os produtos  $Y_f Y_p^T$  e  $Y_p Y_p^T$  são matrizes de Toeplitz das funções de correlação da resposta. No entanto, a equação (6) é apenas a definição da projeção ortogonal de espaços  $P$ , pois através dela não é possível obter a indicação da forma como essa projeção é calculada no método SSI-DATA (Rodrigues [6]). Desse modo, a projeção ortogonal para o método SSI-DATA é calculada por meio da decomposição QR.

3. A decomposição em valores singulares (SVD<sup>1</sup>) da projeção ortogonal ( $P$ ) é então executada. Neste caso é usada para decompor a projeção ortogonal da matriz de Hankel:

$$P = USV^T \quad (7)$$

4. A ordem  $n$  do sistema é determinada a partir da inspeção do posto da matriz  $S$  (número de valores singulares não-nulos) e particionando o SVD de maneira a obter  $U_1$  e  $S_1$ :

$$USV^T = (U_1 \ U_2) \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix} \quad (8)$$

5. A matriz de observabilidade estendida ( $\Gamma_i$ ) pode ser calculada por:

$$\Gamma_i = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{l-1} \end{bmatrix} \quad (9)$$

6. A matriz de estados  $A$  do sistema é calculada a partir da  $\Gamma_i$ , de acordo com:

$$A = \underline{\Gamma}_i^{\dagger} \bar{\Gamma}_i \quad (10)$$

Onde  $\underline{\Gamma}_i \in \mathbb{R}^{l(i-1) \times n}$  significa  $\Gamma_i$  sem as últimas  $l$  linhas (número de canais) e  $\bar{\Gamma}_i \in \mathbb{R}^{l(i-1) \times n}$  significa  $\Gamma_i$  sem as primeiras  $l$  linhas.

7. A matriz  $C$  pode ser determinada a partir das primeiras  $l$  linhas de  $\Gamma_i$  conforme mostrado na Equação 9.

Após a determinação das matrizes de estado ( $A$  e  $C$ ), por meio do método SSI-DATA, os parâmetros modais (frequências naturais  $\omega_i$ , modos de vibração  $\phi_i$  e as taxas de amortecimento  $\xi_i$ ) do sistema dinâmico são determinados. Este cálculo ocorre a partir da extração dos autovalores  $\mu_i$  e autovetores  $\psi_i$  de  $A$ , porém como o cálculo destes autovalores  $\mu_i$  ocorre para um tempo discreto (com passos de tempo  $\Delta_t$ ), é

necessário fazer uma transformação para o tempo contínuo. 8. Os autovalores de  $A$  no tempo contínuo ( $\lambda_i$ ) são calculados por:

$$\lambda_i = \frac{\ln(\mu_i)}{\Delta_t} \quad (11)$$

Em que os autovalores ( $\mu_i$  ou  $\lambda_i$ ) de  $A$ , também denominados de polos, são números complexos que aparecem em pares conjugados. As frequências naturais são os módulos (amplitudes dos vetores no plano imaginário-real) dos polos de  $A$ :

$$\omega_i = |\lambda_i| = \sqrt{\text{Im}(\lambda_i)^2 + \text{Re}(\lambda_i)^2} \text{ (rad/s)}, \quad (12a)$$

$$f_i = \frac{\omega_i}{2\pi} \text{ (Hz)}, \quad (12b)$$

Onde  $\text{Im}(\blacksquare)$  representa a parte imaginária e  $\text{Re}(\blacksquare)$  a parte real de  $\blacksquare$ . Assim, calculam-se as taxas de amortecimento:

$$\xi_i = \frac{-\text{Re}(\lambda_i)}{|\lambda_i|} \cdot 100 \text{ (%)} \quad (13)$$

Os modos de vibração  $\phi_i$  são obtidos a partir da multiplicação da matriz  $C$  pelos autovetores ( $\psi_i$ ) de  $A$ :

$$\phi_i = C\psi_i \quad (14)$$

Desse modo, os parâmetros modais do sistema estão calculados para os vários modos identificados. O número de modos obtidos é igual ao número de autovalores de  $A$  que tenham par conjugado e com componente imaginária positiva. Por esse motivo, como esta matriz é da ordem  $n$  (ordem do modelo), conclui-se que, no máximo,  $n/2$  modos poderão ser identificados.

### 2.3 Diagrama de estabilização

Até o presente momento, nenhuma análise foi feita em relação a ordem  $n$  que o modelo de espaço de estados deve ter para que a identificação dos parâmetros dinâmicos do sistema seja feita de maneira eficiente. Essa análise constitui um dos aspectos mais importantes nos métodos paramétricos de identificação modal, pois interfere diretamente na qualidade e autenticidade dos modos identificados.

A ordem  $n$  do modelo deve ser pelo menos duas vezes maior que o número de modos (ou polos) esperados, uma vez que estes aparecem em pares complexos conjugados (cada par corresponde a um modo calculado). Inicialmente, não é possível mensurar o número de modos físicos somente por meio dos dados experimentais, pois esse é um dos resultados da análise de identificação modal. Portanto, para auxiliar na definição da ordem  $n$  apropriada, existem alguns procedimentos através dos quais modelos de diferentes ordens são estimados e comparados, com base em critérios de qualidade, tais como: o critério informativo de Akaike (AIC); o erro de predição final (FPE) de Akaike; ou o comprimento descritivo mínimo (MDL) de Rissanen (Peeters [8]; Andersen *et al.* [10]; Ljung [11]). Esses critérios, que na verdade são medidas do erro dos modelos paramétricos, demonstram que, à medida que a ordem do modelo aumenta, o erro tende a diminuir a uma certa ordem na qual ele se torna assintótico, ou seja, não há aumento

<sup>1</sup> SVD é uma ferramenta de fatoração usada para matrizes reais ou complexas retangulares.



significativo com o aumento da ordem dos modelos. Portanto, a ordem para a qual ocorre o início da variação assintótica do erro é indicada para representar o sistema.

Embora seja possível utilizar os critérios de erro supracitados, para auxiliar na escolha da ordem do modelo a ser identificado, na prática verifica-se que nem sempre a sua utilização é muito fácil. Além disso, sabe-se que a identificação modal tem como objetivo estimar as características modais do sistema estrutural e não do próprio modelo desse sistema, expresso através das matrizes de estado **A** e **C**. Desse modo, para a análise de identificação modal com modelos paramétricos (domínio do tempo) surgiu nova ferramenta, chamada de diagrama de estabilização, que apresenta maior utilidade prática do que as referidas anteriormente.

Segundo Rodrigues [6], o diagrama de estabilização reúne os resultados da identificação para diversas ordens de modelos do mesmo sistema. Nele o eixo das abscissas representa as frequências dos modos e o eixo das ordenadas representa a ordem do modelo usado para a identificação. Para construí-lo os polos de um modelo de determinada ordem são comparados com os polos de um modelo de ordem próxima. Se a diferença entre esses polos não exceder determinados limites pré-definidos em termos de frequência, taxa de amortecimento e componentes modais, o polo é considerado com sendo estável, caso contrário o polo é instável. Verifica-se que os modos próprios do sistema, ou seja, aqueles que apresentam maiores amplitudes de vibração e conseqüentemente maior facilidade para ser excitados, estabilizam para modelos de ordem mais baixa. Por outro lado, os modos pouco excitados, aqueles que apresentam amplitudes quase da mesma ordem dos ruídos, só estabilizam para ordens mais elevadas. Portanto, é conveniente considerar modelos de ordem elevada, para que seja possível identificar modos pouco excitados que estão pouco evidentes nas respostas medidas experimentalmente.

## 2.4 Canais de projeção

De acordo com Herlufsen *et al.* [12], quando muitos sensores são medidos simultaneamente, há a estimativa de muitos modos es-

púrios, em comparação com o número de modos físicos do sistema durante o ajuste do modelo paramétrico. Isso ocorre, pois muitos canais apresentam a mesma informação física, porém diferentes erros aleatórios. Uma forma de reduzir a quantidade de modos espúrios é reduzir o número de canais durante o processo de aquisição de dados, sem que haja perdas de informações dos modos físicos e a representatividade do sistema.

Os canais de projeção são utilizados com o intuito de diminuir a quantidade de informação redundante, e conseqüentemente, os modelos estimados tendem a estabilizar-se mais rapidamente. A escolha dos canais de projeção tem início com a seleção do canal que mais se correlaciona com os demais, no caso de conjuntos de arranjos, os canais de referência (canais comuns a todos os arranjos) são utilizados como canais de projeção iniciais (Sampaio [3]). A não utilização destes pode fazer com que alguns modos sejam detectados como ruído (Nguyen [13]).

Uma descrição do método pode ser encontrada em Herlufsen *et al.* [12].

## 2.5 Complexidade modal

A representação gráfica no plano complexo (plano de Argand) para um determinado modo identificado é dado pela representação vetorial das componentes desse modo. Isso significa que quanto maior os valores das componentes imaginárias (representadas no plano fora do eixo horizontal, eixo real) maior é a tendência de ocorrer um modo não físico.

Na seção 4, referente aos resultados, são mostrados dois gráficos, um referente a um modo real e outro referente a um modo complexo.

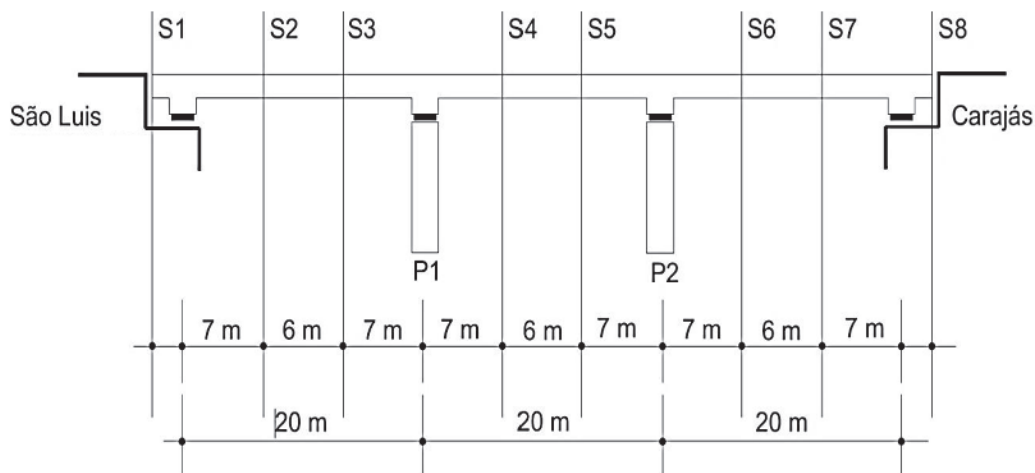
## 3. Estudo de caso: Ponte 44 sobre o Rio Martírio

O objeto deste estudo é a ponte 44 da Estrada de Ferro Carajás, apresentada na Figura 2. Ela está situada no km 615+500, no município de São Luís, sobre o Rio Martírio.



Figura 2

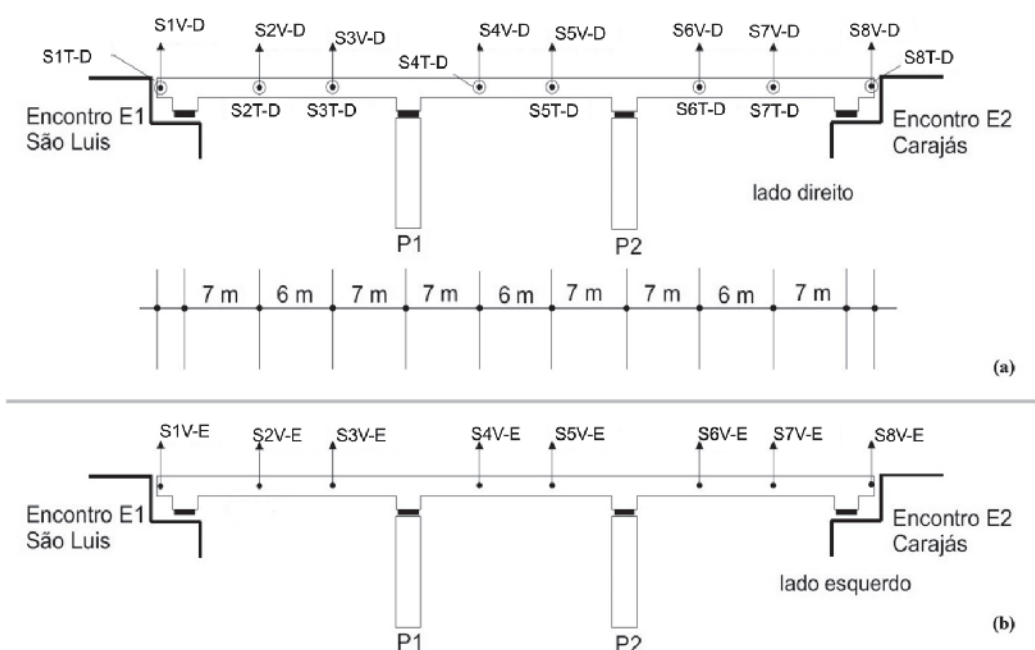
Vista do tabuleiro da ponte sobre o Rio Martírio (b) Visão global da ponte (Rodrigues Júnior *et al.* [14])



**Figura 3**  
Seções adotadas no ensaio

Esta ponte, construída em concreto armado, tem extensão total de 60,00 m, constituída por três vãos de 20,00 m cada. A superestrutura é composta por duas vigas principais (longarinas) e vigas transversais distribuídas a cada 5,00 m no vão do tabuleiro. As longarinas e o tabuleiro formam um sistema estrutural contínuo simplesmente apoiado sobre aparelhos de apoio de neoprene fretado. O tabuleiro possui largura total de 5,85 metros.

A mesoestrutura é formada por pilares isolados de seção retangular de 1,20 x 2,80 metros e altura de 10,00 metros (P1 e P2), assentados sobre blocos de coroamento em concreto armado sobre tubulões. Os tubulões apresentam fuste 1,40 metros de diâmetro, com base alargada de 2,90 metros que constituem a infraestrutura da ponte. Os taludes dos aterros junto aos encontros da ponte são protegidos por vegetação rasteira.



**Figura 4**  
(a) Disposição dos acelerômetros no lado direito da superestrutura (b) Disposição dos acelerômetros no lado esquerdo da superestrutura. Em que  $S_n$  representa a seção a qual o acelerômetro está posicionado,  $n$  corresponde ao número da seção,  $V$  a direção vertical,  $T$  a direção transversal,  $D$  o lado direito e  $E$  o lado esquerdo

## 4. Metodologia do ensaio de vibração

A fase que antecedeu o ensaio de vibração *in loco* foi o desenvolvimento de um modelo numérico via método dos elementos finitos, no *software* comercial CSiBridge [15]. Para tal, foram utilizadas as propriedades geométricas e mecânicas dos elementos estruturais, obtidos a partir dos projetos originais da estrutura. Após idealizadas todas as ações atuantes, foi possível simular o comportamento da estrutura e assim identificar o valor aproximado das frequências naturais e os modos de vibração.

Para a medição das vibrações do tabuleiro da ponte, 24 acelerômetros piezoelétricos de baixa frequência (Wilcoxon® modelo 793L), com resposta de frequência entre 0,20 e 2300 Hz e sensibilidade de 500 mV/g, foram dispostos em locais selecionados (seções) para medir a aceleração nas direções vertical e transversal. A frequência de amostragem utilizada foi de 500 Hz.

Os acelerômetros foram posicionados a 1/3 e a 2/3 do vão, em concordância com a ABNT NBR [15] 15307:2006 (Ensaio não destrutivo – Provas de cargas dinâmicas em grandes estruturas – Procedimento) e considerando as configurações modais obtidas a partir do modelo numérico. A estrutura foi dividida em oito seções, de acordo com a Figura 3, e a distribuição dos acelerômetros ao longo do tabuleiro da ponte, está ilustrado na Figura 4 (a) e (b).

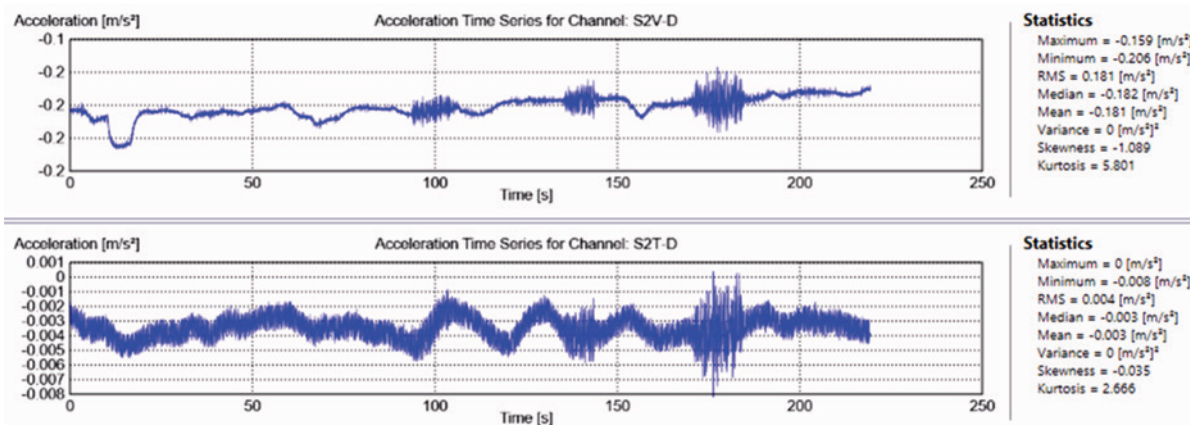
Na a fase de aquisição dos dados, foram realizados: posicionamento e fixação dos acelerômetros de acordo com as seções, conexão dos acelerômetros ao equipamento de aquisição (LYNX® ADS-2000) por meio de cabos, e configuração dos parâmetros do ensaio (frequência de amostragem e duração do ensaio) no *software* comercial AqDados 7 [17a].

A estrutura foi submetida a três tipos de excitação: (i) vibração ambiente (sob a ação do vento), (ii) excitação durante a passagem de trens carregados e descarregados, e (iii) excitação com características aleatórias introduzidas por pessoas saltando, em cada um dos vãos. As séries temporais referentes à passagem do trem carregado foram utilizadas apenas para medir a aceleração da estrutura, uma vez que estudos anteriores demonstraram que o uso destes não gera resultados confiáveis das características dinâmicas da ponte, pois a massa do trem carregado pode influen-

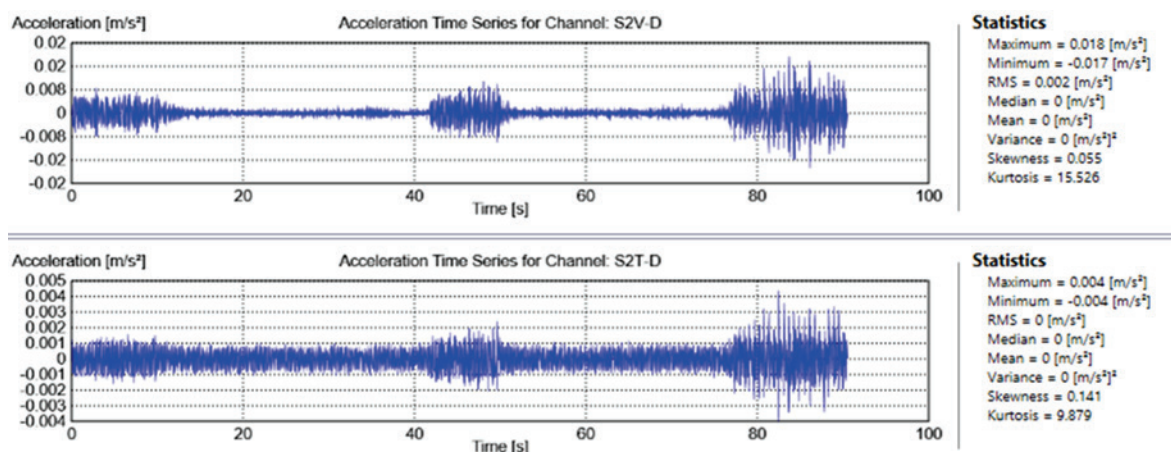
ciar nas características dinâmicas da estrutura durante os testes (Lobato, [2]). Quando essas séries temporais são utilizadas, as características dinâmicas têm dificuldade de se estabilizar durante a criação dos diagramas de estabilização (Lobato [2]). As séries temporais referentes ao vento não foram suficientes para excitar a estrutura. Portanto, os sinais utilizados para realizar o OMA, por meio do *software* comercial ARTeMIS Modal [18], foram aqueles referentes às vibrações decorrentes do salto de pessoas, em cada vão da estrutura, de maneira não concomitante. O ensaio teve duração de 03 minutos e 39 segundos e foi realizado com frequência de amostragem de 500 Hz. A Figura 5 ilustra as séries temporais obtidas para os acelerômetros S2V-D e S2T-D durante o monitoramento.

As séries temporais apresentadas na Figura 5 não foram pós-processadas, porém foi verificado que todos os sinais exibiam uma tendência característica de sinais espúrios nos instantes iniciais e finais do monitoramento. Para melhorar a qualidade dos sinais aquisitados, o *software* AqDAnalysis 7 [17b] foi utilizado para realizar o pós-processamento, sendo assim, todas as séries temporais foram filtradas numericamente por um filtro passa alta de 0,2 Hz e ordem 5. Nesse tipo de filtro, uma frequência de corte é definida, frequências até esse valor sofrem atenuação infinita, enquanto frequências superiores a ela sofrem atenuação nula. A frequência de corte de 0,20 Hz foi escolhida para aumentar a precisão do ensaio, pois a resposta em frequência do acelerômetro utilizado foi de 0,2 a 2300 Hz. Outra técnica de pós-processamento de sinal utilizada foi o corte nos trechos inicial e final do monitoramento, a fim de utilizar apenas os trechos que apresentaram energia concentrada. A duração após o corte foi de 1 minuto e 35 segundos. A Figura 6 ilustra as séries temporais dos mesmos acelerômetros apresentados na Figura 5 após essas intervenções.

A partir da análise nas séries temporais apresentadas nas Figuras 5 e 6, foi verificado que o filtro passa alta e o corte na duração do monitoramento teve uma influência positiva nos sinais, pois eliminou frequências espúrias inferiores a 0,2 Hz e considerou apenas os trechos em que houve excitação. Mesmo após as intervenções, 6 canais não apresentaram melhora e foram descartados, sejam eles: S1V-E, S2V-E, S3V-D, S4V-E, S8V-E, S8T-D.



**Figura 5**  
Séries temporais dos acelerômetros S2V-D, S2T-D



**Figura 6**  
Séries temporais dos acelerômetros S2V-D, S2T-D após a utilização do filtro passa alta

A partir dos sinais coletados e pós-processados, foi realizada a identificação dos parâmetros modais utilizando o *software* comercial ARTeMIS Modal. Para isso, foram realizados dois testes:

- Caso I: foram utilizados 21 canais ativos, sendo descartados os 6 canais citados acima;
- Caso II: foram utilizados 14 canais ativos. Seis acelerômetros que não funcionaram e todos os acelerômetros transversais foram descartados.

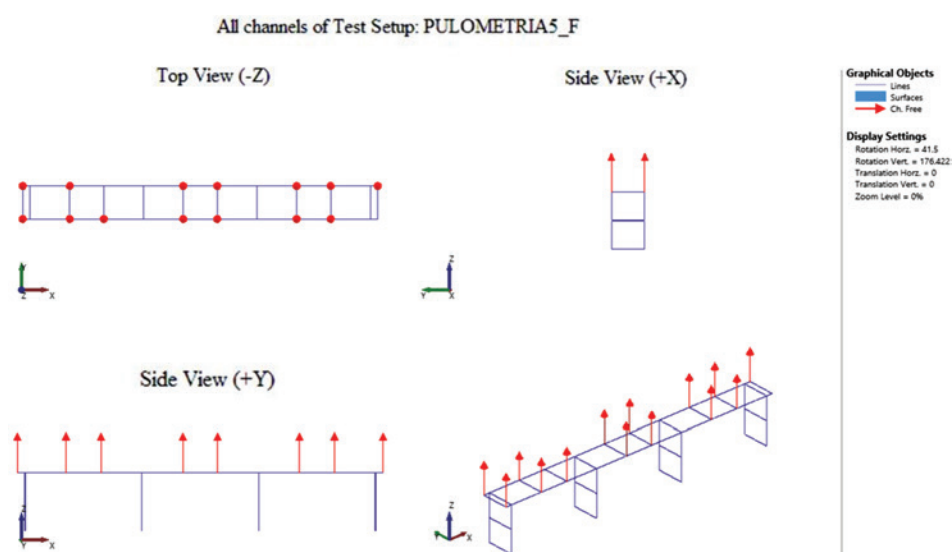
Para o Caso I, em que foram utilizados 21 canais ativos, os resultados obtidos foram aquém do esperado, haja vista que a quantidade de modos instáveis foi superior à de modos estáveis. Isso pode ter ocorrido em virtude dos trechos em que não havia energia concentrada, que foram considerados no monitoramento. Visando melhorar os resultados, descartou-se os 06 acelerômetros que não funcionaram e os acelerômetros transversais, uma vez o

tipo de excitação aplicado na estrutura foi essencialmente vertical, logo os modos transversais não foram devidamente excitados.

Os resultados apresentados na seção 4 são referentes apenas às análises realizadas para o Caso II, acima descrito.

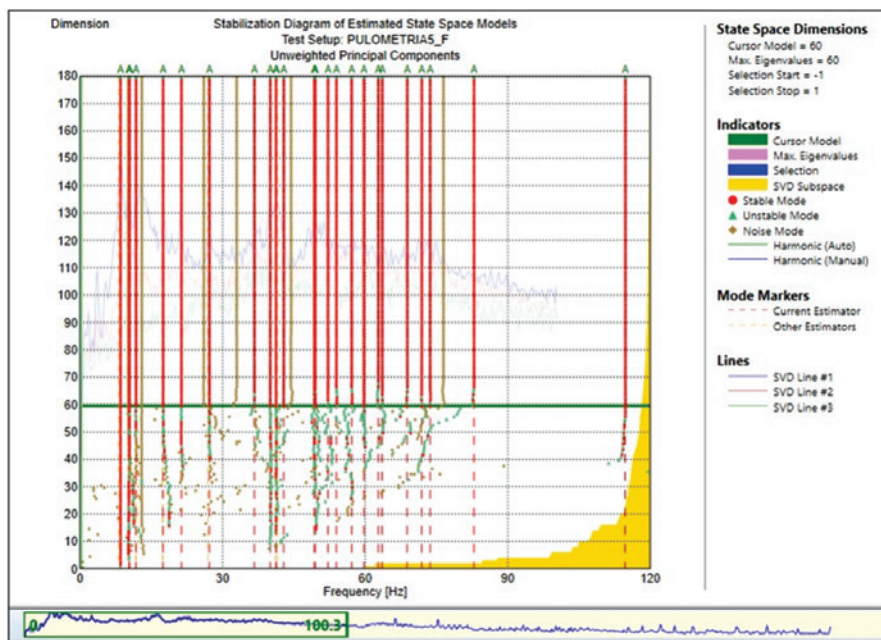
## 5. Resultados

A Figura 7 ilustra a ponte em estudo modelada no software ARTeMIS Modal [18]. As setas verticais ilustram os acelerômetros. As propriedades dinâmicas da ponte foram obtidas automaticamente pelo ARTeMIS Modal [18], a partir do método de identificação estocástica em subespaço com a componente principal não-ponderada (SSI-UPC - *Stochastic Subspace Identification – Unweighted Principal Component*). O uso dos canais de projeção na estimativa desses parâmetros é muito importante devido ao



**Figura 7**  
Representação da OAE 44 no ARTeMIS Modal [18]





**Figura 8**  
Diagrama de estabilização de polos utilizando 3 canais de projeção, 180 como ordem do modelo e frequência de amostragem de 500 amostras/segundo

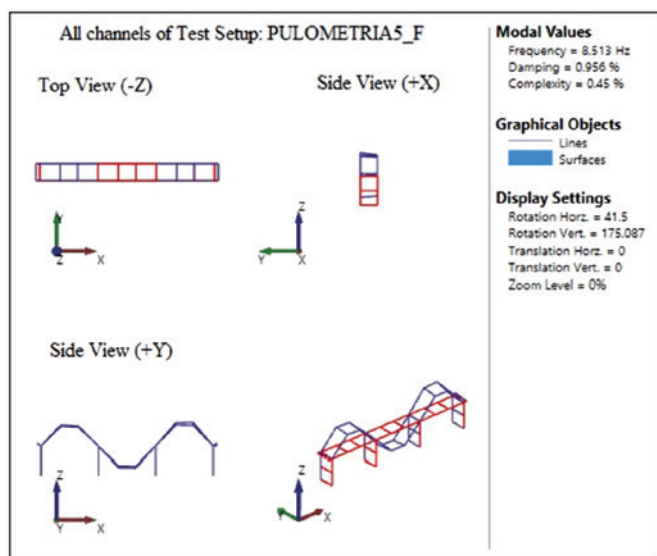
número de canais presentes no ensaio. Nesse sentido, algumas análises foram realizadas, nas quais o número de canais de projeção e a ordem do modelo foram alterados; no entanto, antes de apresentá-las, é necessário descrever algumas características do *software* utilizado. A ordem do modelo padrão utilizada pelo ARTeMIS Modal [18] é 100, porém esta ordem pode ser alterada pelo usuário. A utilização ou não de canais de projeção fica a critério do usuário, assim como a quantidade. Entretanto, a escolha dos canais é feita automaticamente pelo ARTeMIS Modal [18], que seleciona, primeiramente, os canais que apresentam maior correlação em relação aos demais canais, para o caso de haver mais de um setup<sup>2</sup>, os acelerômetros de referência<sup>3</sup> são tomados como canais de projeção inicialmente. O número de canais pode ser determinado de forma manual ou automática. Para visualizar a influência dos canais de projeção na estimativa dos parâmetros modais, na primeira análise, a ordem do modelo

foi considerada igual a 100 e apenas a quantidade de canais de projeção foi modificada (três, quatro ou seis). Nessa primeira análise, verificou-se que o diagrama de estabilização que apresentou menor quantidade de modos instáveis foi o referente a três canais de projeção. Na segunda análise, a ordem do modelo foi variada para as diferentes quantidades de canais de projeção. Desse modo, os resultados foram analisados considerando as ordens do modelo igual a 160 e 180 e variando as quantidades dos canais de projeção (três, quatro e seis). A comparação dos resultados obtidos mostrou que a análise que considerou o conjunto ordem do modelo igual a 180 e três canais de projeção obteve os melhores resultados. Isso porque, nessa análise houve uma redução no número de modos instáveis no diagrama de estabilização e a determinação de modos com frequências mais baixas, conforme ilustra a Figura 8. Como as frequências estimadas pelo método

**Tabela 1**  
Frequências e fatores de amortecimento extraídos da análise modal experimental

Frequência [Hz]	Desvio padrão frequência [Hz]	Amortecimento [%]	Desvio padrão amortecimento [%]	Complexidade [%]	Tipo de modo
8,513	0,003	0,956	0,069	0,450	Flexão vertical
10,290	0,042	2,626	0,294	20,535	Flexão vertical e torção
11,763	0,006	4,421	0,084	24,573	Flexão vertical e torção
17,47	0,002	2,422	0,040	26,844	Flexão vertical e torção

<sup>2</sup> Setup: corresponde ao posicionamento dos acelerômetros.  
<sup>3</sup> Acelerômetros de referência são aqueles que se repetem quando há mais de um setup.

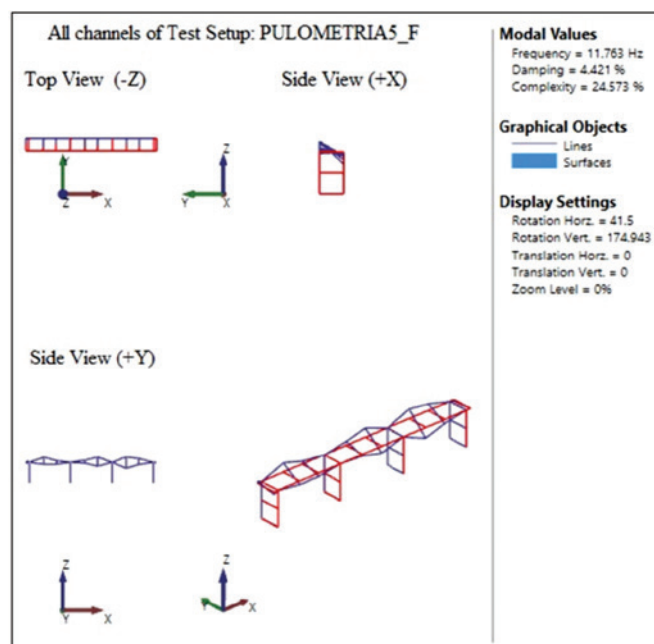


**Figura 9**

Modo de flexão vertical obtido pelo método SSI-UPC no ARTeMIS Modal [18]

SSI-UPC são <100 Hz, o espectro foi ampliado visando ilustrar com maior clareza os modos estimados.

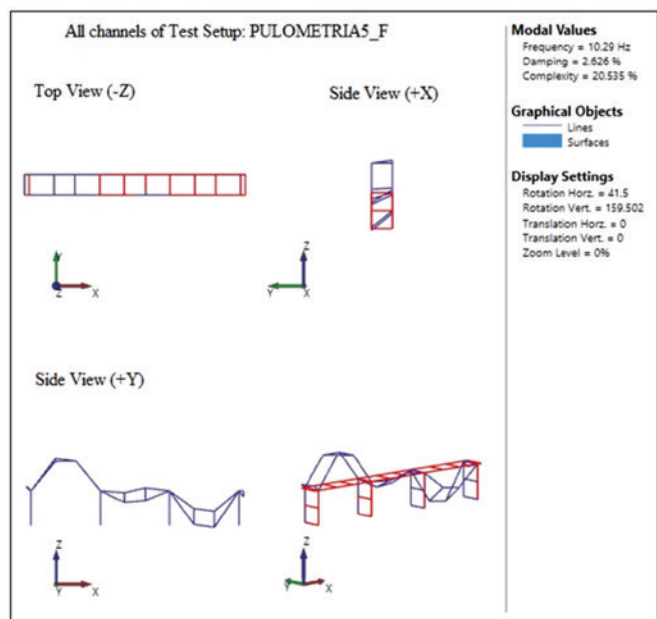
A Tabela 1 apresenta as frequências naturais mais significativas obtidas pelo método. Nos casos em que as frequências foram muitas próximas e as configurações modais semelhantes, optou-se por apresentar a que apresentou a menor complexidade modal.



**Figura 11**

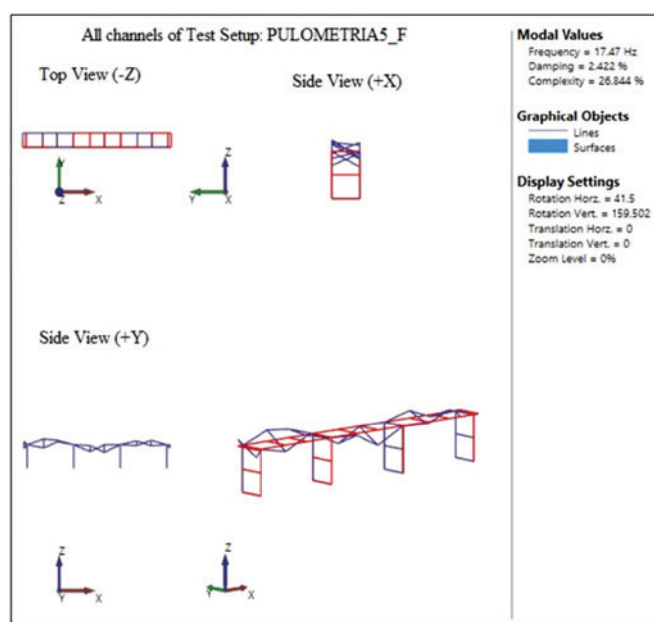
Modo de flexão vertical e torção obtido pelo método SSI-UPC no ARTeMIS Modal [18]

As Figuras 9 a 12 mostram os modos com formas modais bem definidas, isto é, aquelas que podem corresponder aos modos reais da estrutura e as suas respectivas frequências naturais.



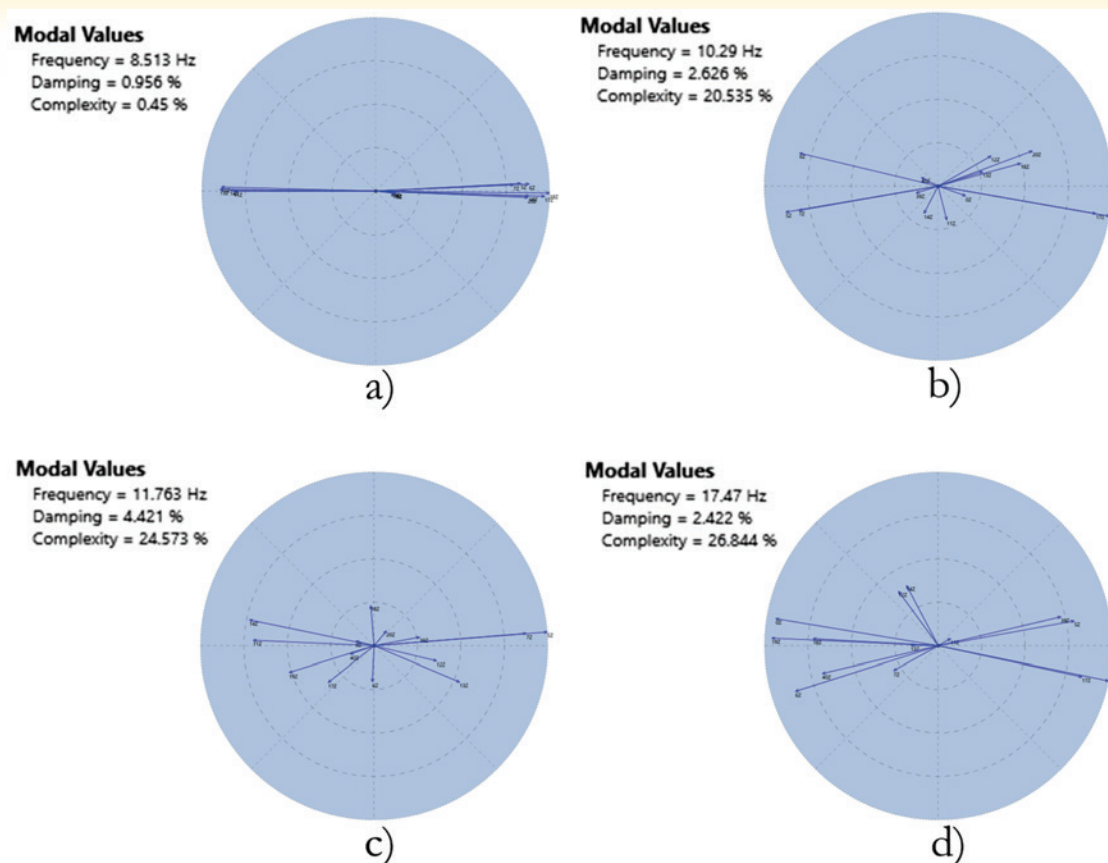
**Figura 10**

Modo de flexão vertical e torção obtido pelo método SSI-UPC no ARTeMIS Modal [18]



**Figura 12**

Modo de flexão vertical e torção obtido pelo método SSI-UPC no ARTeMIS Modal. [18]



**Figura 13** Complexidade modal referente (a) modo 1  $f = 8,513$  Hz, (b) modo 2  $f = 10,29$  Hz, (c) modo 3  $f = 11,763$ , (d) modo 4  $f = 17,47$  Hz

As Figuras 9 a 12 e a Tabela 1 mostram que entre os modos obtidos, poucos representavam modos físicos. Isso pôde ser verificado a partir do parâmetro de complexidade modal, que mostrou que apenas o primeiro modo, com frequência de 8,513 Hz, apresentou baixa complexidade modal. Os demais podem ser considerados modos complexos. As Figuras 13a-d ilustram os gráficos de complexidade para os modos estimados.

Apesar da sofisticação do método utilizado para identificar os parâmetros modais, apenas o primeiro apresentou um modo físico (real). Isso pode ter ocorrido em virtude:

- i. da limitação na forma que a fonte de excitação foi aplicada na estrutura, provocada por um grupo de pessoas pulando em cada tramo da viga contínua (de forma não concomitante);
- ii. da energia contida na fonte de excitação; e
- iii. do número insuficiente de pontos medidos, uma vez que alguns acelerômetros verticais não funcionaram e foram descartados da análise.

## 6. Modelo Numérico

Para a caracterizar o comportamento dinâmico de uma estrutura, é necessário que haja a adequada idealização das ações atuantes, o conhecimento das propriedades geométricas e mecânicas dos elementos estruturais constituintes, e um modelo numérico que permita obter de maneira rigorosa, as principais características da resposta da estrutura, em função das características de

**Tabela 2**

Valores das rigidezes de apoio das extremidades e dos pilares

Rigidezes dos aparelhos de apoio das extremidades		
Direção	Rigidez	Unidade
Axial (direção y)	3413837,56	(kN/m)
Cisalhamento em x	2949,66	(kN/m)
Cisalhamento em z	2949,66	(kN/m)
Rotação em torno de y	0,00	(kN.m/rad)
Rotação em torno de x	0,00	(kN.m/rad)
Rotação em torno de z	9290,35	(kN.m/rad)
Rigidezes dos aparelhos de apoio dos pilares		
Direção	Rigidez	Unidade
Axial (direção y)	20264475,64	(kN/m)
Cisalhamento em x	7163,45	(kN/m)
Cisalhamento em z	7163,45	(kN/m)
Rotação em torno de y	0,00	(kN.m/rad)
Rotação em torno de x	0,00	(kN.m/rad)
Rotação em torno de z	137020,54	(kN.m/rad)

**Tabela 3**

Valores das rigidezes do solo  
(Rodrigues Junior *et al.* [14])

Bloco 1		
z (m)	Kh (kN/m)	Kv (kN/m)
0,00	10452	14419
19,00	211127	339083
Shear in z	2949.66	(kN/m)
Bloco 2 (Pilar 1)		
z (m)	Kh (kN/m)	Kv (kN/m)
0,00	13947	20983
10,00	275867	555676
Shear in z	2949.66	(kN/m)
Bloco 3 (Pilar 2)		
z (m)	Kh (kN/m)	Kv (kN/m)
0,00	13947	20983
10,00	275867	555676
Shear in z	2949.66	(kN/m)
Bloco 4		
z (m)	Kh (kN/m)	Kv (kN/m)
0,00	10452	14419
19,00	211127	339083
Shear in z	2949.66	(kN/m)

excitação. A definição do modelo numérico depende da rigidez e da massa da estrutura simulada.

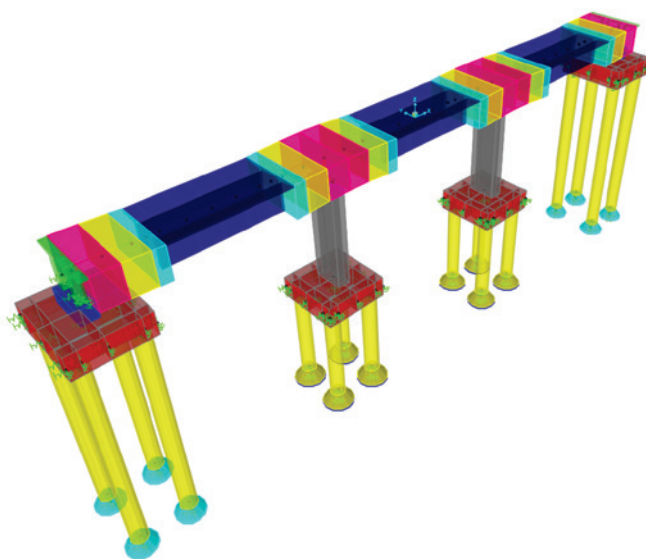
Um modelo numérico foi desenvolvido no *software* CSiBridge [16] com o objetivo de determinar as frequências naturais e suas respectivas formas modais.

No modelo numérico, a superestrutura, a mesoestrutura e parte da infraestrutura (tubulões) foram representadas por elementos de barra (*frame*). Os blocos de fundação foram modelados como elementos de casca (*shell*). Como os pilares e a superestrutura foram modelados dessa forma, foi necessário utilizar elementos rígidos (*links*) para conectar os diferentes elementos (longarinas com os

**Tabela 4**

Valores dos módulos de elasticidade do concreto  
(Rodrigues Junior *et al.* [14])

Elemento	Módulo de elasticidade (GPa)
Encontro E1 CP01	31,986
Encontro E1 CP02	28,948
Pilar P1 CP01	35,071
Pilar P1 CP02	34,113
Bloco B2 CP01	33,234
Bloco B2 CP02	30,250
Longarina CP01	36,551
Longarina CP02	37,576
Média superestrutura	35,828
Média infraestrutura	31,1045

**Figura 14**

Variação das seções dos elementos da estrutura, modelada no *software* CSiBridge [16]

pilares, pilares com os blocos de fundação e blocos de fundação com os tubulões), para preservar a correta geometria da estrutura. Elementos de mola (*springs*) foram colocados no topo dos pilares para simular o aparelho de apoio, e nos elementos da infraestrutura (blocos de fundação, topo e base dos tubulões) para representar a rigidez vertical e horizontal do solo. Os tubulões foram considerados engastados. Os valores das rigidezes aos esforços e as rotações dos aparelhos de apoio são apresentados na Tabela 2. Estes foram calculados de acordo com equações empíricas apresentadas em Pfeil [19].

As rigidezes do solo foram obtidas a partir do ensaio SPT (*Standard Penetration Test*) realizado e encontram-se descritas na Tabela 3. Estas foram simuladas por meio da colocação de molas (*springs*) no topo e na base dos tubulões, nos blocos de fundação e nos demais elementos que apresentaram contato com o solo.

A superestrutura foi modelada com seções do tipo  $\Gamma$ , em concordância com a seção transversal da ponte, a partir do projeto. As bases das longarinas variam entre 35 cm e 70 cm no sentido de seus eixos longitudinais. Para representar essa variação, o trecho variável das longarinas foi discretizado em três partes sejam elas: 70 cm a 57 cm, de 57 cm a 41 cm e de 41 cm a 35 cm, conforme ilustra a Figura 14. Os trechos com seção constante (35 cm) foram discretizados em 06 elementos, visando proporcionar uma análise mais precisa. O tabuleiro foi discretizado em 38 elementos.

O módulo de elasticidade do concreto foi definido a partir da média dos módulos de elasticidade obtidos por meio de ensaios experimentais, realizado por Rodrigues Júnior *et al.* [14], apresentados na Tabela 4.

Para os elementos modelados (tubulões, blocos, pilares, longarinas e laje) foi utilizado o peso específico de 25 kN/m<sup>3</sup> referente ao concreto armado. A massa adicional do tabuleiro (lastro, dormentes, trilhos, entre outros) e as transversinas foram modeladas como massas distribuídas ou concentradas ao longo da estrutura,



**Tabela 5**

Valores das cargas utilizadas no modelo numérico

Elemento	Peso	Massa
Canaletas, argamassa, lastro, trilhos e acessórios	60,98 kN/m	6218,00 Kg/m
Transversina Intermediárias (2,80m x 1,75m x 0,30m)	36,75 kN	3747,32 Kg
Transversina do apoio central (2,80m x 2,45m x 0,70m)	120,05 kN	12241,25 Kg
Transversina dos apoios extremos (2,80m x 2,45m x 0,50m)	85,75 kN	8743,75 Kg
Refúgio, incluindo guarda-corpo do refúgio	11,50 kN	1172,63 Kg

**Tabela 6**

Fatores de participação de massa modal

Modo	Frequência (Hz)	UX	UY	UZ	$\Sigma$ UX	$\Sigma$ UY	$\Sigma$ UZ
1	1,054	2,32E-10	0,99431	7,959E-15	2,322E-10	0,99431	7,959E-15
2	1,064	1,00E+00	2,316E-10	5,784E-11	1	0,99431	5,785E-11
3	1,446	1,16E-13	5,305E-10	1,512E-13	1	0,99431	5,8E-11
4	3,624	8,46E-14	0,00567	1,6E-12	1	0,99998	5,96E-11
5	8,407	6,79E-16	1,234E-13	5,457E-10	1	0,99998	6,053E-10
6	8,604	1,92E-10	1,007E-16	0,1114	1	0,99998	0,1114
7	9,865	2,17E-07	8,792E-18	1,295E-11	1	0,99998	0,1114
8	12,181	1,78E-11	8,71E-17	0,76201	1	0,99998	0,87341

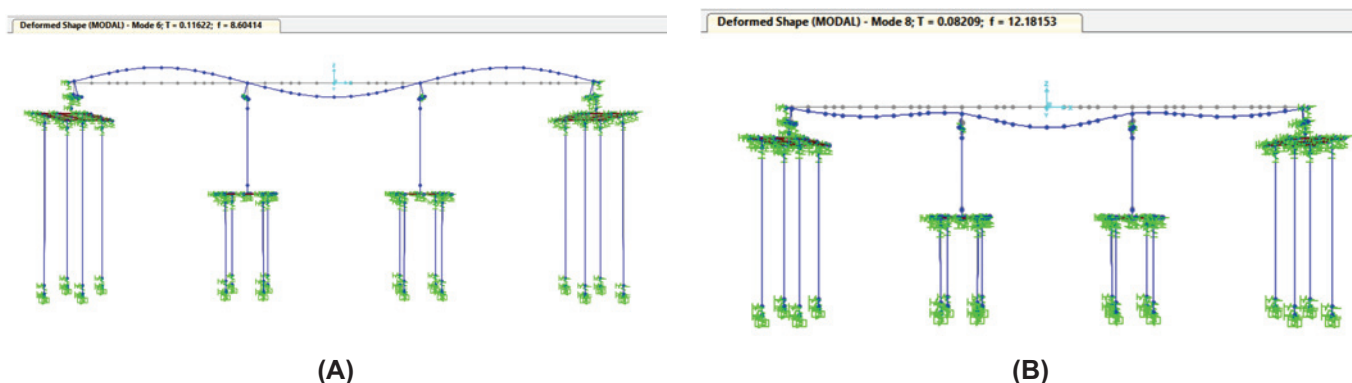
respectivamente. A Tabela 5 resume os valores das cargas e massas utilizadas no modelo.

Após a modelagem da estrutura no *software* CSiBridge [16], foi possível visualizar os modos identificados numericamente e suas respectivas frequências naturais. A Tabela 6 lista esses resultados com os seus respectivos fatores de participação modal (razão de massa efetiva). Segundo Macaia [6], o fator de participação modal permite avaliar a relevância de um determinado modo de vibração na resposta da estrutura, quando submetida a uma excitação.

Conforme pode ser visto na Tabela 6, os modos 6 e 8, ilustrados na Figura 15, apresentaram os maiores fatores de participação modal (valores de razão de massa efetiva mais altos). Nota-se que o modo 8, cuja frequência foi 12,18 Hz, apresentou o maior fator participação modal, ~76%. Sendo

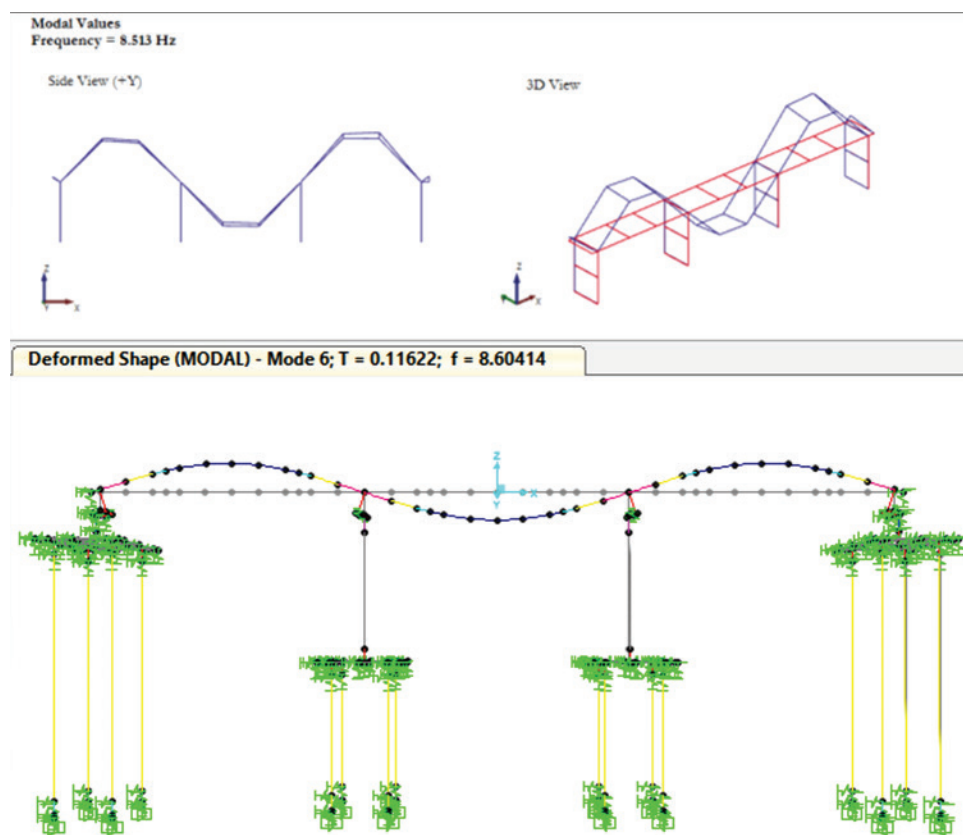
assim, o esperado seria que esse modo correspondesse ao primeiro modo identificado experimentalmente, no entanto isso não aconteceu, uma vez que o modo 6 apresentou forma modal e frequência natural mais próxima a identificada experimentalmente, como pode ser visto na Figura 16.

Para que o 8º modo numérico fosse identificado experimentalmente seria necessário impor deslocamentos nos três vãos, com energia suficiente para colocá-los em vibração, com amplitude suficiente (razão sinal/ruído). Isso não foi possível, devido à limitação na maneira pela qual a fonte de excitação foi aplicada durante o ensaio experimental (grupo de pessoas pulando em cada tramo da viga contínua, de forma não concomitante). A energia contida na fonte de excitação, fornecida pela massa do grupo de pessoas saltando, foi baixa quando comparada com a elevada massa necessária para induzir a vibração da seção.



**Figura 15**

(a) Sexto modo identificado a partir do modelo numérico, desenvolvido no *software* CSiBridge [16],  
 (b) Oitavo modo identificado a partir do modelo numérico, desenvolvido no *software* CSiBridge [16]



**Figura 16**

Comparação entre o primeiro modo obtido via análise experimental pelo método SSI-UPC com o primeiro modo obtido via modelo numérico

## 7. Conclusões

O principal objetivo desse estudo foi obter os parâmetros modais da ponte 44 da Estrada de Ferro Carajás, situada sobre o Rio Martírio, a partir de dados experimentais obtidos durante monitoramento “in loco”. Os resultados foram então comparados com os obtidos através de um modelo numérico desenvolvido no *software* CSiBridge [16]. Neste estudo de caso, a monitoramento foi realizado a partir da introdução de uma vibração produzida por pessoas saltando em cada vão da estrutura. A frequência de amostragem utilizada durante a aquisição foi de 500 Hz.

Para a estimativa dos parâmetros modais, foi utilizado o *software* ARTeMIS Modal [18]. Dois testes foram realizados: no primeiro, apenas os acelerômetros que não captaram sinal foram descartados; no segundo, os acelerômetros transversais, bem como os que não captaram sinal, foram descartados. No primeiro teste, os resultados obtidos não foram satisfatórios, uma vez que a quantidade de modos instáveis foi superior à de modos estáveis. Portanto, optou-se por apresentar apenas os resultados obtidos para o teste 02.

Para o método SSI-UPC, as análises foram realizadas variando o número de canais de projeção e a ordem do modelo. Observou-se que a utilização de três canais de projeção e 180 como ordem do modelo reduziu o número de modos instáveis no diagrama de estabilização e favoreceu o aparecimento de modos com frequências mais baixas.

Em virtude disso, apenas esses resultados foram apresentados.

Apesar da sofisticação do método utilizado para obter os parâmetros modais de forma experimental, apenas o primeiro modo de flexão vertical foi identificado e validado com o modelo numérico. Isso pode ser justificado pela maneira pela qual a estrutura foi excitada e pela energia limitada fornecida por um grupo de pessoas saltando. Para identificar experimentalmente o modo 8, seria necessária a aplicação de uma excitação simultânea aos três vãos da ponte, o que não foi possível durante a fase de monitoramento devido ao número limitado de pessoas, que não conseguiram produzir energia de excitação suficiente. Para identificar a frequência do modo 6, que corresponde ao primeiro modo de flexão vertical experimental, apenas um dos vãos precisaria ser posto em vibração. Isto pode ser explicado com base na teoria da vibração de vigas contínuas, que estabelece que uma viga contínua com  $n$  vãos de comprimento  $L$  terá a mesma primeira frequência de vibração (frequência fundamental) de um feixe  $L$  simplesmente suportado (Hayashikawa e Watanabe [20]).

## 8. Agradecimentos

Aos professores e alunos do Núcleo de Instrumentação e Computação Aplicada à Engenharia (NICAE), grupo associado

da UFPA, que gentilmente nos cederam os dados utilizados na pesquisa.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES, à Fundação Gorceix, à Fapemig e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil - PROPEC, pelo suporte financeiro.

## 9. Referências bibliográficas

- [1] FARRAR, C., R. WORDEN, K. Structural health monitoring: a machine learning perspective. Chichester: John Wiley & Sons, 2013.
- [2] LOBATO, A. L.S., NETO, R. P. J., AMADOR, R. D. S., SOUZA, M. R., SAMPAIO, C. A. R. Modal analysis experimental and computational of a railway bridge metallic. Metal Building Magazine – Edition nº 92 – ABCEM.
- [3] SAMPAIO, C. A. R., CHAN, T. H. T. Modal parameters identification of heavy-haul railway RC bridges – experience acquired. Structural Monitoring and Maintenance, Vol. 2, No. 1 (2015) 1-18.
- [4] COSTA, C., RIBEIRO, D., JORGE, P., SILVA, R., ARÊDE, A., CALÇADA, R. Calibration of the numerical model of a stone masonry railway bridge based on experimentally identified modal parameters. Portugal: Elsevier, 2016. p.354-371.
- [6] MACAIA, E. D. Experimental identification of the modal properties of a structure. Masters dissertation. Faculty of Science and Technology. New University of Lisbon, 2017.
- [5] SULEYMAN, E. N. Dynamic monitoring of the São João railway bridge. Lisboa, 2016, Masters dissertation. – Higher Institute of Engineering of Lisbon.
- [6] RODRIGUES, J. Stochastic modal identification - Analysis methods and applications in civil engineering structures. Thesis. FEUP, 2004.
- [7] VAN OVERSCHEE, P., DE MOOR, B. Subspace Identification for Linear Systems: Theory, implementation, applications. Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [8] PEETERS B. System Identification and Damage Detection in Civil Engineering. PhD Thesis, Department of Civil Engineering, K. U. Leuven, Belgium, 2000.
- [9] WENG, J.H., LOH, C.H., LYNCH, J.P., LU, K.C., LIN, P.Y., WANG, Y. Output-only modal identification of a cable-stayed bridge using wireless monitoring systems. Engineering Structures, v. 30, 2008, p. 1820-1830.
- [10] ANDERSEN, P. K., BRINCKER, R. Filtering out environmental effects in damage detection of civil engineering structures, IMAC XV, Kissimmee, USA, 1997.
- [11] LJUNG, L. System Identification – Theory for the User, 2nd edition, Prentice Hall, USA, 1999.
- [12] HERLUFSEN, H., GADE, S., MØLLER, N. Identification techniques for operational modal analysis – an overview and practical experiences, Proceedings of the IMAC-XXIV: Conference on Structural Dynamics, St Louis, Missouri, USA. January. 2006.
- [13] NGUYEN, T., CHAN, T., THAMBIRATNAM, D. Effects of wireless sensor network uncertainties on output-only modal analysis employing merged data of multiple tests. Advances in Structural Engineering, 17(3), 2015, p. 319 – 330.
- [14] RODRIGUES JÚNIOR, J. S., CARNEIRO, M. F. J. R., SAMPAIO, C. A. R., DALTRO, M. A. SILVA, S. M., LEAL, C. A. M., MORAES, E., QUEIROZ, B. F. A. Final Report - Bridge n. 44 over the Martírio River. Belém, Pará, 2012.
- [15] ABNT NBR 15307:2006 - Non-destructive tests - Proof of dynamic loads in large structures - Procedure.
- [16] CSIBRIDGE, Copyright Computers and Structures, CSiBridge, Inc. 2014, Version 17.0.0, 2015.
- [17a] AqDados 7, Lynx Tecnologia Eletrônica Ltda, Version 7.0.2.1, 2011.
- [17b] AqDanalysis 7, Lynx Tecnologia Eletrônica Ltda, Version 7.0.2.1, 2011.
- [18] ARTEMIS MODAL, Structure Vibration and Solutions A/S, Version 3.5.0.0, 2014.
- [19] PFEIL, W. Pontes em Concreto Armado. Vol. 2. LTC Editora. 1997. Rio de Janeiro. Brazil (in Portuguese).
- [20] HAYASHIKAWA, T., WATANABE, N. Free vibration analysis of continuous beams. J. Eng. Mech., 1985.